

一类具有分离静态非线性系统的控制方法*

王 伟¹ 杨建军²

(1. 大连理工大学 信息与控制研究中心, 大连 116024; 2. 清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘要: 针对一类具有分离静态非线性的系统, 当在线求解静态非线性存在计算误差时, 给出鲁棒稳定的充分条件. 当控制输入受限时, 引入辅助变量, 并利用不变集保证闭环系统的稳定性和可行性.

关键词: 非线性系统; 输入受限; 稳定性; 可行性

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Control method for a class of systems with separable static non-linearities

WANG Wei¹, YANG Jian-jun²

(1. Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Department of Automation, Tsinghua university, Beijing 100084, China)

Abstract: A class of system with separable static non-linearities is studied and a sufficient condition is built up for robust stability in the presence of computing errors of the solution of static nonlinearities. An extra control variable is introduced and invariant sets are used to guarantee the closed-loop stability and feasibility in the presence of input constraints.

Key words: nonlinear system; input constraint; stability; feasibility

1 引言(Introduction)

具有分离静态非线性的系统是由一个静态非线性环节串联一个动态线性环节构成. 其典型的形式是 Hammerstein 模型. 这种非线性系统在许多化工过程中经常能遇到^[1]. 目前对这类非线性系统的研究成果相对较少. 文[2,3]分别针对具有 Hammerstein 模型的这类系统给出广义预测控制和模型预测控制, 但文[2]没有考虑控制输入受限的问题, 文[2,3]中都没有分析闭环系统的稳定性. 另外, 几乎所有的系统中都存在控制输入受限的问题, 因此研究输入受限的控制策略是具有实际意义的. 最近文[4,5]给出了用线性矩阵不等式(LMI)的方法来处理线性系统输入受限问题, 并用不变集设计状态反馈控制律, 这使得系统状态向量始终保持在一个不变可行集内, 从而保证输入受限时的闭环稳定性和可行性.

本文考虑一类具有分离静态非线性的系统的控制问题, 当系统因采用递推算法求解静态非线性环节而出现计算误差时, 给出保证闭环系统稳定性的充分条件. 对于控制输入受限, 本文引入辅助变量并利用不变集保证闭环系统的稳定性和可行性. 本文

所给方法的主要优点是算法简单, 在线计算量大大减少.

2 系统描述和稳定性分析(System description and stability analysis)

假设被控对象可以表述成如下形式的 SISO 离散时间模型:

$$y_i = \frac{z^{-1}b(z)}{a(z)} v_i = \frac{z^{-1}b(z)}{a(z)} \Delta v_i, \quad (1)$$

$$\alpha(z) = \Delta(z)a(z), \quad (2)$$

$$\Delta v_i = v_i - v_{i-1}, \quad (3)$$

$$\Delta(z) = 1 - z^{-1}, \quad (4)$$

$$v_i = f(u_i). \quad (5)$$

其中 z^{-1} 表示后移因子, $b(z)$ 和 $a(z)$ 为互质的多项式, 系数分别为 $b_i, i = 1, \dots, n-1$ 和 $a_i, i = 0, \dots, n$, 方程(5)表示系统的静态非线性部分, f 可微且 $f(0) = 0, v_i$ 为不可测的中间变量. 当 $f(u_i) = c_1 u_i + c_2 u_i^2 + \dots + c_n u_i^n$ 时, 即为 Hammerstein 模型.

假设对线性环节存在一稳定的并在一定意义上是最优的反馈控制律:

$$v_i = \Delta v_i + v_{i-1}. \quad (6)$$

* 基金项目: 国家杰出青年基金(69825106)和教育部高等学校骨干教师资助计划资助项目.

收稿日期: 2000 - 07 - 20; 收修改稿日期: 2001 - 03 - 02.

其中 Δv_t 满足

$$M(z)\Delta v_t = P_r(z)r - N(z)y_t. \quad (7)$$

r 为输出设定值, $M(z)$, $N(z)$ 和 $P_r(z)$ 是相应的多项式.

