

文章编号: 1000-8152(2002)02-0287-03

## 基于 T-S 模型的非线性系统的最终滑动模态控制\*

吴忠强 许世范 岳 东

(中国矿业大学信电学院 CIMS 研究中心·江苏徐州, 221008)

**摘要:** 采用 T-S 模糊动态模型逼近非线性系统, 将非线性系统模糊化为局部线性模型. 用 Lyapunov 稳定性理论设计出确保 T-S 模型全局渐近稳定的变结构控制器. 采用单位向量控制形式的最终滑动模态控制器, 对满足匹配条件和不符合匹配条件的不确定性均适用. 以倒立摆为模型的仿真实验, 验证了方案的有效性.

**关键词:** 非线性; T-S 模型; 滑动模态控制

**文献标识码:** A

### The Terminal Sliding Mode Control for Nonlinear System Based on T-S Model

WU Zhongqiang, XU Shifan and YUE Dong

(Center of CIMS, College of Information and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology · Jiangsu Xuzhou, 221008, P. R. China)

**Abstract:** Using T-S model as an approximation for nonlinear system, the nonlinear system has been fuzzy into local linear model. The variable structure controller that is designed by using Lyapunov theory insures the stability of system. The terminal sliding mode controller is designed by using unit vector style, and it suits the uncertain elements whether it satisfies the matching condition or not. The effect of the scheme has been tested by a simulation of an inverted pendulum.

**Key words:** nonlinear; T-S model; sliding model control

#### 1 引言 (Introduction)

非线性控制系统是当今最活跃的一个研究领域. 但仍缺少系统的和有效的处理方法. 模糊控制技术具有控制器设计简便, 适用于许多非线性系统和鲁棒性强等特点, 80 年代以来在控制理论和工程实践方面获得了很大的发展. 但缺乏严格的稳定性证明. Takagi 和 Sugeno<sup>[1]</sup>提出了著名的 T-S 模糊系统模型为解决非线性系统控制问题提供了新途径. 而且可得到严格的稳定性证明. T-S 模糊模型的前件为模糊的, 后件为确定的线性方程. 它将线性系统理论与模糊理论相结合来解决非线性系统问题. 首先把一个整体非线性系统看成是多个局部线性模型的模糊逼近. 把整个非线性系统的控制看作是多个局部线性系统控制的模糊逼近<sup>[2,3]</sup>. 本文对全局 T-S 模糊模型进一步研究, 将其转化成不确定系统的形式. 采用变结构控制器确保模型稳定. 适用于满足匹配条件和不符合匹配条件的不确定性. 控制器设计简单, 鲁棒性强, 应用于一级倒立摆系统中, 仿真实验验证了控制器的有效性.

#### 2 T-S 模糊模型的建立 (Construction of T-S fuzzy model)

一般的非线性系统可用如下的状态空间模型描述

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \omega(t)). \quad (1)$$

其中  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  是状态变量,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  是输入变量,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$  是扰动变量, 且满足  $\omega(t) \in L_2(0, \infty)$ .  $f(t)$  是非线性函数.

众所周知, 非线性系统不可能表示成全局线性系统, 然而, 它通常可能表示成一系列的局部线性系统叠加. 上述非线性系统可用如下的 T-S 模型来描述.

$$R_p^i: \text{if } x_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_n^i,$$

$$\text{then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + H_i \omega(t).$$

(2)

式中  $i = 1, 2, \dots, l$ ,  $M_j^i (j = 1, \dots, n)$  是模糊集合,  $l$  是规则个数.  $(A_i, B_i, H_i)$  是第  $i$  个子系统相应维数的矩阵.  $R_p^i$  表示模糊系统的第  $i$  条规则.

若设  $\mu_j^i(x)$  表示  $x$  属于  $M_j^i$  的隶属度函数, 直积运算采用求积法, 则

\* 基金项目: 高等学校骨干教师资助计划项目, 国家自然科学基金(69874042)资助项目.

