第 19 卷第 2 期
2002 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.19 No.2
Apr. 2002

文章编号：1000-8152(2002)02-0244-03

不确定系统的鲁棒输出反馈区域极点配置 *

俞 立 陈国定 杨马英
（浙江工业大学信息工程学院·杭州，310032）

摘要：对一类具有范数有界参数不确定性的线性系统，研究了使得闭环系统的所有极点均位于一给定圆盘中的输出反馈控制器设计问题.采用线性矩阵不等式处理方法，证明了该问题等价于一个线性矩阵不等式的可解性问题，并利用该线性矩阵不等式的可行解给出了输出反馈控制器的构造方法.所提出的方法既可应用到连续系统，也可应用到离散系统.

关键词：不确定性；鲁棒控制；线性矩阵不等式；极点配置

文献标识码：A

Robust Regional Pole Assignment of Uncertain Systems via Output Feedback Controllers

YU Li, CHEN Guoding and YANG Maying
(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology · Hangzhou, 310032, P. R. China)

Abstract: *This paper is concerned with the design problem of the output feedback controllers that assign all the closed-loop* poles in a prespecified disk for a class of uncertain linear systems. The uncertainty in the system model is norm-bounded. Using the linear matrix inequality (LMI) approach, it is shown that such a problem reduces to the feasibility of a certain LMI, and a construction of the desired controllers is provided in terms of feasible solutions to the LMI. The proposed results are applicable to both continuous- and discrete-time systems.

Key words: uncertainty; robust control; LMI; pole placement

1 引言(Introduction)

正如文献[1]所阐述的，一个线性系统的所有极点均在复平面上的一个适当圆盘中将保证其具有一定的稳态和动态性能.近年来，已提出了一些方法，将线性系统的所有极点配置在一个给定的圆盘中[1,2].最近，不确定系统具有圆盘区域闭环极点约束的鲁棒控制研究也取得了一定的进展[3~5].[3]提出了通过求解一个带参数的离散型 Riccati 方程的区域极点配置方法；[4]通过对系统进行增维，提出了一种凸优化的控制器设计方法；作者[5]提出了基于线性矩阵不等式的处理方法.然而，在这些文献中，都只考虑了状态反馈.在实际系统中，系统的状态往往难以直接测量得到，因此用系统的输出反馈来配置闭环系统的极点，以使得闭环系统具有期望的性能就成为一个十分有意义的问题.

对一类具有范数有界不确定性的线性系统，本文研究将闭环系统极点配置在一个给定圆盘中的输出反馈控制器设计问题.采用线性矩阵不等式处理方法，证明了这一问题的可解性等价于一个线性矩阵不等式的可行性，并利用该线性矩阵不等式的可行性给出了具有给定要求的输出反馈控制器的一个构造方法.所得到的结论既可以应用到连续系统，也可以应用到离散系统.

2 问题的描述和准备(Problem description and preliminaries)

考虑由以下状态方程描述的一类不确定连续或离散线性系统

$$\begin{cases} \delta[x(t)] = (A+\Delta A)x(t) + (B+\Delta B)u(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别是系统的状态向量，控制输入和测量输出，δ 是一个算子，

* 基金项目：国家自然科学基金(69974036)、教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划和浙江省自然科学基金资助项目.
收稿日期：2000-03-27；收修改稿日期：2000-11-27.

对连续系统，δ 是微分算子，即 $\delta[x(t)] = \dot{x}(t)$，对离散系统，$\delta$ 表示延迟算子，即 $\delta[x(t)] = x(t+1)$，A, B, C 是具有适当维数的实常数矩阵，$\Delta A, \Delta B$ 表示系统模型中的参数不确定性，且假定具有以下的形式：

$$[\Delta A \quad \Delta B] = DF[E_1 \quad E_2]. \tag{2}$$

其中 D, E_1, E_2 是具有适当维数的实常数矩阵，$F \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 是满足

$$F^{\mathrm{T}}F \leqslant I \tag{3}$$

的未知矩阵，上式中的 I 表示适当维数的单位矩阵.

