

文章编号: 1000-8152(2002)05-0699-05

一类非线性微分-代数系统的 L_2 -增益分析及状态反馈 H_∞ 控制*

朱建栋¹, 程兆林¹, 李树荣²

(1. 山东大学 数学与系统科学学院, 济南 250100; 2. 石油大学(华东) 信息与控制工程学院, 山东东营 257061)

摘要: 分析了一类非线性微分-代数系统的 L_2 -增益, 并讨论了一类状态反馈 H_∞ 控制问题. 在一定条件下给出了控制器的设计, 并保证了闭环指数为 1 且零解渐近稳定.

关键词: 非线性微分-代数系统; 状态反馈; L_2 -增益; H_∞ 控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

L_2 -gain analysis and state feedback H_∞ control for a class of nonlinear differential-algebraic systems

ZHU Jian-dong¹, CHENG Zhao-lin¹, LI Shu-rong²

(1. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, China; 2. College of Information and Control Engineering, University of Petroleum (East China), Shandong Dongying 257061, China)

Abstract: L_2 -gain analysis and state feedback H_∞ control for a class of nonlinear differential-algebraic systems are discussed. Under some conditions the design of H_∞ controller is given. The closed-loop system is of index one and the equilibrium point is asymptotically stable.

Key words: nonlinear differential-algebraic systems; state feedback; L_2 -gain; H_∞ control

1 引言(Introduction)

自上世纪 80 年代以来, 微分-代数系统理论日益受到人们的广泛关注, 这是因为它能更精确的描述一些物理系统和经济系统, 如电力系统, 受限机器人, 投入产出模型等. 目前, 线性微分-代数系统理论已经发展得比较完善, 并得到了广泛的应用. 进入 90 年代, 非线性微分-代数系统理论开始得到快速发展, 特别是在一类非线性微分-代数系统上, 有了一大批成果^[1,2]. 对于一般形式的非线性微分-代数系统, 比较优秀的成果有文[3], 可用来确定稳定平衡点的吸引域, 这在电力系统的稳定性分析上得到了应用. 对于一般的非线性微分-代数系统的控制问题的研究也有了一些结果, 文[4]讨论了观测器问题, 文[5]讨论了线性化问题, 文[6]讨论了 H_∞ 控制问题, 但目前的研究还处于起步阶段. 关于 H_∞ 控制问题, 对于正常状态空间系统研究的比较多, 例如文[7,8]. 如何把这些结果推广到微分-代数系统值得研究, 文[6]首先考虑了这一问题, 并得到了许多结果, 由于条件的复杂性, 不少情形有待深入研究.

本文从另外一种角度考虑这一问题, 把文[9]的

思想应用到非线性微分-代数系统上, 并考虑 L_2 -增益分析及状态反馈 H_∞ 控制问题, 把文[8]的一些结果推广到非线性微分-代数系统. 在一定条件下, 给出了控制器的设计, 并保证闭环指数为 1 且零解渐近稳定.

2 预备知识及引理(Preliminaries and a lemma)

考虑非线性微分-代数系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), & x_1(0) = x_{10}, \\ 0 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $f_1: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是光滑映射, 且 $f_1(0,0) = 0, f_2(0,0) = 0$; $x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的动态变量和瞬时变量. 记 $f_2(x_1, x_2)$ 关于 x_2 的 Jacobi 矩阵为 $D_{x_2} f_2(x_1, x_2)$. 若 $D_{x_2} f_2(0,0)$ 非奇异, 则由隐函数定理知, 在 $(x_1, x_2) = (0,0)$ 点附近, 存在唯一的光滑映射 $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使 $x_2 = p(x_1)$, $p(0) = 0$, 代入(1)的第一个方程, 得 $\dot{x}_1 = \hat{f}_1(x_1)$, $\hat{f}_1(0) = 0$, 其中 $\hat{f}_1(x_1) = f_1(x_1, p(x_1))$, 由此可见此时系统(1)退化为正常状态空间系统, 因此我们给出如下定义:

* 基金项目: 国家重点基础研究项目 973(G1998020300), 教育部博士点基金(98042212)及山东省自然科学基金(Q99A07)资助项目.

收稿日期: 2000-06-12; 收修改稿日期: 2001-12-19.

定义 1 称非线性微分-代数系统(1)是指数为1的且零解渐近稳定,如果 $D_{x_2}f_2(0,0)$ 非奇异,并且系统可以退化为零解渐近稳定的正常状态空间系统.

注 1 定义1是线性微分-代数系统相应概念的自然推广.我们在考虑非线性微分-代数系统的控制问题时,一般也要求加上控制器后系统闭环指数为1并且零解渐近稳定,这在工程应用上有着现实意义.

L_2 -增益反映了系统输出对于干扰输入的敏感程度,是系统相对于外部干扰的一种鲁棒特性.对非线性正常状态空间系统而言, L_2 -增益分析构成了 H_∞ 控制的基础.类似于非线性正常状态空间系统,我们给出非线性微分-代数系统的 L_2 -增益及 H_∞ 控制等概念.