收稿日期: 2000-04-30; 收修改稿日期: 2001-01-16.

$$\mu^i(x) = \prod_{j=1}^n \mu_j^i(x). \quad (3)$$

$\mu^i(x)$  表示  $x$  属于  $M^i$  的隶属度函数,同时它也表示第  $i$  条规则的适用度.  $M^i$  表示  $M_1^i, M_2^i, \dots, M_n^i$  的直积模糊集合.

若模糊化采用单点模糊集合,清晰化采用加权平均法,则可得全局系统状态方程为:

$$\dot{x}(t) = \left( \sum_{i=1}^l h_i(x) A_i \right) x(t) + \left( \sum_{i=1}^l h_i(x) B_i \right) u(t) + \left( \sum_{i=1}^l h_i(x) H_i \right) \omega(t), \quad (4)$$

$h_i(x) = \mu^i(x) / \sum_{j=1}^l \mu^j(x)$ , 因  $\mu^i(x) \geq 0, \sum_{j=1}^l \mu^j(x) > 0$  所以  $0 \leq h_i(x) \leq 1$  且  $\sum_{i=1}^l h_i(x) = 1$ .

为后面的控制器设计,将系统表示成不确定形式.我们将任一权值用其他剩余权值表示.

$$h_j(x) = 1 - \sum_{i=1(i \neq j)}^l h_i(x). \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (h_j(x) A_j + \sum_{i=1(i \neq j)}^l h_i(x) A_i) x(t) + (h_j(x) B_j + \\ & \sum_{i=1(i \neq j)}^l h_i(x) B_i) u(t) + \left( \sum_{i=1}^l h_i(x) H_i \right) \omega(t) = \\ & (A_j + \sum_{i=1(i \neq j)}^l h_i(x) (A_i - A_j)) x(t) + (B_j + \\ & \sum_{i=1(i \neq j)}^l h_i(x) (B_i - B_j)) u(t) + \left( \sum_{i=1}^l h_i(x) H_i \right) \omega(t). \end{aligned} \quad (6)$$

让

$$\begin{aligned} \Delta A &= \sum_{i=1(i \neq j)}^l h_i(x) (A_i - A_j), \\ \Delta B &= \sum_{i=1(i \neq j)}^l h_i(x) (B_i - B_j), \quad H = \sum_{i=1}^l h_i(x) H_i, \end{aligned}$$

则有

$$\dot{x} = (A_j + \Delta A) x + (B_j + \Delta B) u + H \omega. \quad (7)$$

### 3 最终滑动模态控制器设计(The design of terminal sliding mode controller)

对上述动态系统,我们给出如下假定:

- 1)  $(A_j, B_j)$  为可控对;
- 2)  $\Delta A, \Delta B$  各元素均有界,  $\|\omega\| < k_\omega$ .

控制器结构为:

$$u(x) = u_l(x) + u_n(x) = Lx + \rho(t) \frac{Nx}{\|Mx\|}. \quad (8)$$

线性控制  $u_l(x) = Lx$  为状态反馈控制律,目的在于改变控制对象的动力学特性,使之能以良好的动态品质趋于最终滑动模态;非线性控制  $u_n(x) = \rho(t) \cdot \frac{Nx}{\|Mx\|}$ , 克服未知参数摄动及外干扰,促使变结构系统于有限时刻进入最终滑动模态,形成滑动运动. 要求  $\ker M = \ker N$ .

设最终滑动模态为

$$S_0 = \{x \mid Cx = 0\}. \quad (9)$$

$C$  由下面确定.(7)式经非奇异线性变换  $\bar{x} = T_1 x$ , 变换为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1' \\ \dot{\bar{x}}_2' \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \bar{A}_{j11} \bar{A}_{j12} \\ \bar{A}_{j21} \bar{A}_{j22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \bar{A}_{11} \Delta \bar{A}_{12} \\ \Delta \bar{A}_{21} \Delta \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \\ & \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{j2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \bar{B}_2 \end{bmatrix} \right) u + \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix} \omega. \end{aligned} \quad (10)$$

切换函数:  $S = CT_1^{-1} \bar{x} = [\bar{C}_1 \bar{C}_2] \bar{x} = 0, \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m, \bar{B}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  和  $\bar{C}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  非奇异.  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  可由式(10)按极点配置法确定<sup>[5]</sup>, 则  $C$  即被确定.