由(6)和(7)式得到的 v_t 只是一个中间变量, 要实现控制, 必须计算 u_t . 这里为了将(6)式中的 v_t 和(1)~(5)式中的 v_t 有所区别, 把(1)~(5)式中的 v_t 表示成 \bar{v}_t . 要计算当前时刻的 u_t 必须在 t 时刻根据(6)式所得的 v_t 在线求解方程(5). 首先考虑 u_t 不受限情况, 设 u_t 可以表示成

$$u_t = f^{-1}(v_t). \quad (8)$$

显然, 当非线性较强时, 很难甚至不可能得到解析形式的 f^{-1} , 因此必须采用数值方法, 用递推求解的形式在线求近似解. 在本文中, f^{-1} 表示从 v_t 到 u_t 的静态非线性关系, 因此可得图1所示的控制结构.

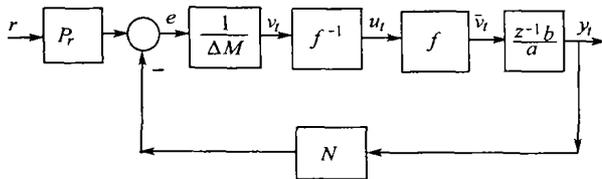


图1 具有分离静态非线性的闭环系统框图

Fig. 1 The block diagram of closed-loop system with separable static non-linearities

求解(5)式的实根可以用多种有效的递推方法, 为简单起见, 本文采用如下形式的 Newton-Raphson 递推算法:

$$u_t^{k+1} = u_t^k - \frac{f(u_t^k) - v_t}{f'}, \quad k \geq 0. \quad (9)$$

其中 $f' = df/du_t^k$. 上标 k 表示递推次数, $k+1$ 次的递推解是在 k 次的递推基础上得到的. (9) 式的初始值 $u_t^0 = u_{t-1}$, 也就是前一刻的控制输入. 这里会出现一个问题, 那就是在应用(6)式时会出现 $df/du_t^k = 0$ 的情况, 这时存在两个可能性, 就是 u_t^k 是该多项式的根或者不是, 这可以根据 $f(u_t^k) - v_t$ 是否在预定的小范围之内来判断, 当 u_t^k 是根时, 就把它当作当前的控制输入, 而当 u_t^k 不是根时就必须重新选择初始值, 重新计算.

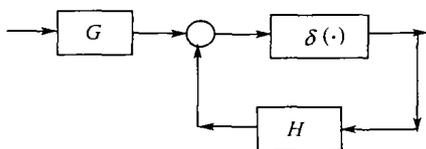


图2 图1的等价表示

Fig. 2 Equivalent description of figure 1

现在分析闭环系统的稳定性, 假设 u_t 是通过

(9) 式得到的近似解, ϵ 是预先给定的解的准确率, 当

$$|v_t - f(u_t^k)| = |v_t - \bar{v}_t| \leq \epsilon \quad (10)$$

成立时, 递推方程(9)式停止计算. 由(10)式可以把 v_t 和 \bar{v}_t 之间的关系表示成

$$\bar{v}_t = (1 + \delta(v_t))v_t. \quad (11)$$

其中 $\delta(v_t)$ 表示 v_t 和 \bar{v}_t 之间的误差因子. 这样, 通过(11)式可以把图1等同地表示成图2. 其中

$$H = \frac{z^{-1}bN}{\Delta aM + z^{-1}bN} = \frac{z^{-1}bN}{P_c},$$

$$G = \frac{P_r a}{\Delta aM + z^{-1}bN} = \frac{P_r a}{P_c},$$

并且

$$\Delta a(z)M(z) + z^{-1}b(z)N(z) = P_c(z). \quad (12)$$

定义 $\gamma = \sup_w |H(e^{jw})|$, 得如下定理:

定理1 假设由(9)式得到的控制输入满足

$$|\delta(\cdot)| < \frac{1}{\gamma}, \quad (13)$$

则由(1), (5), (6)和(9)式组成的闭环系统全局渐近稳定.

