

文章编号: 1000-8152(2002)02-0291-06

有限时间 H_∞ 控制系统设计的精细积分方法*

吴志刚 钟万勰

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室·大连, 116023)

摘要: 按照结构力学与最优控制的模拟理论, H_∞ 状态反馈控制系统的最优 H_∞ 范数 γ_{op} 可以通过求广义 Rayleigh 商的最小本征值得到. 利用精细积分法和扩展的 Wittrick-Williams(W-W)方法, 可以求解有限时间 H_∞ 状态反馈控制的 Riccati 微分方程, 并确定其最优 H_∞ 范数 γ_{op} , 实现控制系统的设计. 在此基础上, 闭环 H_∞ 控制系统状态方程的解也可以由精细积分法计算, 虽然对于有限时间 H_∞ 状态反馈控制来讲, 这是一个变系数线性微分方程组. 从而实现了 H_∞ 状态反馈控制系统初值响应的仿真, 可为评价系统性能指标提供参考.

关键词: H_∞ 控制; 精细积分; Riccati 方程; 广义 Rayleigh 商

文献标识码: A

The Precise Integation Method for Finite Horizon H_∞ Control System Synthesis

WU Zhigang and ZHONG Wanxie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology · Dalian, 116023, P. R. China)

Abstract: Based on the analogy between structural mechanics and optimal control, the optimal H_∞ norm γ_{op} of H_∞ state feedback control system can be obtained through the computation of fundamental eigenvalue of a generalized Rayleigh quotient. To synthesise finite horizon H_∞ state feedback control system, the precise integration method is utilized to solve the Riccati differential equation and to compute the corresponding optimal H_∞ norm combined with the extended Wittrick-Williams (W-W) algorithm. The state equation of closed loop system is also solved by the precise integration method, although it is time varying. Therefore the simulation of response of H_∞ state feedback control system under the initial value disturbance can be accomplished by the precise integration method also, which is helpful for the design of control system and the evaluation of system performance.

Key words: H_∞ control; precise integration; Riccati equation; generalized Rayleigh quotient

1 引言(Introduction)

H_∞ 状态反馈控制是 H_∞ 控制的基本问题, 对此问题的理论研究已经趋于成熟^[1-4], 而且也有相应的计算机辅助设计软件^[4]. 但对于有限时间 H_∞ 控制系统的设计与仿真问题, 却比较难以处理, 因为系统设计需要确定最优 H_∞ 范数 γ_{op} , 判断 Riccati 微分方程正定解的存在性, 而且控制系统的仿真还需要求解时变线性微分方程组. 结构力学与最优控制间的模拟理论为研究和解决这一问题提供了一个新的途径^[5-9]. 本文首先介绍了求解 Riccati 微分方程、计算系统最优 H_∞ 范数 γ_{op} 的方法, 并在此基础上介绍了求解闭环系统状态方程的精细积分法.

考虑下述线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

$$z = \begin{bmatrix} Cx \\ Du \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

其中 x 为 n 维状态向量, w 为 l 维外扰向量, u 为 m 维控制向量, z 为 p 维输出向量, $p \geq m$, 矩阵 A, B_1, B_2, C 和 D 有恰当的维数, $D^T D = I, I$ 为单位阵. 而且矩阵对 (A, B_2) 和 (A, C) 分别是可控和可观的. 设计目标是寻找状态的线性反馈控制

$$u = Kx, \quad (1.3)$$

使闭环系统从外扰 w 到输出 z 的传递函数矩阵 G_{zw} 的 H_∞ 范数满足

$$\|G_{zw}\|_{[0, T]} < \gamma, \quad (1.4)$$

满足上述条件的最小 γ 值就称为系统的最优 H_∞ 范数 γ_{op} . 引入拉格朗日乘子 λ , 利用变分法可得

* 基金项目: 博士后基金资助项目

收稿日期: 1999-11-25; 收修改稿日期: 2000-12-20.

