

采样系统预测控制的设计与分析*

陈增强 孙明玮 袁著祉

(南开大学自动化系·天津, 300071)

摘要: 探讨了采样系统中的预测控制系统的设计问题. 把离散系统中的经典的预测控制稳定性设计方法推广到采样系统, 并给出了这些方法的解析表达式和稳定性条件.

关键词: 采样系统; 预测控制; 稳定性; 拉格朗日乘子法

文献标识码: A

Predictive Control Design and Analysis for Sampled-Data Systems

CHEN Zengqiang, SUN Mingwei and YUAN Zhuzhi

(Department of Automation, Nankai University · Tianjin, 300071, P.R. China)

Abstract: This paper discusses the problem of predictive control design for sampled-data systems. The traditional stable predictive control design methods are extended to sampled-data systems. The analytical solutions and stability conditions are obtained for these schemes.

Key words: sampled-data system; predictive control; stability; Lagrange multiplier

1 引言(Introduction)

预测控制所具有的模型预测、反馈校正和滚动优化等机理适合复杂工业过程的要求. 通常的预测控制算法都是针对离散系统设计的, 而实际的工业过程大多是连续的, 单纯的离散系统设计无法衡量采样间的动态输出特性. 同时, 不同的采样时间将极大地影响离散化后系统的特性^[1]. 尤其对于一些快对象, 当由于各种条件的限制必须取较大的采样间隔时, 单纯的离散控制无法保证良好的动态特性.

本文把预测控制的几种稳定性设计方法, 即无穷预测时域^[2]、终点状态约束^[3]和有限终点状态加权矩阵方法^[4], 在统一的框架下应用到采样系统, 得到了解析解, 并给出了稳定性条件. 直接面向采样系统的预测控制设计避免了香农采样定理对于采样速率的限制.

2 采样系统预测控制(Sampled-data systems predictive control)

考虑连续系统的能控标准型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \\ y(t) = C_c x(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$. 为了简便起见, 下面只研究系统的

调节问题($y_r(t) = 0$). 设采样间隔为 h , 系统如图 1 所示:

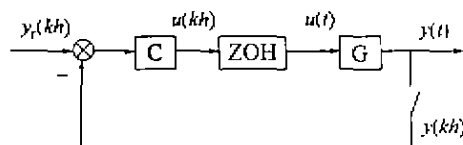


图 1 采样系统框图

Fig. 1 The process of sampled data systems

其中, C 为控制器, ZOH 为零阶保持环节.

预测控制的目标函数为:

$$J_k = \int_{kh}^{(k+N)h} y^2(t) dt + \lambda h \sum_{i=0}^{N_k-1} u^2[k+i|k]. \quad (2)$$

这里 k 为采样时刻, $u[k+i|k]$ 为 k 时刻对 $k+i$ 时刻的控制预测值, 并记 $u[k] = u[k|k]$, 对 x, y 也有类似的记号. N 为预测长度, $N_k (N \geq N_k)$ 为控制长度, 且当 $i \geq N_k$ 时, $u[k+i|k] = 0$. λ 为控制加权因子. 与(1)对应的离散系统为:

$$\begin{cases} x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k], \\ y[k] = C_c x[k]. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$A_d = e^{A_c h}, \quad B_d = \left(\int_0^h e^{A_c t} dt \right) B_c.$$

* 基金项目: 国家自然科学基金(60174021), 天津市自然科学基金重点项目(013800711)资助项目.

收稿日期: 2000-04-17; 收修改稿日期: 2001-01-05.

采样间的动态特性可以描述为:

$$x(kh+t) = e^{A_c t} x[k] + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} d\tau B_c u[k], \quad (4)$$

其中 $0 < t < h$. 若使采样后的离散系统完全能控, 则采样时间应满足一定的条件(见文[5]). 本文假设采样时间满足该条件.

把(3)和(4)代入(2), 同时考虑加入终点状态约束, 则目标函数可以转化为下列形式:

$$J_k = \sum_{i=0}^{N-1} J_{k,i} + J_{k,N}, \quad (5)$$

这里

$$J_{k,i} = x^T[k+i|k] Q_{11} x[k+i|k] + 2x^T[k+i|k] Q_{12} u[k+i|k] + u^T[k+i|k] Q_{22} u[k+i|k], \quad (6)$$

$$J_{k,N} = x^T[k+N|k] F x[k+N|k], \quad (7)$$

其中

$$Q_{11} = \int_0^h e^{A_c^T} Q e^{A_c} dt,$$

$$Q_{12} = \left[\int_0^h e^{A_c^T} Q \left(\int_0^t e^{A_c \tau} d\tau \right) dt \right] B_c,$$

$$Q_{22} = B_c^T \left[\int_0^h \left(\int_0^t e^{A_c^T \tau} d\tau \right) Q \int_0^t e^{A_c \tau} d\tau dt \right] B_c + h\lambda.$$

$$Q = C_c^T C_c.$$

这几个矩阵的计算都要求积分, 但实际上只要有了 Q_{11} , 其它都可算出:

$$Q_{12} = \left[\int_0^h e^{A_c^T} Q (e^{A_c t} - I) A_c^{-1} dt \right] B_c = [Q_{11} - (e^{A_c h} - I) Q] A_c^{-1} B_c,$$

$$Q_{22} = B_c^T A_c^{-T} [Q_{11} - (e^{A_c h} - I) A_c^{-1} Q - Q A_c^{-1} (e^{A_c h} - I) + hI] A_c^{-1} B_c + h\lambda.$$

