

状态受限的非完整链式系统的实际镇定*

王朝立 谈大龙 王越超

(中国科学院机器人学开放研究实验室·沈阳, 110015)

摘要: 考虑了状态受限的非完整单链式系统的实际镇定问题. 利用链式系统的特殊结构设计了两步控制算法. 该方法能够使闭环系统的状态最终收敛到原点的任意小邻域中, 且若系统初值小于任意正数 M , 那么除了一个收敛到零的状态变量外, 其余状态变量在整个实际镇定过程中均小于正数 $(1 + \epsilon)M$, 其中 ϵ 可事先任意小. 最后对平面移动机器人进行了仿真, 验证了所给方法的有效性.

关键词: 状态受限; 链式系统; 移动机器人; 实际镇定

文献标识码: A

Practical Stabilization of Nonholonomic Chained Form Systems with State Constraints

WANG Chaoli, TAN Dalong and WANG Yuechao

(Robotics Laboratory Shenyang Institute of Automation, Academia Sinica · Shenyang, 110015, P.R. China)

Abstract: This paper investigates the practical stabilizing problem of chained systems with state constraints. Based on the peculiar structure of the chained form system, a new two-step controller is presented, which can stabilize the states of the system to an arbitrarily small neighborhood of its equilibrium in a finite time. In addition, if the initial value of each state is less than or equal to some positive number M , all states are less than or equal to $(1 + \epsilon)M$ for an arbitrary positive ϵ , except only one state which exponentially converges to zero. The application of it to a nonholonomic wheeled mobile robot is described. Simulation result shows that the proposed controller is effective.

Key words: state constraints; chained form system; wheeled mobile robot; practical stabilization

1 引言(Introduction)

最近, 非完整运动学系统的控制问题受到越来越多的关注. 尽管这类系统是可控可达的, 但是已证明不存在光滑的纯状态反馈使其镇定到原点, 因此只能寻求其它形式的控制律如时变反馈控制律, 不连续控制律和混合控制律^[1]. 然而在这些设计中, 均未考虑状态受约束的情形. 但在实际系统中, 状态常常是受限制的, 例如平面移动机器人的工作空间是有限的, 机器人不可能超限运动. 因此, 有必要考虑状态受限的非完整系统的镇定问题.

本文考虑非完整单链式系统的镇定问题. 这是一个新问题. 基于这类系统特殊的结构, 采用两步控制策略, 设计的非光滑控制律使得闭环系统的状态在有限时间内可以收敛到原点的任意小的邻域中. 且若系统初值小于任意正数 M , 那么系统状态除了一

个收敛到零的状态变量外, 其余状态变量在整个实际镇定过程中均小于正数 $(1 + \epsilon)M$, 其中 ϵ 可事先任意小.

2 问题的提出(Problem statement)

考虑平面上的刚体移动机器人, 它由车体和三个轮子构成. 前两轮的方位始终与车体方向一致, 后一轮为导向轮, 对移动机器人施加的控制由前两轮上的马达提供. 建立一平面惯性坐标系及一与机器人固联的参考坐标系, 取此参考坐标系原点 O 为移动机器人质心, 记 O 点在惯性系中的坐标为 (x, y) , 参考坐标系与惯性系的夹角为 θ (详见[2]).

设轮子与地面接触点满足无滑动条件, 这一非完整约束可表为

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = 0. \quad (1)$$

* 基金项目: 中国科学院沈阳自动化所知识创新工程基金(F990116)资助项目.

收稿日期: 2000-04-10; 收修改稿日期: 2000-12-01.

记 $q = [\theta, x, y]$, 定义

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 \cos\theta - \dot{x}_1 \sin\theta \end{bmatrix},$$

则由式(1)可知

$$\dot{q} = R(q)v. \quad (2)$$

此即为这类非完整约束的运动学系统.

取如下全局同胚变换

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta, \\ x_2 &= -x \sin\theta + y \cos\theta, \\ x_3 &= x \cos\theta + y \sin\theta, \\ v_1 &= u_1, v_2 = u_1 x_3 + u_2, \end{aligned}$$

则系统(2)可化为 3 阶链式系统, 即得到

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_2 u_1. \quad (3)$$

这里 x_1 表示角度, (x_2, x_3) 与 (x, y) 之间是正交关系.

一般来说, 非完整平面移动机器人的运动学系统经过坐标变换和输入变换化为链式系统时 x_1 均表示角度, 而位置坐标 (x, y) 与相应的其它一些新状态变量具有正交变换关系(见文[3]).