$$u = -B_2^T \lambda, w = \gamma^{-2} B_1^T \lambda$$

及对偶方程组

$$\dot{x} = Ax - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda, x(0) = x_0, \quad (1.5a)$$

$$\dot{\lambda} = -C^T C x - A^T \lambda, \lambda_T = S_f x(T) = S_f x_T. \quad (1.5b)$$

由上述两端边值问题可以导出 Riccati 微分方程

$$\begin{cases} -\dot{S} = A^T S + SA + C^T C - S(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) S, \\ S(T) = S_f, \end{cases} \quad (1.6)$$

而闭环系统的状态方程则可以表示为

$$\dot{x} = (A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) S) x. \quad (1.7)$$

通过求解这一具有时变项 S 的线性微分方程,即可得到系统状态的变化规律.

由变分原理

$$\delta \left\{ \int_0^T [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt - \frac{1}{2} x_T^T S x_T \right\} = 0. \quad (1.8)$$

其中

$$\begin{aligned} H(x, \lambda) = \\ \lambda^T A x + \frac{1}{2} x^T C^T C x - \frac{1}{2} \lambda^T (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda, \end{aligned} \quad (1.9)$$

可以导出对偶方程(1.5a, b),这两者是等价的,将变分式(1.8)中的参数 γ^{-2} 分离出来后^[7,9],变分原理表示为如下形式

$$\gamma^{-2} = \min_{\lambda} \max_x \frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \quad (1.10)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \int_0^T (\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x - \frac{1}{2} x^T C^T C x + \\ \frac{1}{2} \lambda^T B_2 B_2^T \lambda) dt - \frac{1}{2} x_T^T S_f x_T, \end{aligned} \quad (1.11a)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda^T B_1 B_1^T \lambda) dt. \quad (1.11b)$$

(1.10)是广义 Rayleigh 商本征值的形式,此式建立了 H_∞ 范数与广义 Rayleigh 商本征值的联系.广义 Rayleigh 商最小本征值就是使 Riccati 微分方程正定解存在的临界参数 γ_{op}^{-2} ,其中 γ_{op} 是闭环系统的最优 H_∞ 范数.根据结构力学与最优控制的模拟理论,扩展的 W-W 算法^[9]结合 Riccati 方程的精细积分可以计算最优 H_∞ 范数,方程(1.7)的精细积分解也可同时得到.这样就可完成 H_∞ 状态反馈控制系统设计的同时,实现闭环系统初值响应的精细积分算法仿真.

下面将从区段混合能概念出发,介绍求解 Riccati 微分方程、计算最优 H_∞ 范数、并进行系统仿真的精细积分方法.

2 区段混合能及区段合并 (Interval mixed energy and interval combination)

2.1 区段混合能 (Interval mixed energy)

根据变分原理(1.8)的形式,可以对图 1 中区段 (t_a, t_b) 定义下列形式的区段混合能^[6]

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_b - \int_{t_a}^{t_b} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt. \quad (2.1)$$

其中 $0 \leq t_a \leq t_b \leq T$, x, λ 满足微分方程(1.5a)(1.5b),若给定两端条件 $x(t_a) = x_a, \lambda(t_b) = \lambda_b$,即可确定区段内的 x, λ .由混合能的定义可知, $V(x_a, \lambda_b)$ 可以表达成 x_a 与 λ_b 的二次式

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T E x_a + \frac{1}{2} x_a^T G x_a - \frac{1}{2} \lambda_b^T G \lambda_b. \quad (2.2)$$

其中 E, G, F 为 $n \times n$ 阶的区段混合能矩阵,而且 $E^T = E, G^T = G$,这三个只和系统矩阵有关的矩阵决定了此二次式.事实上,对定常系统,令 $\tau = t_b - t_a$,矩阵 E, G, F 与系统矩阵 A, B_1, B_2, C 和 D 之间的关系可以用下面的微分方程表达^[7].

