

文章编号: 1000-8152(2002)05-0667-06

## 离散时间系统混合 $l_1/H_\infty$ -控制问题\*

郝 飞, 楚天广, 黄 琳

(北京大学 力学与工程科学系 系统与控制研究中心, 北京 100871)

**摘要:** 研究 MIMO 离散时间系统混合  $l_1/H_\infty$ -控制问题. 通过引入辅助优化问题, 证明了目标优化值关于约束  $H_\infty$  指标的连续依赖性及其辅助问题最优解的存在性, 同时证明了辅助优化问题的截断序列问题解的收敛性, 且其极限为混合  $l_1/H_\infty$ -控制优化的辅助问题的最优解. 还给出了优化目标值的上下界逼近.

**关键词:** 离散时间系统;  $l_1$ -控制问题;  $H_\infty$ -控制; 多目标优化

**中图分类号:** TP273, O231

**文献标识码:** A

## Mixed $l_1/H_\infty$ control problem for discrete-time systems

HAO Fei, CHU Tian-guang, HUANG Lin

(Research Centre of Systems and Control, Department of Mechanics and Engineering Science, Beijing University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** This paper is concerned with mixed  $l_1/H_\infty$ -control problem of MIMO discrete-time systems where  $l_1$ -performance objective is minimized subject to an  $H_\infty$  constraint. By introducing an auxiliary optimal problem, we prove the continuous-dependence of optimal objective with respect to the constrained  $H_\infty$ -performance objective. The existence of the solution of the auxiliary optimal problem is also proved. We present the convergence of the solutions of a series of the truncation problems of the auxiliary optimal problem, and show that its limit is the optimal solution of the auxiliary optimal problem. Particularly, we give an approach to obtain the converging lower and upper bounds of the mixed  $l_1/H_\infty$ -control problem. This approach gives a computationally efficient synthesis procedure which avoid the problem of zero-interpolation techniques. Finally, an example shows that the approach is feasible for designing suboptimal controller of the mixed control problem.

**Key words:** discrete-time systems;  $l_1$ -control;  $H_\infty$ -control; multiple objective

### 1 引言(Introduction)

由于很多实际工程涉及信号的度量不同, 系统的性能指标也各不相同. 于是形成了不同的优化控制问题, 如常见的  $l_1, H_\infty, H_2$ -优化控制问题等. 以单个性能指标为控制目标的问题已经形成了系统而深刻的  $l_1, H_\infty, H_2$ -优化控制理论. 但许多实际工程控制往往要求设计的控制器必须同时满足几个性能指标(或时域或频域), 且这些指标往往又是不相容的——优化其中某一指标的同时另一指标可能会增大, 于是产生了多目标优化控制问题. 这类问题导致了混合优化控制问题的研究, 如  $H_2/H_\infty$  控制<sup>[1]</sup>, 混合  $l_1, H_2$  控制问题<sup>[2-6]</sup>,  $l_1/H_\infty$ -控制问题<sup>[7-9]</sup>等. 它们的目标都是使闭环系统传递函数其中某一范数最小同时保证另一范数满足预定的指标. 一般地, 对稳定系统  $H_\infty$  范数小于等于  $l_1$  范数. 原则上, 这类问题只涉及单一范数  $l_1$  形式. 但是在一些情况下, 最优

化  $l_1$  范数的同时常会导致  $H_\infty$  范数的增大而非减小<sup>[9]</sup>. 因而混合控制问题  $l_1/H_\infty$  不能转化为单一范数形式, 是多目标问题. 而文[7, 8]仅限于处理 SISO 系统. 文[7]用线性矩阵不等式方法研究了离散系统混合  $l_1/H_\infty$ -控制问题. 文[8, 9]用辅助问题  $l_1/H_\infty, \delta$  的解(有理控制器)去逼近  $l_1/H_\infty$  优化问题解. 文[9]证明了当  $\delta \rightarrow 1$  时, 辅助问题的优化目标值将趋于原问题的优化目标值. 这一结果只给出了优化目标值的上界逼近. 同时文[9]还用 Euler 逼近法讨论了连续时间系统混合  $l_1/H_\infty$ -控制问题.

本文用不同于文[7~9]的方法研究了 MIMO 离散时间系统混合  $l_1/H_\infty$ -控制问题. 受文[4, 10]所谓的尺度- $Q$  (scaled- $Q$ ) 方法的启发, 通过引入辅助优化问题代替原优化问题, 证明了目标集的凸性, 目标优化值关于约束  $H_\infty$  指标的连续依赖性及其辅助问题最优解的存在性, 且辅助优化问题的截断序列

\* 基金项目: 国家重点基础研究基金(G1998020302)和自然科学基金(19872005, 69925307)资助项目.

收稿日期: 2001-05-31; 收修改稿日期: 2001-12-30.