3 控制的求解与稳定性分析(The solving and stability analysis of control law)

由于预测控制的常规设计无法保证闭环系统的稳定性, 下面考虑三种典型的设计方法.

3.1 无限时域的预测控制(Infinite horizon predictive control)

设 r 为系统开环不稳定极点个数, 我们有:

定理 1 在目标函数(5)中取 $N = \infty, N_u > r, F = 0$, 则闭环系统稳定.

证明可参见文[2]. 可以看到, 虽说终点状态加权矩阵为零阵, 但由于预测时域为无穷大, 因而等价于对于不稳定模态的终点加权为无穷大, 而对于稳定模态的终点加权为有限的有限时域预测控制.

3.2 终点状态零约束的预测控制(End point state zero constraining predictive control)

此时相当于取 $F = \infty, N_u = N$. 我们记:

$$U_k = [u[k|k], u[k+1|k], \dots, u[k+N-1|k]]^T. \quad (8)$$

由(3)可知:

$$x[k+i|k] = A_d^i x[k] + \bar{B}_i U_k, \quad (9)$$

其中

$$\bar{B}_i = [A_d^{i-1} B_d, \dots, A_d B_d, B_d, 0, \dots, 0]_{n \times N}.$$

记

$$u[k+i|k] = \bar{C}_i U_k, \quad (10)$$

其中

$$\bar{C}_i = [0, \dots, 0, \underset{i+1}{1}, 0, \dots, 0]_{1 \times N}.$$

而终点状态约束可以表示为

$$x[k+N|k] = A_d^N x[k] + \bar{B}_N U_k = 0. \quad (11)$$

把(9), (10)代入(5), 并考虑约束条件(11), (5)可写成由 Lagrange 算子法解决的泛函:

$$J_k = U_k^T \hat{Q} U_k + 2x^T[k] \bar{R} U_k + \beta^T (A_d^N x[k] + \bar{B}_N U_k). \quad (12)$$

其中

$$\hat{Q} = \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{B}_i^T Q_{11} \bar{B}_i + 2\bar{B}_i^T Q_{12} \bar{C}_i + \bar{C}_i^T Q_{22} \bar{C}_i),$$

$$\bar{R} = \sum_{i=0}^{N-1} (A_d^T Q_{11} \bar{B}_i + A_d^T Q_{12} \bar{C}_i),$$

$$\beta = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T.$$

令 $\partial J_k / \partial U_k = 0$, 并与(11)联立可得控制律:

$$U_k = - \{ W [I - \bar{B}_N^T (\bar{B}_N W \bar{B}_N^T)^{-1} \bar{B}_N W] \bar{R}^T + W \bar{B}_N^T (\bar{B}_N W \bar{B}_N^T)^{-1} A_d^N \} x[k]. \quad (13)$$

对于上述控制, 我们有如下结果:

定理 2 当 $N \geq n$ 时, 终点零约束预测控制的闭环稳定.

证 当 $N \geq n$ 时, 由于系统可控, 可以在 N 之后使状态控制到零, 设 J_k^* 为 k 时刻目标函数的最优值, 相应的最优控制序列为:

$$U_k^* = [u^*[k|k], u^*[k+1|k], \dots, u^*[k+N-1|k]]^T.$$

预测控制只取第一项, 若取下一步的控制序列(显然满足约束条件)为:

$$U_{k+1} = [u^*[k+1|k], \dots, u^*[k+N-1|k], 0]^T, \quad (14)$$

则由目标函数(5)和约束条件(11), 并考虑到在 N 之后可使状态控制到零, 有:

$$J_k^* = J_k(U_k^*) \geq J_{k+1}(U_{k+1}). \quad (15)$$

又因为 J_{k+1}^* 为 $k+1$ 时刻目标函数的最优值, 则

$$J_k^* \geq J_{k+1}(U_{k+1}) \geq J_{k+1}^*,$$

即目标函数不减, 可以作为一个 Lyapunov 函数, 因此闭环系统稳定.

当 $N = n$ 时,控制序列只能保证约束,而不能优化目标函数,因而一般应取 $N > n$.