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} = C^T C + A^T E + EA - E(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) E = \\ F^T C^T C F, \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} = F(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) F^T = \\ (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) + AG + GA^T - GC^T C G, \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\tau} = F(A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) E) = \\ (A - GC^T C) F. \end{aligned} \quad (2.3c)$$

当 $t_b \rightarrow t_a$ 时

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I. \quad (2.4)$$

这是微分方程(2.3a), (2.3b), (2.3c)的初值条件,其中 I 是单位矩阵.

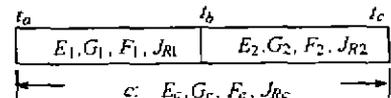


图 1 区段合并

Fig. 1 Interval combination

2.2 区段合并及本征值计数 (Interval combination and eigenvalue count)

区段混合能矩阵 E, G, F 的微分方程(2.3a),

(2.3b), (2.3c) 的数值求解用常规差分方法一般比较困难, 因为方程中有参数 γ^{-2} 的影响, 还需判断正定解的存在性. 但是, 根据结构力学与最优控制的模拟理论, 相邻区段合并后的新区段混合能矩阵可以通过区段合并消元得到, 递推进行, 可以得到整个区间内不同长度区段的混合能矩阵. 这些矩阵就是微分方程在相应时刻的数值解^[8].

图 1 所示相邻的两个区段 (t_a, t_b) 及 (t_b, t_c) 可以通过对 x_b, λ_b 的消元合并成区段 (t_a, t_c) , 其相应的混合能矩阵 E_c, G_c, F_c 可以由原来两个区段的混合能矩阵按下述区段合并消元公式表示

$$E_c = E_1 + F_1^T(E_2^{-1} + G_1)^{-1}F_1, \quad (2.5a)$$

$$G_c = G_2 + F_2(G_1^{-1} + E_2)^{-1}F_2^T, \quad (2.5b)$$

$$F_c = F_2(I + G_1E_2)^{-1}F_1. \quad (2.5c)$$

与 LQ 控制问题不同, H_∞ 控制问题需要首先确定最优 H_∞ 范数 γ_{op} , 所以一个区段除了用矩阵 E, G, F 来表示其两端特性外, 还应当用本征值表达其内部特性. 区段的 Rayleigh 商本征值按 (1.10) 式定义, 所不同的是那里的区段是整个区间. 根据区段合并的特点, 应当用区段的本征值计数来表达这一特性. 这样就可以根据扩展的 W-W 算法确定区段合并后的本征值计数, 进而得到整个区间的本征值计数. 而这个计数正好可以用来结合二分法计算最小本征值. 所谓本征值计数是指: 对于给定值 $\gamma_{\#}^{-2}$, 区段在其两端分别给定 $x_a = 0, \lambda_b = 0$ 的条件下, 区段内部本征值小于 $\gamma_{\#}^{-2}$ 的数目, 用 $J_R(\gamma_{\#}^{-2})$ 来表示这一计数. 因为 J_R 是 t_a, t_b 的函数, 所以应写成 $J_R(\gamma_{\#}^{-2}, t_a, t_b)$. 为简单起见, 区段 1 小于 $\gamma_{\#}^{-2}$ 的本征值个数仅用 $J_{R1}(\gamma_{\#}^{-2})$ 来表示, 其余 J_{Rc}, J_{R2} 的意义类同. 区段合并后的本征值计数为^[7]

$$J_{RC}(\gamma_{\#}^{-2}) = J_{R1}(\gamma_{\#}^{-2}) + J_{R2}(\gamma_{\#}^{-2}) - s\{E_2\} + s\{E_2^{-1} + G_1\}. \quad (2.6)$$

式中的 $s\{M\}$ 表示将矩阵 M 三角分解为 $M = LDL^T$ 后, D 阵对角线元素小于 0 的个数. 当 $t_b \rightarrow t_a$ 时, 对于给定的有限值 $\gamma_{\#}^{-2}$, 显然有 $J_R(\gamma_{\#}^{-2}) = 0$.