问题解的收敛性,其极限为混合  $l_1/H_\infty$ -控制优化的辅助问题的最优化解.还给出了优化目标值的上下界逼近.从而避免了用零点插值计算上的困难<sup>[11]</sup>.由于版面的限制,我们将一些证明省略.

## 2 预备知识(Preliminaries)

本文用到的符号

$l_1$ : 单边绝对可和实序列构成的 Banach 空间,

范数为  $\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|$ ;

$l_1^{m \times n}$ : 单边实矩阵序列构成的 Banach 空间,范

数为  $\|x\|_1 = \max_i \sum_{j=0}^m \|x_{ij}\|_1$ ;

$H_\infty$ :  $\lambda$ -变换下的  $l_1$  象空间,范数为  $\|\Phi\|_\infty = \sup_{|\lambda|=1} |\Phi(\lambda)|$ ;

$H_\infty^{m \times n}$ :  $\lambda$ -变换下的  $l_1^{m \times n}$  象空间,范数为  $\|\Phi\|_\infty = \sup_{|\lambda|=1} \bar{\sigma}(\Phi_y(\lambda))$ ;

$l_1(Z)$ : 双边绝对可和实序列构成的 Banach 空间,范数为  $\|x\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|$ ;

$P_N$ : 序列空间上的  $N$  次截断算子,  $P_N(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$ ;

$w^*$ : Banach 空间  $X$  的对偶空间  $X^*$  上的由  $X$  诱导的弱星拓扑.

序列  $\phi \in l_1$  的  $\lambda$ -变换表示为  $\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k)\lambda^k$ . 所以  $\phi \in l_1$  当且仅当  $\Phi \in H_\infty$ .

考虑如图 1 所示系统,  $C$  为补偿器,  $P$  为可以镇定的有理严格因果 LTI 对象.  $w_i, z_i, i = 1, \infty$  分别为输入、输出信号.  $u$  为由量测  $y$  确定的控制率. 信号  $x$  的维数记为  $n_x$ .

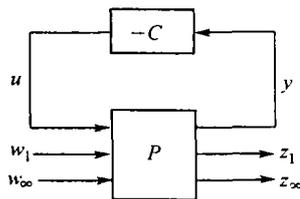


图 1 闭环系统  
Fig. 1 Closed-loop system

设  $\Psi, \Phi$  表示闭环系统从  $w_1$  到  $z_1$  和从  $w_\infty$  到  $z_\infty$  的传递函数. 记

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

用线性分式变换得到

$$\Psi = P_{22} - P_{21}C(I + P_{11}C)^{-1}P_{12},$$

$$\Phi = P_{33} - P_{31}C(I + P_{11}C)^{-1}P_{13}.$$

用 Youla 参数化方法,  $P_{11} = N(\lambda)(M(\lambda))^{-1}$ ,  $N(\lambda)X(\lambda) + M(\lambda)Y(\lambda) = I$ . 其中  $N(\lambda), M(\lambda), X(\lambda), Y(\lambda) \in l_1^{* \times *}$  有相容维数. 所有  $l_\infty$  稳定的补偿器能以传递函数形式描述为

$$C(\lambda) = (X(\lambda) - M(\lambda)Q(\lambda))(Y(\lambda) - N(\lambda)Q(\lambda))^{-1},$$

$$Q(\lambda) \in l_1^{* \times n},$$

(具体细节可参见文[11]P.95~104). 因而

$$\Psi = T_1(\lambda) - U_1(\lambda)Q(\lambda)V_1(\lambda),$$

$$\Phi = T_\infty(\lambda) - U_\infty(\lambda)Q(\lambda)V_\infty(\lambda)$$

且  $T_i \in l_1^{* \times n_i}, U_i, V_i \in l_1^{* \times *}, i = 1, \infty$  有相容维数. 以下为书写简便将  $\lambda$  省去.

假设  $U_i, V_i$  在单位圆上没有零点, 且  $U_i, V_i$  分别为列、行满秩的.

混合  $l_1/H_\infty$ -控制问题可叙述为: 给定  $T_i \in l_1^{* \times n_i}, U_i, V_i \in l_1^{* \times *}, i = 1, \infty$  有相容维数和常数  $\gamma > 0$ , 找到  $Q \in l_1^{* \times n}$ , 使得  $\|\Psi\|_1$  最小且  $\|\Phi\|_\infty \leq \gamma$ .