对式(10)再作非奇异线性变换:

$$\begin{aligned} z &= T_2 \bar{x} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ \bar{C}_2^{-1} \bar{C}_1 & I_m \end{bmatrix} \bar{x}, \\ T_2^{-1} &= \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ -\bar{C}_2^{-1} \bar{C}_1 & I_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A_{j11} A_{j12} \\ A_{j21} A_{j22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{11} \Delta A_{12} \\ \Delta A_{21} \Delta A_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \\ & \left( \begin{bmatrix} 0 \\ B_{j2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B_2 \end{bmatrix} \right) u + \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{bmatrix} \omega. \end{aligned} \quad (11)$$

切换函数为:  $S = C_2 z_2 = 0$ , 这里  $z_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, z_2 \in \mathbb{R}^m, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  和  $C_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  非奇异, 且有  $C_2 = \bar{C}_2$  成立.

那么,最终滑动模态等效为

$$S_0 = \ker C_2 = \{z \mid C_2 z_2 = 0\}. \quad (12)$$

由式(11)可见,  $z_2(t) \rightarrow 0$  的过程描述了系统状态进入最终滑动模态的过程,当  $z_2(t) = 0$  时,  $z_1(t)$  则描述了变结构系统进入最终滑动模态后的滑动运动. 所以,变结构控制律的设计针对下式进行.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \left( \begin{bmatrix} A_{j21} A_{j22} \\ \Delta A_{21} \Delta A_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \\ & (B_{j2} + \Delta B_2) u + \bar{H}_2 \omega. \end{aligned} \quad (13)$$

式(8)控制器相应变为:

$$u(z) = u_l(z) + u_n(z). \quad (14)$$

(13)式的标称方程为

$$\dot{z}_2 = [A_{j21} A_{j22}] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + B_{j2} u. \quad (15)$$

为了保证系统状态能以较好的动态品质趋于最终滑动模态  $S_0$ , 即  $z_2 \rightarrow 0$ , 线性控制律取为

$$u_l(z) = -B_{j2}^{-1} [A_{j21} \quad A_{j22} - A_{j22}^*] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其中  $A_{j22}^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$  为设计的 Hurwitz 矩阵. 将(16)式代入(15)式得  $\dot{z}_2 = A_{j22}^* z_2$ , 所以有  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$ .

那么

$$u_l(x) = -B_{j2}^{-1} [A_{j21} \quad A_{j22} - A_{j22}^*] T_2 T_1 x. \quad (17)$$

因  $A_{j22}^*$  为 Hurwitz 矩阵, 则必存在正定矩阵  $P, Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 满足 Lyapunov 方程:

$$P A_{j22}^* + (A_{j22}^*)^T P = -Q.$$

选取  $M' = P, N' = -B_{j2}^{-1} P$ , 显然, 矩阵  $M', N'$  满足  $\ker M' = \ker N'$ . 考虑到式(13)存在参数不确定性, 非线性控制律取为:

$$u_n(z) = \rho(t) \frac{N' z_2}{\|M' z_2\|}. \quad (18)$$

$\rho(t) > 0$  为设计参数. 将式(14), (16), (18)代入(13)式可得:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= A_{j22}^* z_2 - \rho(t) \frac{P z_2}{\|P z_2\|} + \eta + \\ &\Delta B_2 (u_l - \rho(t) \frac{B_{j2}^{-1} P z_2}{\|P z_2\|}) + \bar{H}_2 \omega. \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\eta = [\Delta A_{21} \Delta A_{22}] z$ .