证 由图2和 γ 的定义知

$$|H\delta(\cdot)| \leq |H| |\delta(\cdot)| \leq \gamma |\delta(\cdot)| < 1.$$

根据小增益定理^[6], 定理得证.

3 输入受限时的控制(Control with input constraint)

为讨论简单起见, 这里只考虑输入饱和形式的受限情况:

$$-\bar{u} \leq u_t \leq \bar{u}. \quad (14)$$

对 u_t 的限制可以通过对中间变量 v_t 的限制来达到. 由(5)式和(14)式不难得出中间变量的受限范围为 $v_{min} \leq v_t \leq v_{max}$ 并作为(9)式的边界.

把方程(1)写成如下形式的状态方程

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + B\bar{v}_t = Ax_t + B(1 + \delta(v_t))v_t, \\ y_t = Cx_t. \end{cases} \quad (15)$$

为简单起见, 只考虑调节问题, 控制律(7)可以写成

$$v_t = Kx_t. \quad (16)$$

为处理控制输入受限情况, 定义一新的控制律

$$v_t = Kx_t + Ed_t. \quad (17)$$

其中

$$E = [1, 0, \dots, 0], \quad d_t^T = [d_t, d_{t+1}, \dots, d_{t+n_d-1}]$$

为辅助变量序列, n_d 为辅助变量的长度.

(17) 式的主要思想是: 假设控制输入不受限,

这时控制律(16)是稳定的而且在一定意义上是最优的,不需要引入辅助变量 d_i . 可见 d_i 的作用是保证控制律可行. 若控制输入受限,而控制律(16)在受限范围内可行,则为保持控制律的最优性,辅助变量 d_i 应等于零. 但当控制律因输入受限而不可行时,闭环系统就不再最优,甚至不再稳定,这时就可以通过调节 d_i 来保证控制输入不超出受限范围,也就是通过非零的 d_i 保证可行性. 因此一个明显的策略是在满足可行性的条件下,极小化目标函数 $J_i = d_i^T d_i$.

由(15)式和(17)式得到如下系统

$$z_{i+1} = \Phi z_i + e_i. \quad (18)$$

其中

$$z_i = \begin{bmatrix} x_i \\ d_i \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} A + BK & BE \\ 0 & T \end{bmatrix}, \quad e_i = \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q_i = \delta(\bar{K}z_i)B\bar{K}z_i, \quad \bar{K} = [K, E],$$

e_i 表示误差项. T 为对角线上的元素为 1, 其余元素为零的矩阵. 它使得 Td_i 的第 i 个元素为 d_i 的第 $i+1$ 个元素, 且 Td_i 的第 n_d 个元素为零. 这样如果在 t 时刻存在一个可行的 d_t , 那么在 $t+1$ 时刻也必然存在一个可行的 d_{t+1} , 而且它所对应的目标函数值要小于或等于 t 时刻的目标函数值.

假设 1 存在一正常数 σ , 当 $v_{\min} \leq \bar{v}_i \leq v_{\max}$ 时, $|\delta(\cdot)| \leq \sigma$.

由假设 3.1 知

$$\begin{aligned} e_i^T P e_i &= q_i^T E_x^T P E_x q_i = \\ &\delta^2(\bar{K}z_i) z_i^T \bar{K}^T B^T E_x^T P E_x B \bar{K} z_i \leq \\ &\sigma^2 z_i^T \bar{K}^T B^T E_x^T P E_x B \bar{K} z_i, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 P 为正定矩阵, E_x 为投影因子, $E^T x z_i = x_i$.

定义椭圆集 S_z :

$$S_z = \{z: z^T P z \leq 1\}. \quad (20)$$

引理 1 对于任意 $\tau > 1$, $\eta = 1 + (\tau - 1)^{-1}$, 由(18)式得

$$z_{i+1}^T P z_{i+1} \leq \tau z_i^T \Phi^T P \Phi z_i + \eta e_i^T P e_i. \quad (21)$$

证 参见[7].