综上所述, 考虑变量 x_1 不受约束而其余变量受约束的非完整链式系统的镇定问题是十分有意义的. 由此提出下面一般单链式系统在状态受限下的实际镇定问题.

设 $t_0 = 0$ 为系统的初始时刻, 为讨论方便, 引入下面记号和定义.

$$\bar{x} = (x_2, x_3, \dots, x_n)^T,$$

研究的问题:

考虑单链式系统

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_i = x_{i-1} u_1, i = 3, \dots, n, \quad (4)$$

任给 $\epsilon > 0, \epsilon_1 > 0, M > 0$ (一般 $\epsilon \ll M$). 本文实际镇定研究的问题是如何设计控制器 u_1 和 u_2 使得闭环系统满足:

1) $x_1(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$; 且存在有限时间 $T > 0$, 当 $t \geq T$ 时, $\|\bar{x}\| \leq \epsilon$.

2) 若 $\|\bar{x}(0)\| \leq M$, 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq (1 + \epsilon_1)M$, $\forall t \geq 0$. 其中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵或向量的 2 范数.

3 控制器设计(Controller design)

为表述主要结果, 先引入两个引理.

引理 1 设 $n(\geq 3)$ 为自然数, 任取实数 $d > 0$, $a \neq 0$, 选取负实数 $\lambda < 0, \delta < 0$ 满足

$$(n-2)\delta/\lambda \leq 2d + d^2,$$

则存在实数 $k_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 使得矩阵

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_{n-2} & k_{n-1} \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{bmatrix}$$

满足:

1) 其特征值为 $\lambda, \lambda + \delta, \dots, \lambda + (n-2)\delta$.

2) 存在可逆阵 U 使得

$$A = U^{-1} \text{diag}\{\lambda, \lambda + \delta, \dots, \lambda + (n-2)\delta\} U, \quad (5)$$

且若取 $Q = U^T U$, 则矩阵 $P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ 为 Lyapunov 方程 $PA + A^T P = -Q$ 的唯一正定解, 且

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \leq 1 + d. \quad (6)$$

证 利用线性代数的知识可证明之.

引理 2 设 $n(\geq 3)$ 为自然数, 任取实数 $\bar{d} > 0$, 选取非零实数 $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\delta}$ 使得 $\bar{\lambda}\bar{\delta} > 0$ 且 $(n-2)\bar{\delta}/\bar{\lambda} \leq 2\bar{d} + \bar{d}^2$. 则存在实数 $\bar{k}_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 使得矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \cdots & \bar{k}_{n-2} & \bar{k}_{n-1} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

满足:

1) 其特征值为 $\bar{\lambda}, \bar{\lambda} + \bar{\delta}, \dots, \bar{\lambda} + (n-2)\bar{\delta}$.

2) 存在可逆阵 $\bar{U}$ 使得

$$\bar{A} = \bar{U}^{-1} \text{diag}\{\bar{\lambda}, \bar{\lambda} + \bar{\delta}, \dots, \bar{\lambda} + (n-2)\bar{\delta}\} \bar{U}. \quad (7)$$

3) 情形 1: $\bar{\lambda} < 0$, 取

$$\bar{Q} = \bar{U}^T \bar{U}, \bar{P} = \int_0^{+\infty} e^{\bar{A}^T t} \bar{Q} e^{\bar{A} t} dt,$$

则这样选取的正定阵满足 Lyapunov 方程

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} = -\bar{Q}.$$

情形 2: $\bar{\lambda} > 0$, 取

$$\bar{Q} = \bar{U}^T \bar{U}, \bar{P} = \int_0^{+\infty} e^{-\bar{A}^T t} \bar{Q} e^{-\bar{A} t} dt,$$

则这样选取的正定阵满足 Lyapunov 方程

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} = \bar{Q}.$$

以上两种情形均有

$$\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{P})}{\bar{\lambda}_{\min}(\bar{P})}} \leq 1 + \bar{d}. \quad (8)$$

证 利用线性代数和 Lyapunov 方程解的理论可证明之.

系统的实际镇定方案为:

定理 设 $n(\geq 3)$ 为自然数, 任给 $\varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0, M > 0$ (一般 $\varepsilon \ll M$). 系统实际镇定的控制器设计算法为:

步骤 1 取正数 $h(0 < h < 1)$, 任取 $a \neq 0$, 在引理 1 中取 $\varepsilon_1 = d, \lambda_1 = \lambda, \delta_1 = \delta$ 满足 $(n-2)\bar{\delta}_1/\bar{\lambda}_1 \leq 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2$ (引理 1 的条件), 故满足引理 1 结果的实数记为 $k_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 控制律取为

$$u_1 = a, u_2 = k_1 x_2 + \dots + k_{n-1} x_n.$$

当 $\|\bar{x}(t)\| \leq h\varepsilon$ 时, 记此时刻为 T_1 , 当 $t > T_1$ 时转下步.