3 Riccati 方程的精细积分 (Precise integration for Riccati equation)

很明显, 将方程 (2.3a) 时间逆向就是 Riccati 方程 (1.6), 唯一的差别是边界条件. 求此方程数值解并计算 γ_{op}^{-2} 需通过区段合并公式 (2.5) 和本征值计数公式 (2.6) 来进行. 首先选择一个参数 $\gamma_{\#}^{-2}$, 并设定步长 η 及需进行计算的时间点

$$\begin{cases} t_0 = 0, t_1 = \eta, t_2 = 2\eta, \dots, \\ t_k = k\eta, \dots, t_f = k_f\eta = T. \end{cases} \quad (3.1)$$

求 Riccati 方程在这些时间点的数值解, 就是求长度分别为 $\eta, 2\eta, \dots, k\eta, \dots$ 的区段的混合能矩阵. 同时还要计算各区段的本征值计数, 因为需要根据本征值计数来确定最优参数.

虽然步长 η 一般比较小, 但采用差分法逼近微分时, 效果不算太好, 因此按照精细积分法, 需在步长 η 的基础上, 进一步将 η 划分为 2^N 段, 一般选用 $N = 20$, 则 $2^N = 1048576$, 于是步长成为

$$\tau = \eta/2^N \approx \eta \cdot 10^{-6}. \quad (3.2)$$

此时对区段混合能矩阵作 Taylor 级数展开并保留到 τ^4

$$E(\tau) \approx e_1\tau + e_2\tau^2 + e_3\tau^3 + e_4\tau^4, \quad (3.3a)$$

$$G(\tau) \approx g_1\tau + g_2\tau^2 + g_3\tau^3 + g_4\tau^4, \quad (3.3b)$$

$$f(\tau) \approx I + f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4 = I + F'(\tau). \quad (3.3c)$$

这些式子与微分方程 (2.3) 的初始条件 (2.4) 是相容的. 将 (3.3a), (3.3b), (3.3c) 代入微分方程 (2.3a), (2.3b), (2.3c), 对比各幂次有

$$\begin{cases} e_1 = C^T C, \\ e_2 = (f_1^T e_1 + e_1 f_1)/2, \\ e_3 = (f_2^T e_1 + e_1 f_2 + f_1^T e_1 f_1)/3, \\ e_4 = (f_3^T e_1 + e_1 f_3 + f_2^T e_1 f_1 + f_1^T e_1 f_2)/4, \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$\begin{cases} g_1 = B_2 B_1^T - \gamma_{\#}^{-2} B_1 B_1^T, \\ g_2 = (A g_1 + g_1 A^T)/2, \\ g_3 = (A g_2 + g_2 A^T - g_1 e_1 g_1)/3, \\ g_4 = (A g_3 + g_3 A^T - g_1 e_1 g_1 - g_1 e_1 g_2)/4, \end{cases} \quad (3.4b)$$

$$\begin{cases} f_1 = A, \\ f_2 = (A f_1 - g_1 e_1)/2, \\ f_3 = (A f_2 - g_2 e_1 - g_1 e_1 f_1)/3, \\ f_4 = (A f_3 - g_3 e_1 - g_2 e_1 f_1 - g_1 e_1 f_2)/4. \end{cases} \quad (3.4c)$$

按 (3.3a), (3.3b), (3.3c) 计算时, 因区段非常短, 必然有该区段的本征值计数 $J_R = 0$, 至此已经得到了区段长为 τ 的混合能表达式和本征值计数. 可以用 2^N 算法计算长为 η 的区段的混合能矩阵. 为保持计算精度, 这一阶段的区段合并公式要用下列形式^[7]