考虑这样一类非线性微分-代数系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)w, & x_1(0) = x_{10}, \\ 0 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)w, \\ y = h(x_1). \end{cases} \quad (2)$$

其中 $f_1: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n, f_2: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, g_1: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}, g_2: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ 是光滑映射,且 $f_1(0,0) = 0, f_2(0,0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的动态变量和瞬时变量, $w \in \mathbb{R}^r$ 是干扰输入, $y \in \mathbb{R}^q$ 是系统输出.

定义 2 称非线性微分-代数系统(2)具有小于或等于 γ 的局部 L_2 -增益,如果在初始状态 $x_{10} = 0$ 下,对任意的 $T > 0$,系统满足

$$\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt, \quad \forall w \in L_\infty^c[0, T]. \quad (3)$$

其中 γ 是事先给定的一正数, c 是充分小的正数, $L_\infty^c[0, T]$ 为定义在 $[0, T]$ 上的幅值小于或等于 c 的函数组成的集合.

注 2 与文[7,8]相比,本文对于干扰信号 w 作了较强的限制,即 $w \in L_\infty^c[0, T], c$ 是充分小的常数,称之为局部干扰信号.若 $w = 0$ 时,系统指数为1,即 $D_{x_2}f_2(0,0)$ 非奇异,则由隐函数定理,易见对充分小的 w , (2) 的第二个方程不会被破坏,并且存在唯一的光滑映射, $x_2 = \phi(x_1, w)$. 将 $x_2 = \phi(x_1, w)$ 代入 (2) 的第一个方程,则系统(2)等价地变为一个非仿射正常状态空间系统 $\dot{x}_1 = f_1(x_1, \phi(x_1, w)) + g_1(x_1,$

$\phi(x_1, w))w, x_1(0) = x_{10}$. 因此,当系统指数为1时,在局部干扰下,系统(2)的从充分小的初值出发的解存在唯一.一般情况,若像文[7,8]那样仅仅假设 $w \in L_2[0, T]$,则代数方程很可能受到破坏,例如 $\sin(x_2) + x_1^2 x_2^2 + w = 0, x_1, x_2, w \in \mathbb{R}$, 当 $|w|$ 充分小时关于 x_2 可解,当 $w > 1$ 时,该约束方程就不再成立.

注 3 对任意的 T ,对充分小的干扰及充分小的初值,系统的解能否延拓到 T 呢?这是一个值得进一步研究的问题.专著[10]中第五章对于仿真系统用了较长的篇幅讨论了这一问题,给出了干扰和初值的一个范围.对于系统(2),注2已经说明可以纳入非仿射正常状态空间系统的框架,遗憾的是,关于这方面的相应结果未见报道.本文重点讨论控制问题,与文[7,8]类似,总假设系统的解对充分小的初值及干扰在 $[0, T]$ 上是有定义的.

下面我们考虑一类带控制项的非线性微分-代数系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g_{11}(x_1, x_2)w + g_{12}(x_1)u, & x_1(0) = x_{10}, \\ 0 = f_2(x_1, x_2) + g_{21}(x_1, x_2)w + g_{22}(x_1)u, \\ y = h(x_1). \end{cases} \quad (4)$$

其中 $f_1: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n, f_2: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, g_{11}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}, g_{12}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}, g_{21}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}, g_{22}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ 是光滑映射,且 $f_1(0,0) = 0, f_2(0,0) = 0; x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的动态变量和瞬时变量, $w \in \mathbb{R}^r$ 是干扰输入, $u \in \mathbb{R}^p$ 是控制输入, $y \in \mathbb{R}^q$ 是系统输出.若对系统(4)实施状态反馈 $u = k(x_1, x_2), k(0,0) = 0$,则显然闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g_{12}(x_1)k(x_1, x_2) + g_{11}(x_1, x_2)w, \\ x_1(0) = x_{10}, \\ 0 = f_2(x_1, x_2) + g_{22}(x_1)k(x_1, x_2) + g_{21}(x_1, x_2)w, \\ y = h(x_1). \end{cases} \quad (5)$$

定义 3 所谓非线性微分-代数系统(4)的状态反馈 H_∞ 控制问题,就是寻找状态反馈(如果可能) $u = k(x_1, x_2), k(0,0) = 0$,使得当 $w = 0$ 时,闭环系统(5)是指数为1且零解渐近稳定的,当 $w \neq 0$ 时,在初值条件 $x_{10} = 0$ 下,闭环系统(5)具有小于或等于 γ 的局部 L_2 -增益,即(3)成立,其中 γ 是事先给定的一正数, c 是充分小的正数.

由定义3可见,要使状态反馈 H_∞ 控制问题可解,首先要保证闭环系统(5)当 $w = 0$ 时是指数为1

且零解渐近稳定的. 但从定义 1 出发判断微分-代数系统是否指数为 1 且零解渐近稳定并不是一件易事, 下面我们把正常状态空间系统理论中的 Lyapunov 方法推广到微分-代数系统.