选取 Lyapunov 函数为  $V = \frac{1}{2} z_2^T P z_2$ , 由假设可知:

$$\begin{aligned} \|\eta\| &\leq k'_a \|z\| \leq k_a \|x\|, \quad \|u_l\| \leq k_u \|x\|, \\ \|\Delta B_2\| &\leq k_b, \quad \|\bar{H}_2\| \leq k_b, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho(t) \|P z_2\| + \|P z_2\| (k'_a \|z\| + \\ &k_b \|u_l\| + \rho(t) k_b \|B_{j2}^{-1}\| + k_h k_\omega). \end{aligned} \quad (20)$$

为保证  $\dot{V} < 0$ , 则应有下式成立:

$$\begin{aligned} \rho(t) &> \\ &(1 - k_b \|B_{j2}^{-1}\|)^{-1} (k'_a \|z\| + k_b \|u_l\| + k_h k_\omega). \end{aligned} \quad (21)$$

在变结构控制系统中, 保证最终滑动模态(9)式唯一存在须有下述条件成立<sup>[6]</sup>:

$$k_b \|B_{j2}^{-1}\| = \delta < 1. \quad (22)$$

所以, 非线性控制律为

$$u_n(x) = \rho(t) \frac{N x}{\|M x\|}. \quad (23)$$

其中

$$N = -B_{j2}^{-1} [0 \quad P] T_2 T_1,$$

$$M = [0 \quad P] T_2 T_1,$$

$$\rho(t) = (1 - \delta)^{-1} [(k_a + k_b k_u) \|x\| + k_h k_\omega] + \epsilon,$$

$\epsilon > 0$  为任意小正数.

#### 4 仿真研究(Simulation study)

为了说明所得算法的有效性, 我们考虑一个位于小车上的倒立摆的稳定问题. 许多非线性系统如火箭、导弹、机器人关节等均可抽象为这种系统. 控制器的设计使用的是 T-S 模型, 并对原始模型进行仿真实验.

倒立摆非线性动力学模型为:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - a m l x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a u \cos x_1}{4l/3 - a m l \cos^2 x_1}.$$

式中  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度,  $a = 1/(M + m)$ ,  $M = 1 \text{ kg}$  为小车重量,  $m = 0.2 \text{ kg}$  为摆杆重量,  $l = 0.3 \text{ m}$  摆杆的长度,  $x_1, x_2$  分别为摆杆与垂直方向的夹角和摆杆的角速度.  $u$  为作用在小车上的力(单位为 N).

此系统可表示为如下 T-S 模型:

$$R^1: \text{ if } x_1 \text{ is about } 0, \text{ then } \dot{x} = A_1 x + b_1 u.$$

$$R^2: \text{ if } x_1 \text{ is about } \pm \pi/2, \text{ then } \dot{x} = A_2 x + b_2 u.$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - a m l} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.296 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - a m l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - a m l b^2)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.365 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a b}{4l/3 - a m l b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0349 \end{bmatrix}.$$

$b = \cos 88^\circ$  注意到  $x_1 = \pm \pi/2$  时系统不可控.

$$\mu_1(x_1) = \frac{1 - 1/(1 + \exp(-7(x_1 - \pi/4)))}{1 + \exp(-7(x_1 + \pi/4))},$$

$$\mu_2(x_1) = 1 - \mu_1(x_1).$$

全局模型为

$$\dot{x} = (h_1 A_1 + h_2 A_2)x + (h_1 b_1 + h_2 b_2)u.$$

其中  $h_i = \mu_i, i = 1, 2$ .

因  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , 上式可写成

$$\dot{x} = (A_1 + h_2(A_2 - A_1))x + (b_1 + h_2(b_2 - b_1))u.$$

根据本文的控制器设计过程得:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = 0.5, u_l = 103.74x_1 + 11.34x_2,$$

$$u_n(x) = 5.67\rho(t)\text{sgn}(0.5x_1 + 0.5x_2),$$

$\delta = 0.803 < 1$ , 上界选为

$$\rho(t) = 5.08(8|x_1 + x_2| + 0.1416|103.7x_1 + 11.34x_2|) + 0.1.$$

初始条件  $x_0$  分别为  $(50^\circ, 0), (70^\circ, 0), (80^\circ, 0)$ . 仿真结果如图 1 所示.