步骤 2 若 $x_1(T_1) = 0$, 控制律取为

$$u_1 = 0, u_2 = 0.$$

若 $x_1(T_1) \neq 0$, 任取 $k > 0$, 取引理 2 中的 $\bar{d} = 1/h - 1$, 取两实数 $\lambda \operatorname{sgn}(x_1(T_1)) = \bar{\lambda}, \delta \operatorname{sgn}(x_1(T_1)) = \bar{\delta}$ 满足 $(n-2)\bar{\delta}/\bar{\lambda} \leq 2(1/h - 1) + (1/h - 1)^2 = 1/h^2 - 1$ (引理 2 的假设条件), 这里 $\lambda > 0, \delta > 0$ 为任给正数, 满足引理 2 结论的实数记为 $\bar{k}_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$. 控制律取为

$$u_1 = -kx_1, u_2 = u_1(\bar{k}_1 x_2 + \dots + \bar{k}_{n-1} x_n),$$

则闭环系统满足

1) $x_1(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$; 且存在有限时间 $T > 0$, 当 $t \geq T$ 时, $\|\bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$.

2) 若 $\|\bar{x}(0)\| \leq M$, 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq (1 + \varepsilon_1)M, \forall t \geq 0$.

证 由引理 1 和引理 2 以及 Lyapunov 稳定性理论可以证明, 篇幅所限, 这里略去.

下面对上述定理加以说明, 在步骤 1 中, 对于给定的 λ_1, δ_1 和 ε_1 , 只有一个是独立的, 比如任意选定 λ_1 , 则 δ_1 只能选满足条件 $(n-2)\delta/\lambda \leq 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2$. 一般来说 δ_1 绝对值较小, 因此, 由引理 1 可知条件 $\|\bar{x}(t)\| \leq h\varepsilon$ 得以满足的时间就取决于 λ_1 绝对值的大小, 绝对值越大则满足此条件所需的时间越短, 当然, 控制增益 k_i 也越大. 另外, h 也影响此达到该条件所需的时间, 一般来说, h 越大则所需时间越短, 反之亦然. 对步骤 2 中的正数 k , 其值越大则 x_1 收敛的速度越快.

4 仿真(Simulation)

考虑本文第 2 部分提出的平面移动机器人系统经过坐标变换和输入变换后得到的 3 阶链式系统 (3). 任给正数 $\varepsilon, \varepsilon_1, h, m, k, a, \lambda$ 及负数 λ_1 ; 取满足定理条件的

$$\delta = \lambda(1/h^2 - 1), \delta_1 = \lambda_1(2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2).$$

控制律的设计步骤为:

步骤 1 首先计算出

$$k_1 = \lambda_1(2 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2),$$

$$k_2 = -\lambda_1^2(1 + \varepsilon_1)^2/a.$$

控制律为

$$u_1 = a, u_2 = k_1 x_2 + k_2 x_3.$$

当 $\sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq h\varepsilon$ 时, 记此时刻为 T_1 , 转下步.

步骤 2 取

$$\bar{k}_1 = \frac{\lambda}{h^2} \operatorname{sgn}(x_1(T_1)),$$

$$\bar{k}_2 = -\frac{\lambda^2}{a^2} \left(\frac{1}{h^2} - 1 \right).$$

控制律为

$$u_1 = -kx_1, u_2 = u_1(\bar{k}_1 x_2 + \bar{k}_2 x_3).$$

下面图 1~3 给出了一组参数下的仿真结果.