$$E_c = E + (I + F')^T (E^{-1} + G)^{-1} (I + F'), \quad (3.5a)$$

$$G_c = G + (I + F') (G^{-1} + E)^{-1} (I + F')^T, \quad (3.5b)$$

$$F'_c = (F' - GE/2)(I + GE)^{-1} + (I +$$

$$GE)^{-1}(F' - GE/2) + F'(I + GE)^{-1}F'. \quad (3.5c)$$

这是精细积分法中的关键步骤之一。

计算出 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$ 后, 就可递推计算长度为 $2\eta, 3\eta, \dots, k\eta$ 区段的混合能矩阵. 设已计算了 $k\eta$ 长的区段, 以它为区段 2, 而 η 长的区段为区段 1, 由(2.5a), (2.5b), (2.5c)就可以算出 $(k+1)\eta$ 长区段的混合能矩阵 E, G, F 直至 $k_f\eta$. 但此时的 E 阵并不满足(1.6)的边界条件. 为此在 t_f 处设想有一集中区段, 该区段的混合能矩阵为 $E_2 = S_f, F_2 = I, G_2 = 0$, 以前面计算的任一区段作为区段 1 与之进行合并消元. 计算 $k\eta$ 处 Riccati 方程(1.6)的解时, 取区段 1 的长度为 $(k_f - k)\eta$, 按公式

$$S = E + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F = E + F^T(I + S_f G)^{-1}S_f F, \quad (3.6)$$

$$F_p = (I + GS_f)^{-1}F, \quad (3.7)$$

$$G_p = (G^{-1} + S_f)^{-1}, \quad (3.8)$$

进行合并, 即可得到 $k\eta$ 处 Riccati 方程(1.6)的解以及另外两个微分方程(2.3b), (2.3c)在初始条件变化后的解. 而本征值计数也要按下面的公式再执行一遍

$$J_{RS} = J_R - s\{S_f\} + s\{S_f^{-1} + G\}. \quad (3.9)$$

令 $\frac{d}{d\tau} = -\frac{d}{dt}$. 对(3.6)两边求导, 并利用恒等式

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}\dot{X}X^{-1}, \quad (3.10)$$

及 E, G, F 所满足的微分方程(2.3a), (2.3b), (2.3c)按[8]中的方法可以证明

$$\frac{dS}{dt} = -A^T S - SA - C^T C + S(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S. \quad (3.11)$$

这就是(1.6); 注意到当 $t = t_f$ 时, $E = G = 0, F = I$, 故由(3.6)知末端条件 $S(T) = S_f$ 也满足. 所以按(3.6)计算的 $S(t)$ 就是 Riccati 方程的解.

这样就可按照下面的顺序求解 Riccati 方程(1.6): 首先按初始条件(2.4)求解(2.3a), (2.3b), (2.3c), 然后用(3.6)计算终端条件为 S_f 时的解. 因为末端条件 S_f 最后才计算, 当需要修改 S_f 进行重新计算时, 前半部分不用重算, 可以减少许多计算工作量.

控制系统设计时, 要求 Riccati 方程的解矩阵正定. 对于所考虑的时间区间, 要求在最后执行完区段合并本征值计数后 $J_{RS} = 0$. 这表示所给定的 $\gamma_{\#}^{-2}$ 是次优参数, 可以增大. 如果此时 $J_{RS} > 0$, 则表示 $\gamma_{\#}^{-2}$

应当减小. 通过多次对分法迭代, 可以得到满足精度要求的临界参数 γ_{op}^{-2} .

4 闭环系统响应的精细积分(Precise integration for response of closed loop system)

由 Riccati 方程的解按(1.7)式构成闭环系统, 求解这一变系数微分方程组, 可以得到闭环系统的初值响应. 一般的变系数微分方程组无法用精细积分法计算数值解, 但由于方程(1.7)的特殊性, 可以求其精细积分解.