定义集合

$$\xi(\gamma) = \{\Psi: \Psi = T_1 - U_1QV_1, \|\Phi\|_\infty = \|T_\infty - U_\infty QV_\infty\|_\infty \leq \gamma, Q \in l_1^{* \times n}\},$$

$$(1)$$

$$\eta(\gamma) = \{Q: \|T_\infty - U_\infty QV_\infty\|_\infty \leq \gamma, Q \in l_1^{* \times n}\},$$

$$(2)$$

$$\gamma_0 = \inf_{Q \in l_1^{* \times n}} \|T_\infty - U_\infty QV_\infty\|_\infty.$$

$$(3)$$

显然, 当  $\gamma_0 < \gamma < \infty$  时,  $\xi(\gamma), \eta(\gamma)$  有意义且非空. 在上面的假设下, 由  $H_\infty$ -控制理论知(3)一定存在最优化解, 记为  $Q_0$ . 因而控制器的设计目标归结为如下的混合  $l_1/H_\infty$ -控制问题:

$$\mu(\gamma) = \inf_{Q \in \eta(\gamma)} \|T_1 - U_1QV_1\|_1 = \inf_{\Psi \in \xi(\gamma)} \|\Psi\|_1.$$

$$(4)$$

引理 1<sup>[11]</sup> 设  $h \in l_1$ . 则  $h^{-1} \in l_1$  当且仅当  $\inf_{|\lambda| \leq 1} |h(\lambda)| > 0$  (其中  $h$  表示  $h$  的  $\lambda$  变换).

引理 2<sup>[12]</sup> 设  $X$  是 Banach 空间, 则其对偶空间  $X^*$  中的任意有界闭集都是  $w^*$  紧的.

文中没有特别指明的符号及所用结论请参见文[11].

## 3 目标集的凸性及目标函数的连续性(Convexity of objective sets and continuity of objective functions)

为解决上述提出的问题我们有必要研究目标集

和目标函数的一些性质.

**命题 1**  $\xi(\gamma), \eta(\gamma)$  分别是空间  $l_1^{n_1 \times n_1}$  和  $l_1^{n_2 \times n_2}$  中的凸集.

证 显然  $\xi(\gamma) \subset l_1^{n_1 \times n_1}, \eta(\gamma) \in l_1^{n_2 \times n_2}$ . 按常规证明容易得到凸性.

下面考虑对足够大的  $\alpha > 0$  引入优化问题(4)的辅助问题:

$$\nu(\gamma) = \inf_{Q \in \eta(\gamma), \|Q\|_1 \leq \alpha} \|T_1 - U_1 Q V_1\|_1 = \inf_{\Psi \in \xi(\gamma), \|Q\|_1 \leq \alpha} \|\Psi\|_1. \quad (5)$$

**命题 2** 对  $\gamma_0 < \gamma < \infty$ , 有  $\nu(\gamma) = \mu(\nu)$ .

证 用到引理 1, 类似于文[5]的证明容易得到(略).

为证明目标函数的连续性, 我们引入以下各量.

取  $\alpha > \max\{\alpha_0, \|Q\|_1\}$ . 定义集合

$$\eta_0 = \{Q \in l_1^{n_2 \times n_2} : \|Q\|_1 \leq \alpha\},$$

$$\xi_0 =$$

$$\{\Psi : \Psi = T_1 - U_1 Q V_1, \|Q\|_1 \leq \alpha, Q \in l_1^{n_2 \times n_2}\}.$$

则问题(5)可以写成为:

$$\nu(\gamma) = \inf_{Q \in \eta(\gamma) \cap \eta_0} \|T_1 - U_1 Q V_1\|_1 = \inf_{\Psi \in \xi(\gamma) \cap \xi_0} \|\Psi\|_1.$$

**定理 1** 对任意的  $\gamma > \gamma_0$ ,  $\mu(\gamma)$  和  $\nu(\gamma)$  都是连续函数.

证 由于  $Q_0 \in l_1^{n_2 \times n_2}$  是(3)的最优化解, 即

$$\|T_\infty - U_\infty Q_0 V_\infty\|_\infty = \gamma_0 = \inf_{Q \in l_1^{n_2 \times n_2}} \|T_\infty - U_\infty Q V_\infty\|_\infty.$$

对  $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \infty$ , 立即有  $Q_0 \in \eta(\gamma_1) \subset \eta(\gamma_2)$ , 故  $\mu(\gamma_1) \geq \mu(\gamma_2)$ . 又对任意的  $Q_2 \in \eta(\gamma_2) \cap \eta_0$ , 令  $t = (\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_2 - \gamma_0)$  且  $Q_1 = tQ_0 + (1-t)Q_2$ . 常规计算得  $Q_1 \in \eta(\gamma_1) \cap \eta_0$ . 记  $\Psi_i = T_1 - U_1 Q_i V_1, i = 1, 2$ . 这样

$$\begin{aligned} \nu(\gamma_1) - \|T_1 - U_1 Q_2 V_1\|_1 &\leq \\ \|T_1 - U_1 Q_1 V_1\|_1 - \|T_1 - U_1 Q_2 V_1\|_1 &\leq \\ \|U_1 - (Q_1 - Q_2) V_1\|_1 &\leq \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 \|Q_1 - Q_2\|_1 \leq \\ 2\alpha t \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 &=: \beta t, \end{aligned}$$