由(19)式和(21)式可知, 当

$$\tau \Phi^T P \Phi + \eta \Gamma^T P \Gamma \leq P \quad (22)$$

成立时, $z_{i+1}^T P z_{i+1} \leq 1$, 即椭圆集 S_z 为不变集, 其中 $\Gamma = \sigma E_x B \bar{K}$. 也就是说对于任意在 S_z 内的初始状态, 状态 z 将始终保持在 S_z 内.

假设 2 存在正常数 μ 和 λ , 且 $\bar{u} - \lambda > 0$, 当 $-\bar{u} \leq u_i \leq \bar{u}$ 时, 下列不等式成立

$$|u_i| = |f^{-1}(v_i)| \leq \mu |v_i| + \lambda. \quad (23)$$

由(20)式得

$$|v_i| = |\bar{K} z_i| \leq \|\bar{K} P^{-1/2}\|, \quad (24)$$

由(14), (23)和(24)式给出保证可行性的条件

$$\bar{K} P^{-1} \bar{K}^T \leq \left(\frac{\bar{u} - \lambda}{\mu}\right)^2. \quad (25)$$

常数 λ 和 μ 可以通过数值方法计算得到(对某些特殊结构的静态非线性, 也可以用解析方法). 值得注意的是条件(22), (25)和当前状态无关, 因此可以离线计算, 而且都是线性矩阵不等式, 可以用标准的半正定规划算法求解, 这大大减少了在线计算量.

为保证可行性, 要求满足条件(22), (25)的正定矩阵 P 存在, 且初始状态使得满足(20)式的 d_i 存在, 这样可行性才能递推保证, 才能保证稳定性, 并收敛到不受限时的最优控制律. 由(20)式知, 使 d_i 存在的初始状态的允许集是一个椭圆, 而椭圆的大小由正定矩阵 P 决定, 因此, 由线性不等式求得的 P 应该使椭圆尽量大.

控制算法 1:

第一步 (离线)产生状态方程(15)并计算稳定反馈控制向量 K .

第二步 (离线)根据(22), (25)式计算矩阵 P .

第三步 (在线)在(20)式条件下极小化目标函数 J_i , 把最优解 d_i^* 代入式 $v_i = Kx_i + Ed_i$, 在(10)式的条件下, 计算当前时刻的中间变量 v_i .

第四步 (在线)用递推方法(9)计算 u_i .

第五步 (在线) $t = t + 1$, 返回到第三步.

定理 2 若假设 1 和 2 成立, 并且由(6), (7), (9)和(10)式组成的预稳定控制律稳定被控系统(1), 且在初始时刻, 满足(22)式和(25)式的 P 存在, 则上述算法保证闭环系统稳定, 并最终收敛到不受限时的预稳定控制律.

证 由假设条件知, 在 t 时刻, 状态 $z_t \in S_z$, 根据不变集的定义, 必然存在 d_{t+1} 使得 $z_{t+1} \in S_z$. 由(18)式知, 在 $t+1$ 时刻, $d_{t+1} = Td_t$ 为一可行解, 而且根据 T 的定义, 可得 $J_{t+1} = d_{t+1}^T d_{t+1} \leq J_t$, 等号只有在 $d_t = 0$ 时才成立. 在 $t+1$ 时刻, 显然 d_{t+1} 并不一定是最优解, 由 J_{t+1} 可求出最优解 d_{t+1}^* , 使得 $J_{t+1}^* \leq J_{t+1} \leq J_t$. 这样按时间 t 依次类推, 目标函数的值就单调递减, 辅助变量序列将趋向于零, 即控制律收敛到不受限时的预稳定控制律, 从而保证闭环稳定性.