考察式(3.7)中 F_p 所满足的微分方程. 令 $\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}$, 并利用恒等式(3.10), 可以证明

$$\frac{dF_p}{dt} = -F_p[A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S]. \quad (4.1)$$

进而导出

$$\frac{d}{dt}(F_p^{-1}) = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S]F_p^{-1}. \quad (4.2)$$

这个微分方程是矩阵形式的(1.7)式. 若引入向量

$$\xi_0 = F_p(0)x_0, \quad (4.3)$$

则

$$x(t) = F_p^{-1}(t)\xi_0. \quad (4.4)$$

这样, $x(t)$ 就不需要再由方程(1.7)进行积分, 只需由矩阵计算便可完成. $F_p(t)$ 是状态转移矩阵, 是由精细积分计算的, 前面已经给出其计算公式. 所以按(4.4)计算的 $x(t)$ 是精细积分解.

5 数值算例(Numerical example)

当 $\gamma_{\#}^{-2}$ 趋近于 γ_{op}^{-2} 时, Riccati 方程的解矩阵趋于奇异对称阵, 实际上无法根据这种数值上无限增长的病态阵来导出增益阵及控制律. 因此应用中需取小于 γ_{op}^{-2} 的参数值, 然后求解 Riccati 方程, 构造反馈控制律. 因此, 本文的算例在计算出临界参数后, 取略小于 γ_{op}^{-2} 的值进行闭环系统初值计算, 并比较了不同参数值时系统的响应.

系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 39.4 & 3.8 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad S_f = \begin{bmatrix} 10.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10.0 \end{bmatrix}.$$

有限时间区段长 $T = 3$, 计算结果为 $\gamma_{\text{op}}^{-2} =$

0.12349039. 设系统初值干扰为 $x_0 = (1.5, 1)^T$, 仿真计算中当 $\gamma^{-2} = 0.95 \times \gamma_{op}^{-2}$ 时的系统状态及 Riccati 方程解的对角线元素分别在图 1 和图 2 中用虚线表示

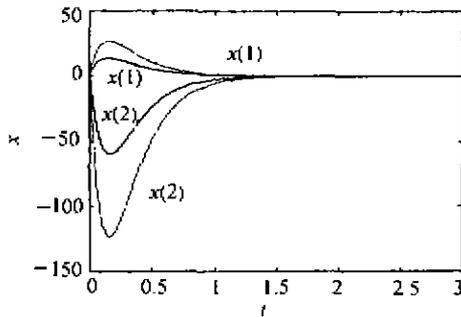


图 2 系统响应的时间历程

Fig. 2 Response of System

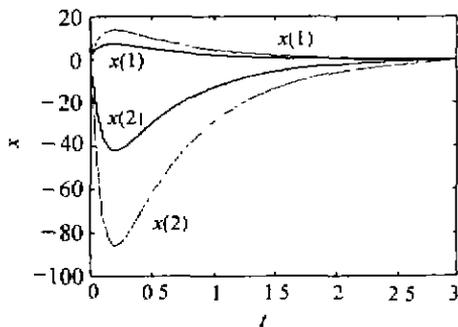


图 4 矩阵 C 阵变化后系统的响应

Fig. 4 Response of system after the change of matrix C

C 矩阵为指标加权阵, 如果将 C 中的元素 $C(2,2)$ 改为 7.0, 其它参数不变, 计算结果为 $\gamma_{op}^{-2} = 0.068133771$, 与图 2 和图 3 类似, $\gamma^{-2} = 0.95 \times \gamma_{op}^{-2}$ 时的系统状态及 Riccati 方程解的对角线元素分别在图 4 和图 5 中用虚线表示, 而 $\gamma^{-2} = 0.90 \times \gamma_{op}^{-2}$ 时系统状态及 Riccati 方程的解在图 4 和图 5 中分别用实线表示. 加权阵的变化当然对闭环系统的最优 H_∞ 范数和 Riccati 方程的解有影响, 而对系统动态响应的影晌可以通过对比图 2 和图 4 得到.

如果取 $\gamma^{-2} = 0$, 则成为一个 LQ 控制问题, Riccati 方程解矩阵中的各元素相应变小, 此时系统在控制作用下的初值响应幅值也远小于图中给出的响应曲线.