本文的目的是设计一个满阶的动态输出反馈控制器

$$\begin{cases} \delta[\hat{x}(t)] = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}y(t), \\ u(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}y(t). \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$，使得对所有允许的不确定性，闭环系统

$$\delta[x_c(t)] = (A_c + D_cFE_c)x_c(t) \tag{5}$$

的所有极点均位于事先给定的中心在 $q + \mathrm{j}0$，半径为 r 的圆盘 $D(q, r)$ 中.其中

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix},\ A_c = \begin{bmatrix} A + B\hat{D}C & B\hat{C} \\ \hat{B}C & \hat{A} \end{bmatrix},$$

$$D_c = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix},\ E_c = [E_1 + E_2\hat{D}C \quad E_2\hat{C}].$$

这样一个问题称为是不确定系统(1)的鲁棒 D 镇定问题，控制器(4)称为是系统(1)的一个鲁棒 D 稳定化控制器.

引理 1[5]　闭环系统(5)的所有极点均在圆盘 $D(q, r)$ 中当且仅当存在对称正定矩阵 P，使得

$$\begin{bmatrix} D_cD_c^{\mathrm{T}} - rP & A_cP - qP \\ PA_c^{\mathrm{T}} - qP & PE_c^{\mathrm{T}}E_cP - rP \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

3　鲁棒 D 稳定化控制器设计(Design of robust D stabilizing controllers)

本节将依据引理 1 给出鲁棒 D 稳定化控制器的设计方法.由于在矩阵不等式(6)中，控制器系数矩阵 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 和 $\hat{D}$ 与其他变量以非线性方式耦合在一起，因此很难从(6)式直接确定这些变量.以下应用文献[6]中提出的变量变换思想，给出输出反馈 D 稳定化控制器的设计方法.

将矩阵 P 和 P^{-1} 作以下分块：

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\mathrm{T}} & W \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix},$$

其中 X 和 Y 是 n 阶的对称矩阵.从 $P^{-1}P = I$ 可得

$$MN^{\mathrm{T}} = I - XY. \tag{7}$$

定义

$$U_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix},\ U_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

则以下关系式成立

$$PU_1 = U_2,\ U_1^{\mathrm{T}}PU_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}. \tag{8}$$

引进变量变换

$$\begin{cases} \tilde{A} = X(A + B\hat{D}C)Y + M\hat{B}CY + XB\hat{C}N^{\mathrm{T}} + M\hat{A}N^{\mathrm{T}}, \\ \tilde{B} = XB\hat{D} + M\hat{B}, \\ \tilde{C} = \hat{D}CY + \hat{C}N^{\mathrm{T}}, \\ \tilde{D} = \hat{D}, \end{cases} \tag{9}$$

则运用矩阵运算及利用关系式(8)，可得

$$U_1^{\mathrm{T}}A_cPU_1 = \begin{bmatrix} XA + \tilde{B}C & \tilde{A} \\ A + B\tilde{D}C & AY + B\tilde{C} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$U_1^{\mathrm{T}}PE_c^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} E_1^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}\tilde{D}^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} \\ YE_1^{\mathrm{T}} + \tilde{C}^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\ U_1^{\mathrm{T}}D_c = \begin{bmatrix} XD \\ D \end{bmatrix}. \tag{11}$$

定理 1　对给定的圆盘 $D(q, r)$，系统(1)存在鲁棒 D 稳定化控制器(4)当且仅当存在矩阵 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ 和对称矩阵 X, Y，使得

$$\begin{bmatrix} -rX & -rI & XA + \tilde{B}C - qX & \tilde{A} - qI & 0 & XD \\ * & -rX & A + B\tilde{D}C - qI & AY + B\tilde{C} - qY & 0 & D \\ * & * & -rX & -rI & E_1^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}\tilde{D}^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & -rY & YE_1^{\mathrm{T}} + \tilde{C}^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

其中 * 处的矩阵块可以由矩阵的对称关系得到.