所以  $\nu(\gamma_1) - \nu(\gamma_2) \leq \beta t$ . 又由命题 2 知, 对任意的  $\gamma_0 < \gamma < \infty$ , 有  $\nu(\gamma) = \mu(\gamma)$ . 故  $\mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_2) \leq \beta t$ . 从而对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta \in (0, \gamma - \gamma_0), \delta < \varepsilon(\gamma - \gamma_0)/\beta$  使得

$$0 \leq \mu(\gamma) - \mu(\gamma + \delta) \leq \beta \frac{\gamma + \delta - \gamma_0}{\gamma + \delta - \gamma_0} =$$

$$\beta \frac{\delta}{\gamma + \delta - \gamma_0} < \beta \frac{\delta}{\gamma - \gamma_0} < \varepsilon.$$

由此可见,  $\mu(\gamma)$  和  $\nu(\gamma)$  都是关于  $\gamma > \gamma_0$  连续函数. 证毕.

#### 4 混合 $l_1/H_\infty$ -控制问题的逼近 (Approximation of mixed $l_1/H_\infty$ -control problem)

由于优化问题(4)和辅助问题(5)均是无穷维凸规划问题, 难以直接求解. 下面我们将用截断问题去上下逼近它们的最优化目标.

##### 4.1 下界逼近 (Approximation of lower bounds)

首先定义集合

$$\begin{cases} \xi^N(\gamma) = \{\Psi : P_N \Psi = P_N(T_1 - U_1 Q V_1), \\ P_N \Phi = P_N(T_\infty - U_\infty Q V_\infty), \\ \|\Phi\|_\infty \leq \gamma, Q \in l_1^{n_2 \times n_2}\}, \\ \eta^N(\gamma) = \{Q \in l_1^{n_2 \times n_2} : \Psi = T_1 - U_1 Q V_1 \in \xi^N(\gamma)\}. \end{cases} \quad (6)$$

$\xi^N(\gamma), \eta^N(\gamma)$  分别与  $\xi(\gamma), \eta(\gamma)$  的不同之处在于  $\xi^N(\gamma), \eta^N(\gamma)$  是经过  $\xi(\gamma), \eta(\gamma)$  中的变量截断而成的集合且显然  $\xi(\gamma) \supset \xi^{N+1}(\gamma) \supset \xi^N(\gamma), \eta(\gamma) \supset \eta^{N+1}(\gamma) \supset \eta^N(\gamma)$ .

混合  $l_1/H_\infty$ -优化问题(5)的截断问题构造如下:

$$\mu_N(\gamma) = \inf_{\Psi \in \xi^N(\gamma) \cap \xi_0} \|\Psi\|_1 = \inf_{Q \in \eta^N(\gamma) \cap \eta_0} \|T_1 - U_1 Q V_1\|_1. \quad (7)$$

这是一个有有限多个约束和有无穷多个变量的最优化问题. 下面我们将其转化为有限维最优化问题. 为此我们定义

$$\begin{cases} \hat{\xi}^N(\gamma) = \{\Psi : P_N \Psi = P_N(T_1 - U_1 Q V_1), \\ P_N \Phi = P_N(T_\infty - U_\infty Q V_\infty), \\ \|\Phi\|_\infty \leq \gamma, Q \in l_1^{n_2 \times n_2}, \Psi(k) = 0, \\ \Phi(k) = 0, Q(k) = 0, k > N\}, \\ \hat{\eta}^N(\gamma) = \{Q \in l_1^{n_2 \times n_2} : \Psi = T_1 - U_1 Q V_1 \in \hat{\xi}^N(\gamma)\}. \end{cases} \quad (8)$$

$\hat{\xi}^N(\gamma), \hat{\eta}^N(\gamma)$  与  $\xi^N(\gamma), \eta^N(\gamma)$  的不同之处在于  $\Psi, \Phi, Q$  在  $\hat{\xi}^N(\gamma), \hat{\eta}^N(\gamma)$  中是有限维的, 而在  $\xi^N(\gamma), \eta^N(\gamma)$  中可以是无穷维的.

构造优化问题:

$$\nu_N(\gamma) = \inf_{\Psi \in \hat{\xi}^N(\gamma) \cap \xi_0} \|\Psi\|_1 = \inf_{Q \in \hat{\eta}^N(\gamma) \cap \eta_0} \|T_1 - U_1 Q V_1\|_1. \quad (9)$$

这是问题(7)的截断问题, 是一个有有限多个约束和有有限多个变量的最优化问题. 一定存在有限脉冲响应解, 即  $Q = (Q(0), Q(1), \dots, Q(N), 0, \dots)$  为

(9)的解.