6 结束语 (Conclusions)

结构力学与最优控制的模拟理论为 H_∞ 优化设计问题的求解提供了一个新的途径. 文 [7] 和 [9] 分别指出了 H_∞ 状态反馈系统及 H_∞ 滤波器的最优 H_∞ 范数与 Rayleigh 商本征值之间的关系及计算方法, 并同时给出了精细积分法求解 Riccati 方程的步骤. 本文将这一方法应用于系统的设计及仿真问题, 介绍了有限时间 H_∞ 状态反馈控制系统设计与初值响

示, 而 $\gamma^{-2} = 0.90 \times \gamma_{op}^{-2}$ 时系统状态及 Riccati 方程的解在图 2 和图 3 中分别用实线表示. 从图中可以发现系统 H_∞ 范数的变化对系统动态响应特性的影响.

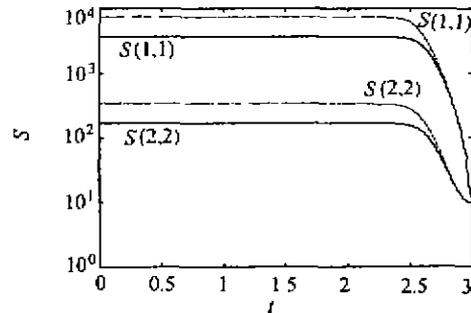


图 3 Riccati 微分方程解

Fig. 3 Solution of Riccati differential equation

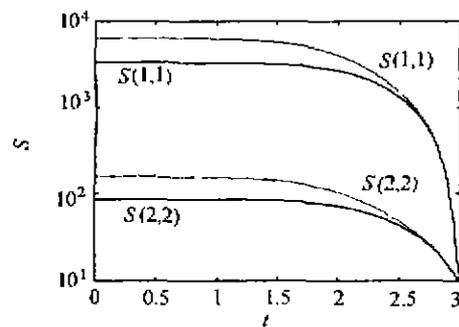


图 5 加权阵变化后 Riccati 方程的解

Fig. 5 Solution of Riccati differential equation after the change of matrix C

应的仿真结果. 在文 [8] 中已经介绍了有限时间 LQ 控制系统设计与初值响应计算的精细积分法. 本文的结果进一步表明, 对于有限时间 H_∞ 状态反馈控制系统, 虽然其闭环系统状态方程中含有时变系数, 闭环系统初值响应仍然可以由精细积分法来计算.

参考文献 (References)

- [1] Green M and Limebeer D J N. Linear Robust Control [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1995
- [2] Doyal J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. A state-space solution to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, 34(8): 831-847
- [3] Xie X S and Zhong Y S. Theory of H_∞ Control [M]. Beijing: Press of Tsinghua University, 1994 (in Chinese)
- [4] Shen T L. Theory of H_∞ Control and Its Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996 (in Chinese)
- [5] Zhong W X, Ouyang H J and Deng Z C. Computational Structural Mechanics and Optimal Control [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993 (in Chinese)
- [6] Zhong W X and Zhong X X. The differential equations of the interval mixed energy matrices of LQ control and its applications [J]. Acta Automatica Sinica, 1992, 18(3): 325-331 (in Chinese)
- [7] Zhong W X. H_∞ control state feedback and Rayleigh quotient precise

- integration [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, 15(1):3-10 (in Chinese)
- [8] Zhong W X. The precise integration of LQ control problems [J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(2):166-173 (in Chinese)
- [9] Zhong W X and Williams F W. H_∞ filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration [J]. Int. J. of Numerical Methods in Engineering, 1999, 46(7):1017-1030
- [10] Zhong W X, Williams F W and Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems [J]. Trans. ASME, J. Vib. Acous., 1997, 119(7):334-340

附录 A (Appendix A)

A1 区间 η 的混合能计算 (Computation of mixed energy of interval η)

Step 0 选定 $\gamma_{\#}^{-2}$;

Step 1 由 (3.3a), (3.3b), (3.3c) 计算 $E(\tau), G(\tau), F(\tau)$ 并存贮于 E_c, G_c, F_c , 且 $J_{RC} = 0$;