4 仿真例子 (Simulation example)

下面通过仿真例子来说明上述方法的有效性. 假设被控对象的输入输出描述为

$$(1 - 2.3z^{-1} + 1.2z^{-2})y_t = (1 + 0.8z^{-1})v_{t-1}.$$

其中 $v_t = f(u_t) = u_t^4 \sin(u_t) - u_t^3$. 系统具有一个不

稳定极点 1.5. 把输入输出方程转化成状态空间描述为

$$A = \begin{bmatrix} 2.3 & -1.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0].$$

设计控制器的目的是使系统的输出为零, 而系统的输入 u_i 被限制在 -2 和 2 之间, 即 $-2 \leq u_i \leq 2$. 取 $\lambda = 1.3726, \mu = 0.1$, 则中间变量 v_i 的受限范围为 $-6.274 \leq v_i \leq 6.274$.

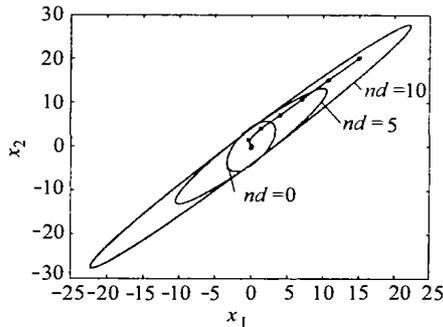


图3 不变随圆集
Fig. 3 Invariant ellipsoidal sets

对被控对象的线性环节设计预稳定控制律为 $v_i = Kx_i = [-2.4179 \ 1.1495]x_i$. 用 Newton-Raphson 递推方法求解非线性方程的解, 取误差因子 $\delta(\cdot)$ 的上界为 0.01 . 当辅助变量 d_i 的长度 n_d 分别为 $0, 5, 10$ 时, 采用算法 1 所得到的不变集如图 3 所示. 显然不变集随着 n_d 的增加而增大. 取初始状态为 $[15, 20]$, 图 3 中的星号表示不同时刻的状态. 从图中可以看出系统的状态始终在不变集内变化, 而且渐近趋向于零点, 系统状态在第 4 步时就进入了 $n_d = 0$ 时的不变集, 也就是说从第 4 步开始, 控制输入的受限条件就不发生作用了.

5 结论(Conclusion)

本文针对一类具有分离静态非线性的系统给出了具有稳定性保证的控制方法. 控制器的设计分两

个步骤, 首先设计一个输入不受限时的预稳定控制律, 然后在此基础上引入辅助变量并利用不变集处理控制输入受限问题. 用这种方法设计控制器, 不但算法简单而且在线计算量大大减少.

参考文献(References)

- [1] Eskinat E, Johnson S H, Luyben W L. Use of Hammerstein models in identification of nonlinear systems [J]. *AICHE J.*, 1991, 37(2): 255 - 268
- [2] Fruzzetti K P, Palazoglu A, McDonald K A. Nonlinear model predictive control using Hammerstein models [J]. *J. Proc. Control*, 1997, 7(1): 31 - 41
- [3] Zhu Q M, Warwick K, Douce J L. Adaptive general predictive controller for nonlinear systems [J]. *IEE Proc. D - Control Theory and Applications*, 1991, 138(1): 33 - 40
- [4] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(12): 1361 - 1379
- [5] Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control [A]. *Proceedings of the ACC99* [C]. San Diego, USA, 1999, 6, 4283 - 4287
- [6] Mees A I. *Dynamic of Feedback Systems* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1981
- [7] Kouvaritakis B, Wang W, Lee Y I. Observers in nonlinear model-based predictive control [J]. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10(6): 749 - 761

本文作者简介

王伟 1955年生. 1988年获东北大学工学博士学位. 1990年至1992年在挪威科技大学从事博士后研究. 1998年至1999年作为访问学者在英国牛津大学从事模型预测理论研究. 现为大连理工大学教授, 博士生导师. 主要研究方向为自适应控制, 预测控制, 计算机控制及其工业应用. Email: wangwei@dlut.edu.cn

杨建军 1972年生. 2000年获东北大学工学博士学位. 现在清华大学自动化系从事博士后研究. 主要研究方向为模型预测控制理论及应用.