命题3 对问题(7)和(9),有  $\underline{\mu}_N(\gamma) = \underline{\nu}_N(\gamma)$ .

证 易得.

定理2 问题(5)的最优化解存在,且对任意整数  $N \geq 0$ , 有  $\underline{\mu}_N(\gamma) \leq \underline{\mu}_{N+1}(\gamma) \leq \mu(\gamma)$ , 从而  $\lim_{N \rightarrow \infty} \underline{\mu}_N(\gamma) = \mu(\gamma)$ .

证 令  $Q_{N+1}$  为  $\underline{\mu}_{N+1}(\gamma)$  的最优化解, 即  $\Psi_{N+1} = T_1 - U_1 Q_{N+1} V_1$  满足优化问题  $\underline{\mu}_{N+1}(\gamma)$ . 因为

$$\begin{aligned} \|P_N(T_\infty - U_\infty(P_N Q_{N+1}) V_\infty)\|_\infty &\leq \\ \|P_{N+1}(T_\infty - U_\infty Q_{N+1} V_\infty)\|_\infty &\leq \gamma. \end{aligned}$$

可知  $\Psi_{N+1}$  为  $\underline{\nu}_N(\gamma)$  的可行解, 于是

$$\begin{aligned} \underline{\nu}_N(\gamma) &\leq \|P_N(T_1 - U_1 Q_{N+1} V_1)\|_1 \leq \\ \|P_{N+1}(T_1 - U_1 Q_{N+1} V_1)\|_1 &\leq \underline{\nu}_{N+1}(\gamma). \end{aligned}$$

即  $\underline{\nu}_N(\gamma) \leq \underline{\nu}_{N+1}(\gamma)$ . 又因为对任意的  $Q \in \eta(\gamma) \cap \eta_0$  有

$$\begin{aligned} \|P_N(T_\infty - U_\infty Q V_\infty)\|_\infty &\leq \|T_\infty - U_\infty Q V_\infty\|_\infty \leq \gamma. \\ \text{故得 } \underline{\nu}_N(\gamma) &\leq \underline{\nu}_{N+1}(\gamma) \leq \nu(\gamma). \text{ 再用到命题3知,} \\ \underline{\mu}_N(\gamma) &\leq \underline{\mu}_{N+1}(\gamma) \leq \nu(\gamma). \end{aligned}$$

另外,对任意  $N$ , 设  $Q_N$  为(9)的最优化解, 即  $\Psi_N = T_1 - U_1 Q_N V_1$  满足优化问题(9). 因而  $\|Q_N\|_1 \leq \alpha$ . 由引理2知存在  $Q_N$  的子列  $Q_{N_i}$  使得  $Q_{N_i} \rightarrow Q^* \in l_1^{n \times n}$ , 依  $l_1^{n \times n}$  的  $w^*$  拓扑收敛. 因而  $\|Q^*\|_1 \leq \alpha$ , 且对任意的  $N$  及  $N_i \geq N$ , 有

$$\begin{aligned} \|P_N(T_1 - U_1 Q_{N_i} V_1)\|_1 &\leq \\ \|P_{N_i}(T_1 - U_1 Q_{N_i} V_1)\|_1 &= \underline{\nu}_{N_i}(\gamma). \end{aligned}$$

又因为  $\underline{\nu}_N(\gamma)$  是单增有上界的序列, 故极限存在 (记为  $\lim_{N \rightarrow \infty} \underline{\nu}_N(\gamma)$ ), 且  $\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{\nu}_{N_i}(\gamma) \leq \nu(\gamma)$ . 于是

$$\|P_N(T_1 - U_1 Q^* V_1)\|_1 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \underline{\nu}_{N_i}(\gamma).$$

这表明  $Q^*$  是(9)的可行解. 由此及  $N$  的任意性有  $\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{\nu}_{N_i}(\gamma) \geq \nu(\gamma)$ . 从而  $\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{\nu}_{N_i}(\gamma) = \nu(\gamma)$ . 由命题2知  $\nu(\gamma) = \mu(\gamma)$ . 这表明  $Q^*$  是问题(5)的最优化解. 进而得  $\lim_{N \rightarrow \infty} \underline{\mu}_N(\gamma) = \mu(\gamma)$ .

注1 由定理2的证明知  $\underline{\mu}_N(\gamma) \leq \mu(\gamma)$ , 称  $\underline{\mu}_N(\gamma)$  为最优化问题(4)的超优化值. 相应的问题(7)称为超优化问题. 定理2的结论表明可用超优化目标值去从下逼近问题(4)的最优目标值. 无论如何, 超最优化问题的解一般不是(4)的可行解. 它同时证明了混合控制问题(4)的辅助问题(5)优化解的存在性.