Step 2 for ($k = 0; k < N; k++$)
 $\{E_1 = E_2 = E_c; G_1 = G_2 = G_c; F_1 = F_2 = F_c\}$
 $\{$ 三角分解 E_2 及 $E_2^{-1} + G_1$, 按 (2.6) 计算 $J_{RC}\}$
 注: 若 $J_{RC} > 0$, 应减小 $\gamma_{\#}^{-2}$ 并重新由 Step 1 开始
 $\{$ 由 (3.5a), (3.5b), (3.5c) 计算 $E_c, G_c, F_c\}$
 $\{$;

Step 3 $F_c = I + F_c$.

A2 临界参数计算 (Computation of critical value)

Step 0 选定 $\gamma_{\#}^{-2}$;

Step 1 $\{E_1 = E_c; G_1 = G_c; F_1 = F_c; J_{R1} = 0; E_2 = S_f;$
 $G_2 = 0; F_2 = I; J_{R2} = 0\}$;

Step 2 for ($k = k_f - 1; k \geq 0; k--$)
 $\{$ 由 (2.5a), (2.5b), (2.5c) 及 (2.6) 计算 $E_c, G_c,$
 F_c 和 $J_{RC}\}$
 $\{E_2 = E_c; G_2 = G_c; F_2 = F_c; J_{R2} = J_{RC}\}$ 注: $E_1,$
 G_1, F_1, J_{R1} 不变
 if ($J_{RC} > 0$) $\{$ 跳出循环从较小的 $\gamma_{\#}^{-2}$ 重新开始
 $\{$;

Step 3 if ($J_{RC} > 0$)

$\{$ $\gamma_{\#}^{-2}$ 是 γ_{cr}^{-2} 的上界 (upperbound), 重新计算前应该减小
 $\{$

else

$\{$ $\gamma_{\#}^{-2}$ 是次优参数及 γ_{cr}^{-2} 的下界 (lowerbound)
 $\{$

if (upperbound-lowerbound) $> \epsilon$

$\{$ 加大 $\gamma_{\#}^{-2}$ 重新计算 | 注: ϵ 是预先选定的小正实数
 $\{$

else

$\{$ break |;

$\{$

注: 当计算结果满足预定的要求时, 停止迭代, 下界 (lowerbound) 作为 γ_{cr}^{-2} .

A3 闭环系统方程及 Riccati 方程的积分 (Integration of closed-loop system equation and Riccati equation)

Step 0 选择 $\gamma_{\#}^{-2} < \gamma_{cr}^{-2}$;

Step 1 $\{$ 计算 $E(\eta), G(\eta), F(\eta); E_1 = E_c = E(\eta), G_1 = G_c = G(\eta), F_1 = F_c = F(\eta)\}$;

Step 2 for ($k = k_f - 1; k \geq 0; k--$)
 $\{$ 存储 E_c, G_c, F_c 在第 k 站
 $\{E_2 = E_c; G_2 = G_c; F_2 = F_c\}$ 注: E_1, G_1, F_1 不变
 $\{$ 按照 (2.5a), (2.5b), (2.5c), 计算新的 $E_c, G_c,$
 $F_c\}$
 $\{$

$\{$ 读入边界条件 $E_2 = S_f, G_2 = 0, F_2 = I\}$;

Step 3 for ($k = 0; k < k_f; k++$)
 $\{$ 读入存储的 $E, G, F\}$
 $\{$ 按照 (3.6), (3.7) 计算 $S, F_p\}$
 $\{$ 由 (4.4) 计算系统初值响应
 $\{$;

本文作者简介

吴志刚 1971年生, 现做博士后研究工作, 研究兴趣为 H_∞ 控制系统设计, 结构振动主动控制, 动力学系统辨识. Email: wuzhg@dlut.edu.cn

钟万麟 1934年生, 教授, 中国科学院院士, 目前的主要研究领域包括工程力学中的辛体系, H_∞ 优化设计等.