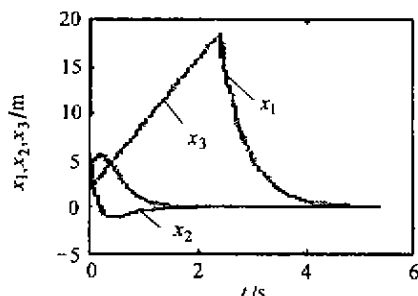


图 1 状态 x_1, x_2, x_3 随时间的响应曲线

Fig. 1 Responses of states x_1, x_2, x_3

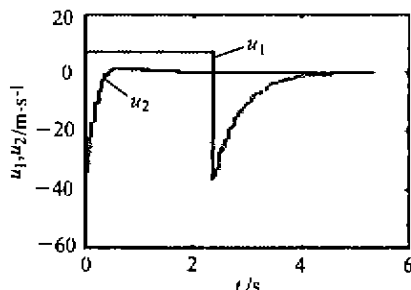


图 2 速度 u_1 和 u_2 随时间的响应曲线

Fig. 2 Responses of u_1, u_2

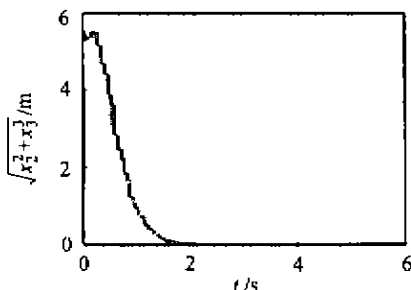


图 3 $\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ 随时间的响应曲线

Fig. 3 The response of $\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$

(下转第 278 页)

- 1999, 16(1):71-75 (in Chinese)
- [5] Michael W and Walker. Adaptive control of space-based robot manipulators [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1992, 7(6):828-835
- [6] Ma Baoli and Huo Wei. Adaptive control of space robot system [J]. Control Theory and Applications, 1996, 13(2):191-197 (in Chinese)
- [7] Slotin J E and Li W P. On the adaptive control of robot manipulators [J]. Journal of the Robotics Research, 1987, 6(3):49-59

本文作者简介

陈 力 1961 年生, 1984 年毕业于吉林大学数学力学专业, 1994

年 2 月获东北大学一般力学硕士学位, 1997 年 4 月获上海交通大学一般力学博士学位, 现为福州大学机械系机械电子工程硕士点责任教授, 中国自动化学会机器人专业委员会委员, 主要研究方向: 多体系统动力学, 空间机器人动力学与控制, 并在国内外核心期刊及学术会议上发表论文 40 余篇. Email: chnle@pub5.fz.fj.cn

刘廷柱 1936 年生, 1959 年毕业于清华大学, 1960 至 1962 年于莫斯科大学进修, 1962 至 1973 年任教于清华大学, 现任上海交通大学教授, 博士生导师, 工程力学研究所所长, 国务院学位委员会力学评议组成员等职, 主要研究领域: 陀螺力学, 多体动力学, 航天器姿态动力学和运动生物力学, 主持完成了多项国家自然科学基金及博士点基金项目的工作, 出版多部学术专著, 并在国内外核心期刊及学术会议上发表论文 150 余篇.

(上接第 273 页)

5 结论(Conclusion)

本文对于状态受限的单链式系统给出了一种两步实际镇定控制律, 使得闭环系统的状态在有限时间内收敛到原点的任意小邻域中, 且若系统初值小于任意正数 M , 那么除了一个收敛到零的状态变量外, 其余状态变量在整个实际镇定过程中均小于正数 $(\varepsilon_1 + 1)M$, 其中 ε_1 可事先任意小. 这种方法有望推广到多链式系统和相应的动力学系统中.

参考文献(References)

- [1] Kolmanovsky H Y and McClamroch N H. Development in nonholonomic control problems [J]. IEEE Control systems, 1995, 25(7):20-36
- [2] Campion G. Controllability and state feedback stabilizability nonholonomic mechanical systems [A] de Wit C Canudas, ed. Advanced Robot Control [M]. LNCIS 162, Springer, 1991:106-124
- [3] Dong Wenjie and Huo Wei. Tracking control of wheeled mobile robots with unknown dynamics [A]. Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation [C], Detroit, Michigan, 1999: 2645-2650
- [4] Nobuhide SUDA. Matrix Theory in Automatic Control [M]. Beijing: Science Press, 1979

本文作者简介

王朝立 1986 年获兰州大学应用数学专业学士学位, 1992 年获兰州大学应用数学专业硕士学位, 1999 年 3 月获北京航空航天大学控制理论及应用专业博士学位, 同年进入中国科学院机器人学开放研究实验室做博士后工作至今, 研究方向: 非线性控制, 鲁棒控制, 非完整系统控制, 多机器人系统控制. Email: chaoz@ms.sia.ac.cn

谈大龙 1941 年生, 研究员, 开放实验室学术委员会主席, 博士生导师, 研究领域: 机器人学, 智能控制.

王越超 1963 年生, 教授, 室主任, 研究领域包括: 机器人动力学与控制, 智能控制, 多机器人控制等.