### 4.2 上界逼近(Approximation of upper bounds)

为用上界逼近最优化目标, 对任意整数  $N \geq 0$ ,

定义

$$\begin{cases} \xi^N(\gamma) = \{ \Psi : \Psi = T_1 - U_1 Q V_1, \\ \|\Phi\|_\infty = \|T_\infty - U_\infty Q V_\infty\|_\infty \leq \gamma, \\ Q \in l_1^{n \times n}, Q(k) = 0, k > N \}, \\ \eta^N(\gamma) = \{ Q \in l_1^{n \times n} : \Psi = T_1 - U_1 Q V_1 \in \xi^N(\gamma) \}. \end{cases} \quad (10)$$

$\xi^N(\gamma), \eta^N(\gamma)$  分别与  $\xi(\gamma), \eta(\gamma)$  的不同之处在于  $\xi^N(\gamma), \eta^N(\gamma)$  中的变量  $Q$  是有限维的, 而在  $\xi(\gamma), \eta(\gamma)$  中是无穷维的. 换言之,  $\xi^N(\gamma), \eta^N(\gamma)$  是经过  $\xi(\gamma), \eta(\gamma)$  中的变量截断而成的集合且  $\xi_N(\gamma) \subset \xi(\gamma), \eta_N(\gamma) \subset \eta(\gamma)$  当  $\gamma > \gamma_0$  时, 容易找到  $N_0 \geq 0$  使得当  $N \geq N_0$  时有  $\xi_N(\gamma) \neq \emptyset$  (空集).

混合  $l_1/H_\infty$ -控制优化问题(4)和辅助问题(5)的  $N$  次截断问题构造如下:

$$\begin{cases} \bar{\mu}_N(\gamma) = \inf_{Q \in \eta_N(\gamma)} \|T_1 - U_1 Q V_1\|_1 = \inf_{\Psi \in \xi_N(\gamma)} \|\Psi\|_1, \\ \bar{\nu}_N(\gamma) = \inf_{Q \in \eta_N(\gamma) \cap \eta_0} \|T_1 - U_1 Q V_1\|_1 = \inf_{\Psi \in \xi_N(\gamma) \cap \xi_0} \|\Psi\|_1. \end{cases} \quad (11)$$

定理3 对任意整数  $N \geq 0$ , 有  $\bar{\nu}_N(\gamma) \geq \bar{\nu}_{N+1}(\gamma) \geq \nu(\gamma)$  且  $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\nu}_N(\gamma) = \mu(\gamma)$ .

证 用到定理1, 类似于定理2的证明(略).

注2  $\bar{\nu}_N(\gamma)$  称为  $l_1/H_\infty$ -控制问题的次优值. 定理3意味着可用次优目标值从上逼近混合  $l_1/H_\infty$ -问题的最优化目标值.

### 4.3 截断问题解的收敛性(Convergency of solutions for truncation problems)

对任意  $N$ , 设  $\Psi_N$  为问题(7)的最优化解, 且设  $\Psi^*$  是问题(5)的最优化解.

定理4  $(\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots)$  是  $\overline{\xi(\gamma) \cap \xi_0}$  中的收敛序列, 且收敛到  $\Psi^*$ .

证 对任意整数  $N \geq 0$ , 由平行四边形法则得  $\|(\Psi^* + \Psi_N)/2\|_1^2 =$

$$(\|\Psi^*\|_1^2 + \|\Psi_N\|_1^2)/2 - \|\Psi^* - \Psi_N\|_1^2/4.$$

由命题1知  $\xi(\gamma)$  是凸集, 进而  $\overline{\xi(\gamma) \cap \xi_0}$  是凸集. 故  $(\Psi^* + \Psi_N)/2 \in \overline{\xi(\gamma) \cap \xi_0}$ , 进而  $\|(\Psi^* + \Psi_N)/2\|_1^2 \geq \|\Psi^*\|_1^2$ . 由定理2知  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\Psi_N\|_1 = \|\Psi^*\|_1$ . 这样,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\Psi_N - \Psi^*\|_1 = 0$ . 证毕.

这一结果同时说明只要存在  $\xi(\gamma) \cap \xi_0$  的元  $\Psi^*$  满足  $\|\Psi^*\|_1 = \inf_{\Psi \in \xi(\gamma) \cap \xi_0} \|\Psi\|_1$ , 则它一定是唯一的. 因而说明了问题(5)的最优化解是唯一的.