3.3 有限终点加权预测控制 (Finite end point weighting predictive control)

首先介绍下面的结论:

引理 1 对于下列离散时间系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (16)$$

如果系统能控能观,且预测控制的目标函数取为:

$$J = J_1 + J_2. \quad (17)$$

其中

$$J_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \{x^T(k+j) C^T Q C x(k+j) + w(q^{-1}) u^T(k+j) R w(q^{-1}) u(k+j)\}, \quad (18)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} x^T(k+N) F_m x(k+N). \quad (19)$$

其中 F_m 有限且满足

$$F_m \geq A^T F_m [I + B R^{-1} B^T F_m]^{-1} A + C^T Q C. \quad (20)$$

如果 $N \geq n$, 则闭环系统渐近稳定.

对于采样系统的预测控制,我们有如下结果:

定理 3 如果在(6)中有:

$$Q_{11} > Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T, \quad (21)$$

并且终端加权矩阵满足:

$$F \geq (A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12})^T F [I + B_d Q_{22}^{-1} B_d^T F]^{-1} (A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12}) + C_c^T (Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T) C_c. \quad (22)$$

当 $N = N_u \geq n$ 时,闭环系统稳定.

证 取一个辅助输入为:

$$\tilde{u}[k] = u[k] + Q_{22}^{-1} Q_{12}^T x[k]. \quad (23)$$

把上式代入(3),可得:

$$x[k+1] = (A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12}^T) x[k] + B_d \tilde{u}[k], \quad (24)$$

而(6)中的目标函数可化为:

$$J_{k,i} = x^T[k+i|k] (Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T) x[k+i|k] + \tilde{u}^T[k+i|k] Q_{22} \tilde{u}[k+i|k]. \quad (25)$$

显然已经去掉了中间的耦合项,转化成了标准形式,由引理 1 可知结论成立.

注意,可以证明对于任意 $\lambda \geq 0$, 条件(21)是成立的.

在一般的实际设计中,一般取 $F = \alpha \bar{F}$, 其中 $\alpha > 0$, 为设计者选取的设计参数,而 $\bar{F}$ 为一个固定的正定矩阵,通常取为对角阵,如取为单位阵 I . 我们有下列结果:

推论 当 $N = N_u \geq n$ 时,若

$$\alpha \geq \max(1, \lambda_M(\{(A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12})^T \bar{F} [I + B_d Q_{22}^{-1} B_d^T \bar{F}]^{-1} (A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12}) + C_c^T (Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T) C_c\}) / \lambda_m(\bar{F})), \quad (26)$$

则闭环系统稳定,其中 $\lambda_M(A)$ 为对称阵 A 的最大特征根, $\lambda_m(A)$ 为对称阵 A 的最小特征值.

利用最优控制中常用的动态规划手段,可知控制律为:

$$u[k] = - [Q_{22} + B_d^T K(N) B_d]^{-1} B_d^T K(N) (A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12}^T) x[k], \quad (27)$$

其中, $K(N)$ 从下列 Riccati 方程递推得出:

$$\begin{cases} K(i+1) = \\ (A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12}^T)^T K(i) [I + \\ B_d Q_{22}^{-1} B_d^T K(i)]^{-1} (A_d - B_d Q_{22}^{-1} Q_{12}^T) + \\ Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ K(0) = F \end{cases} \quad (28)$$

4 结论 (Conclusion)

本文把预测控制中几种常用的稳定性设计方法应用于采样系统的设计,并给出了稳定性条件,讨论了设计参数的影响,避免了采样间隔选取上的约束. 对于实际工业过程的采样控制系统设计具有重要的指导意义.

参考文献 (References)

- [1] Astrom K J, Hagander P and Sjöberg B. Zeros of sampled system [J]. Automatica, 1984, 20(1): 31-38
- [2] Rawlings J B and Muske K B. The stability of constrained receding horizon control [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38(10): 1512-1516
- [3] Clarke D W and Scattolini R. Constrained receding horizon predictive control [J]. IEE Proc. Control Theory and Appl. 1994, 141(5): 295-304
- [4] Kwon W H and Byun D G. Receding horizon tracking control as a predictive control and its stability properties [J]. Int. J. of Control, 1989, 50(5): 1807-1824
- [5] Chen C T. Linear System Theory and Design [M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984

本文作者简介

陈增强 1964年生,南开大学自动化系教授,工学博士.研究领域为自适应控制,智能预测控制及其在工业过程中的应用. Email: aecyz@public.tpt.tj.cn

孙明玮 1972年生,1995年本科毕业于北方交通大学通信与控制工程系交通信号与控制专业,现为南开大学自动化系自动控制专业博士生.目前研究兴趣为预测控制.

袁著祉 1937年生,南开大学自动化系教授,博士生导师.曾分别获得国家教委科技进步一等奖和国防科工委光华基金一等奖,研究方向为自适应控制,智能控制,计算机控制与管理.