证　由引理 1，系统(1)存在一个 D 稳定化控制器(4)当且仅当存在矩阵 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ 和对称矩阵 P，使得(6)式成立.根据矩阵的 Schur 补性质，(6)式等价于

$$\begin{bmatrix} -rP & A_cP - qP & 0 & D_c \\ PA_c^{\mathrm{T}} - qP & -rP & PE_c^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & E_cP & -I & 0 \\ D_c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

定义矩阵 $V = \mathrm{diag}\{U_1, U_1, I, I\}$，对(13)式左边的矩阵分别左乘矩阵 V^{T} 和右乘矩阵 V，进而应用关系式(10)，(11)，可得矩阵不等式(13)等价于(12). 定理得证.

矩阵不等式(12)是关于 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D},X,Y$ 的一个线性矩阵不等式. 因此可以应用现有的有关线性矩阵不等式的求解方法有效地求解. 如果得到线性矩阵不等式(12)的一个解，则可以根据(7)式、应用奇异值分解的方法确定非奇异矩阵 M 和 N. 进而、根据

$$\begin{cases} \hat{D} = \tilde{D}, \\ \hat{C} = (\bar{C} - \hat{D}CY)N^{-\mathrm{T}}, \\ \hat{B} = M^{-1}(\bar{B} - XB\hat{D}), \\ \hat{A} = M^{-1}[\tilde{A} - X(A + B\hat{D}C)Y]N^{-\mathrm{T}} - \\ \qquad \hat{B}CYN^{-\mathrm{T}} - M^{-1}XB\hat{C}, \end{cases} \tag{14}$$

可以唯一确定控制器(4)的系数矩阵 $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}$.

4 结论(Conclusions)

本文研究了一类不确定连续和离散线性系统的具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制问题，基于线性矩阵不等式处理方法，给出了通过求解一个线性矩阵不等式的输出反馈 D 稳定化控制器设计方法，并建立了用线性矩阵不等式的凸约束刻划所求的一组控制器参数. 基于这一结论，通过附加一些其他的约束条件，可以方便地处理具有诸如结构约束，控制器增益约束等要求的输出反馈 D 稳定化控制器设计问题. 有关这方面的问题目前正在进一步研究中.

参考文献(References)

[1] Haddad W M and Bernstein D S. Controller design with regional pole constraints [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992,37(1):54 – 69

[2] Furuta K and Kim S B. Pole assignment in a specified disk [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987,32(5):423 – 427

[3] Garcia G and Bernussou J. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995,40(1):184 – 190

[4] Garcia G, Bernussou J and Camozzi P. Disk pole location for uncertain systems through convex optimization [J]. Int. J. Robust and Nonlinear Control, 1996,6(1):189 – 199

[5] Yu Li, Chen Guoding and Yang Maying. Roust control of uncertain linear systems with disk pole constraints [J]. Acta Automatica Sinica, 2000,26(1):116 – 120

[6] Scherer C, Gahinet P and Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization [J]. IEEE Trans. Automat. Contr, 1997,42(7):896 – 911

本文作者简介

俞 立 1961年生. 1982年毕业于南开大学控制理论专业，后在浙江大学获硕士和博士学位. 1993年至1995年获瑞士联邦政府奖学金留学瑞士联邦高工. 2000年在香港科技大学做访问研究. 现为浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究领域包括鲁棒控制，时滞系统的分析和控制等. Email: lyu@mail.hz.zj.cn

陈国定 1962年生. 1990年在浙江大学获硕士学位，现为浙江工业大学自动化系副教授. 主要研究方向为不确定系统的鲁棒控制理论与应用，工业过程计算机控制技术等.

杨马英 1966年生. 分别于1986年、1989年和1996年在浙江大学工业自动化专业获学士、硕士和博士学位. 现为浙江工业大学自动化系副教授. 主要研究方向为预测控制理论与应用，不确定系统的鲁棒控制等.