## 5 算例(Numerical example)

考虑如图 1 所示的系统,被控对象为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\lambda + 2}{\lambda - 0.5} & \frac{\lambda - 0.1}{\lambda - 0.5} & \frac{-\lambda - 0.1}{-0.4\lambda + 1} \\ \frac{-\lambda + 1}{\lambda - 0.1} & 0.6\lambda + 0.9 & \frac{\lambda(\lambda - 0.9)}{-0.9\lambda + 1} \\ \frac{-0.4\lambda + 1}{\lambda - 0.5} & \frac{\lambda(\lambda - 0.8)}{\lambda - 0.7} & -\lambda(\lambda - 0.1) \end{bmatrix}.$$

对  $P_{11}$  进行互质分解,  $P_{11} = NM^{-1}, NX + MY = 1$ . 其中  $N = \lambda + 2, M = \lambda - 0.5, X = \lambda - 0.1, Y = -\lambda - 2.4$ . 由 Youla 参数化方法, 闭环系统传递函数为

$$\Psi = T_1 - U_1 Q V_1, \Phi = T_\infty - U_\infty Q V_\infty.$$

其中

$$T_1 = \lambda^2 - 0.5\lambda + 1, V_1 = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5, U_1 = 1,$$

$$T_\infty = 0.1\lambda - 0.01, V_\infty = \lambda^2 - 0.6\lambda + 0.05, U_\infty = 1.$$

这样, 上述次优化问题(11)可以写为如下的非线性规划问题:

$$\bar{\nu}_N(\gamma) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{N+2} |\Psi(i)| + \sum_{i=N+3}^{\infty} |T_1(i)| \right\} \quad (*)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \Psi(i) = T_1(i) - \sum_{j=0}^N Q(j) V_1(i-j), \\ \Phi(i) = T_\infty(i) - \sum_{j=0}^N Q(j) V_\infty(i-j), \\ \max_{0 \leq j \leq N+2} |\Phi(j)| \leq \gamma, \sup_{j \geq N+3} |T_\infty(j)| \leq \gamma, \\ \sum_{j=0}^N |Q(j)| \leq \alpha, \Psi(j) = 0, \\ \Phi(j) = 0, Q(j) = 0, j > N. \end{cases} \quad (12)$$

同理超优问题(9)可化为如下问题:  $\underline{\nu}_N(\gamma) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^N |\Psi(i)| \right\}$ , 约束条件如上(12) 只将第3行改为  $\max_{0 < j < N} |\Phi(j)| \leq \gamma$ . 我们用 N-P 插值法计算得  $\gamma_0 = 0.4750$ . 取  $\gamma = 0.6$ , 并对  $\alpha = 10^4$  用 Matlab 5.3 及优化工具箱  $fmincon(\cdot)$  寻最优目标值得到, 如下表 1.

表 1 最优目标值之比较

Table 1 Comparison of optimal objection values

$N$	0	1	2	3	4
$\bar{\nu}_N(0.6)$	4.5000	1.5921	1.4411	1.3722	1.3272
$\underline{\nu}_N(0.6)$	0	0.5909	1.0373	1.2094	1.2163
$N$	5	6	7	8	9
$\bar{\nu}_N(0.6)$	1.3144	1.2971	1.2925	1.2800	1.2787
$\underline{\nu}_N(0.6)$	1.2297	1.2518	1.2582	1.2628	1.2738

由上表可知当  $N = 9$  时, 上述混合问题  $l_1/H_\infty$  的优化目标值  $\nu(0.6)$  的范围是:  $1.2738 < \nu(0.6) < 1.2787$ . 满足上、下界的优化解分别为

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= 0.0570\lambda^9 - 0.0095\lambda^8 + 0.0128\lambda^7 + \\ & 0.0236\lambda^6 + 0.0367\lambda^5 + 0.0643\lambda^4 + \\ & 0.1054\lambda^3 + 0.1861\lambda^2 + 0.3302\lambda - 0.4412, \\ Q &= 0.5552\lambda^9 - 0.1476\lambda^8 + 0.0561\lambda^7 + \\ & 0.0104\lambda^6 + 0.0442\lambda^5 + 0.0582\lambda^2 + \\ & 0.1044\lambda^3 + 0.1856\lambda^2 + 0.3305\lambda - 0.4410. \end{aligned}$$

注 3 为计算的方便, 我们只以 SISO 系统作为例子. 对于 MIMO 可以用同样的方法得到控制器, 这时需将 (\*) 式中的范数改为  $l^m \times n$  的范数. 另外, 从算例的结果我们可以看到设计目标值越接近优化目标值, 控制器的阶次越高. 这与传统  $l_1$  控制器设计效果一致, 但是我们的方法不需要检验零点插值条件.