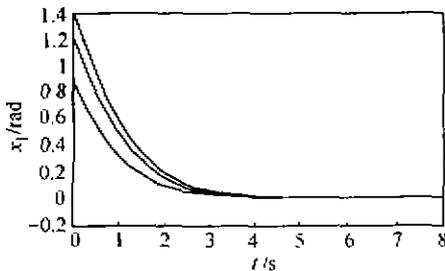


图 1 系统响应曲线

Fig. 1 The curve of system respond

## 5 结论(Conclusion)

研究了非线性系统基于 T-S 模型的变结构控制

(上接第 281 页)

而不是优化方法所造成的. 图 6 为  $r = 4.0$  时的控制器输出曲线, 可以看到控制器的稳态输出不为零, 这相当于系统存在定值的外扰, “位置型”模糊控制器在这种情况下总要有一定的稳态误差.

## 5 结论(Conclusion)

通过上面两例模糊控制器的优化, 证明此优化方法是有效的, 并且优化的结果对不同的给定同样适用, 都达到了满意的控制效果.

在实际的控制问题中, 往往对控制量、偏差变化的范围等有明确要求, 采用上述优化方法就更加方便.

### 参考文献(References)

[1] Long Shengzhao and Wang Peizhuang. Self-tuning of the fuzzy con-

问题. 将变结构和模糊控制相结合, 用模糊语言描述系统, 用变结构确保系统稳定性, 充分发挥了两者的优点. 控制器结构简单, 规则少. 并为一级倒立摆仿真实验所验证.

### 参考文献(References)

- [1] Takagi T and Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control [J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 1985, 15(1): 116-132
- [2] Tanaka T and Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156
- [3] Tanaka K and Sano M. Fuzzy stability criterion of a class of nonlinear systems [J]. Information Science, 1993, 70(1): 3-26
- [4] Gao W B. The Theoretical Basis About Variable Structure Control [M]. Beijing: Science Publication of China, 1990 (in Chinese)
- [5] Tian H Q. The Sliding Mode Control Theory and Application [M]. Wuhan: Wuhan Publication, 1995 (in Chinese)
- [6] Utkin V I. Variable structure systems with sliding models [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1977, 22(20): 212-222

### 本文作者简介

- 吴忠强 1966 年生, 燕山大学副教授, 中国矿业大学博士研究生. 研究方向: 模糊控制, 自适应控制及应用. 发表论文 40 余篇. Email: wuzhq@88mail. ysu. edu. cn
- 许世范 1931 年生, 中国矿业大学教授, 博士生导师. 研究方向: 自适应控制, 模糊神经网络控制, CIMS.
- 岳东 1964 年生, 中国矿业大学教授. 研究方向: 分布参数系统, 广义系统, 时滞系统, 随机系统的鲁棒控制和变结构控制.

trol rules [J]. Fuzzy Mathematics, 1982, 3(1): 45-53

- [2] Athalye A, Edwards D, Manoranjan V S, et al. On designing a fuzzy control system using an optimization algorithm [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 56(1): 32-39
- [3] Leang T P. An optimization design method of fuzzy logic controller [J]. Control Theory and Applications, 1995, 12(4): 491-497
- [4] Kang H and Vachtsevanos G J. Nonlinear fuzzy control based on the vector fields of the phase portrait assignment algorithm [A]. Proc. 28th American Control Conf. [C], Baltimore, 1990, 368-376
- [5] Kandel K. Fuzzy Mathematical Techniques with Applications [M]. Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co., 1986

### 本文作者简介

李家炜 1971 年生, 硕士, 博士毕业于哈尔滨工程大学. 现在哈尔滨工业大学做博士后研究. 研究领域为机器人仿人灵巧手协调控制、模糊控制等. Email: jwli@robotst. hit. edu. cn