## 6 结论(Conclusion)

本文研究了 MIMO 离散时间系统混合  $l_1/H_\infty$ -控制问题. 用所谓的尺度-Q 法通过引入辅助优化问题代替原优化问题, 证明了辅助优化问题的截断序列问题解的收敛性, 其极限为混合  $l_1/H_\infty$ -控制优化的辅助问题的最优化解. 还给出了优化目标值的上下界逼近. 这一方法不仅避免了用零点插值方法解  $l_1$  优化问题的困难, 而且也便于实际操作. 最后, 算例说明方法的可行性.

## 参考文献(References)

- [1] Kaminer I, Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed  $H_2/H_\infty$  control for discrete-time systems via convex optimization [J]. Automatica, 1993, 29(1): 57-70
- [2] Salapaka M V, Dahleh M, Voulgaris P G. Mixed objective control synthesis: Optimal  $l_1/H_2$  control [J]. SIAM J. Control Optimization, 1997, 35(5): 1672-1689
- [3] Salapaka M V, Dahleh M, Voulgaris P G. MIMO optimal control design: the interplay between the  $H_2$  norm and the  $l_1$  norm [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(10): 1374-1388
- [4] Salapaka M V, Khammash M, Dahleh M. Solution of MIMO  $H_2/l_1$  problem without zero inter-polation [J]. SIAM J. Control Optimization, 1999, 37(6): 1865-1873
- [5] Wu J, Chu J. Approximation methods of scalar mixed  $H_2/l_1$  problems for discrete-time systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1999, 44(10): 1869-1874
- [6] Wu J, Chu J. Mixed scalar  $l_1/H_2$  problem for discrete-time systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(6): 910-913
- [7] Chen X, Wen J T. A linear matrix inequality approach to discrete-time mixed  $l_1/H_\infty$  control problem [A]. In: Proc. 34th IEEE Conf.

Decision and Contr. [C]. New Orleans, LA, USA, 1995, 3670 - 3675

2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1980

- [8] Sznaier M. Mixed  $l_1/H_\infty$  controllers for SISO discrete-time systems [J]. Systems & Control Letters, 1994, 23(3): 179 - 186
- [9] Sznaier M, Bu J. Mixed  $l_1/H_\infty$  control of MIMO systems via convex optimization [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(9): 1229 - 1241
- [10] Khammash M. A new approach to the solution of the  $l_1$  control problem: the scaled-Q method [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 2000, 45(2): 180 - 187
- [11] Dahleh M A, Diaz-Bobillo I J. Control of Uncertain Systems: a Linear Programming Approach [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1995
- [12] Taylor A E, Lay D C. Introduction to Functional Analysis [M].

本文作者简介

郝 飞 1972年生,1999年于内蒙古大学数学系获得理学硕士学位,同年考入北京大学力学与工程科学系系统与控制研究中心攻读博士学位.研究方向为  $l_1$  控制,鲁棒控制等. Email: fhao@mech.pku.edu.cn

楚天广 1964年生,1993年于清华大学获理学博士学位,1995年北京理工大学力学与工程科学系博士后出站.现任北京大学力学与工程科学系副教授.研究方向为稳定性理论,神经网络,鲁棒控制等.

黄 琳 1935年生,1961年北京理工大学力学系研究生毕业.现为北京大学力学与工程科学系教授,博士生导师.主要研究方向为稳定性理论及其应用,鲁棒控制,复杂系统控制及相关的应用数学等.

下 期 要 目

鲁棒稳定多项式双参数摄动域理论及在电力系统分析中的应用 ..... 车延博, 王成山

基于 LMI 的多模型鲁棒预测控制 ..... 李亚东, 李少远, 席裕庚

全局优化的神经网络方法 ..... 赵华敏, 陈开周

一类不确定非线性系统的输出反馈鲁棒自适应控制器的设计与分析 ..... 杨昌利, 阮荣濯

永磁同步电动机的混沌模型及其模糊建模 ..... 张 波, 李 忠, 毛宗源

仅有角测量的被动式机动目标跟踪 ..... 王晓华, 敬忠良

机动再入飞行器自适应自动驾驶仪设计 ..... 王小虎, 陈翰馥, 曹显兵

时滞 2-D 中立型离散状态模型正解的存在性 ..... 刘树堂, 刘永清, 邓飞其

一种基于 Pade 近似的频域辨识与频域模型降阶新方法 ..... 王学雷, 邓惠鹤

机器人间接自适应模糊控制器及其应用 ..... 吴玉香, 王灏, 毛宗源

Markov 控制过程基于单个样本轨道的在线优化算法 ..... 唐 昊, 奚宏生, 殷保群

模糊时间序列挖掘在复杂系统模糊建模中的应用 ..... 张小刚, 章 兢, 陈 华

六辊 UC 轨机轧制过程混沌的轨迹跟踪控制 ..... 任海鹏, 刘 丁

典型大时变时滞系统的鲁棒 Fuzzy-PID 控制及应用 ..... 沈国江, 刘 翔, 孙伏贤