引理 对非线性微分-代数系统(1), 若如下两条成立, 则系统指数为 1 且零解渐近稳定.

1)

$$\begin{bmatrix} D_{x_2} f_1(0,0) \\ D_{x_2} f_2(0,0) \end{bmatrix} \text{列满秩.}$$

2) 存在光滑函数 $V(x_1, x_2) \geq 0$, 满足 $V(0,0) = 0$, $D_{x_1}^2 V(0,0) > 0$, 当 $x_1 \neq 0$ 时, $V(x_1, 0) > 0$, 并且

$$[D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (6)$$

而且使上式等号恒成立的系统轨线必满足 $x_1(t) \equiv 0$, 其中 $D_{x_1}^2 V(0,0)$ 表示 $V(x_1, x_2)$ 的 Hessian 矩阵 $D_{x_1}^2 V(x_1, x_2)$ 在零点处的取值, $[D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)]$ 表示 $V(x_1, x_2)$ 的梯度向量在 $x_2 = 0$ 时的取值, 在这里梯度向量表示为行向量.

证 记

$$W(x_1, x_2) =$$

$$[D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

由于 $V(x_1, x_2)$ 在 $(x_1, x_2) = (0,0)$ 点处取最小值, 故 $[D_{x_1} V(0,0), D_{x_2} V(0,0)] = 0$. 再由 (7) 得 $W(0, x_2) = 0$, 考虑到条件 2), 易见 $W(x_1, x_2)$ 在 $(0, x_2)$ 处取得极大值, 故 $[D_{x_1} W(0, x_2), D_{x_2} W(0, x_2)] = 0$. 经简单计算可得

$$D_{x_1} W(x_1, x_2) =$$

$$[D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \begin{bmatrix} D_{x_1} f_1(x_1, x_2) \\ D_{x_1} f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + [f_1^T(x_1, x_2), f_2^T(x_1, x_2)] \begin{bmatrix} D_{x_1}^2 V(x_1, 0) \\ D_{x_2 x_1} V(x_1, 0) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

从而

$$0 = D_{x_1} W(0, x_2) =$$

$$[f_1^T(0, x_2), f_2^T(0, x_2)] \begin{bmatrix} D_{x_1}^2 V(0,0) \\ D_{x_2 x_1} V(0,0) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

上式两边对 x_2 求 Jacobi 矩阵, 然后令 $x_2 = 0$, 得 $D_{x_1}^2 V(0,0) D_{x_2} f_1(0,0) + D_{x_1 x_2} V(0,0) D_{x_2} f_2(0,0) = 0$.

(10)

由条件 2) 知 $D_{x_1}^2 V(0,0) > 0$, 故

$$D_{x_2} f_1(0,0) = -[D_{x_1}^2 V(0,0)]^{-1} D_{x_1 x_2} V(0,0) D_{x_2} f_2(0,0), \quad (11)$$

于是

$$\text{rank}[D_{x_2} f_2(0,0)] = \text{rank} \begin{bmatrix} D_{x_2} f_1(0,0) \\ D_{x_2} f_2(0,0) \end{bmatrix} = m, \quad (12)$$

即 $D_{x_2} f_2(0,0)$ 非奇异, 故在零点附近存在唯一的光滑的隐函数 $x_2 = p(x_1)$, $p(0) = 0$. 下证系统 $\dot{x}_1 = f_1(x_1, p(x_1))$ 零解渐近稳定, 设 $\bar{V}(x_1) = V(x_1, 0)$, 易见 $\bar{V}(x_1)$ 是正定函数. 由于 $x_2 = p(x_1)$ 是由 $f_2(x_1, x_2) = 0$ 在零点附近确定的隐函数, 故 $f_2(x_1, p(x_1)) = 0$, 令 (6) 中的 $x_2 = p(x_1)$, 则得 $D_{x_1} V(x_1, 0) f_1(x_1, p(x_1)) \leq 0$. 下面考察 $\bar{V}(x_1)$ 沿 $\dot{x}_1 = f_1(x_1, p(x_1))$ 的轨线的导数:

$$\frac{d\bar{V}(x_1(t))}{dt} = D_{x_1} \bar{V}(x_1) f_1(x_1, p(x_1)) = D_{x_1} V(x_1, 0) f_1(x_1, p(x_1)) \leq 0. \quad (13)$$

若存在 $\dot{x}_1 = f_1(x_1, p(x_1))$ 的轨线 $x_1(t)$ 使 (13) 中等号恒成立, 则 $x_1(t), x_2(t) = p(x_1(t))$ 满足系统 (1), 并且 (6) 中等号恒成立, 从而由条件 2) 得 $x_1(t) \equiv 0$, 应用 Krasovskii 定理即得 $\dot{x}_1 = f_1(x_1, p(x_1))$ 零解渐近稳定. 综上, 由定义 1, 得系统 (1) 指数为 1 并且零解渐近稳定.

为了便于下一节中定理的叙述, 我们给出如下定义:

定义 4 称 $w = 0$ 时的微分-代数系统 (2) 是零状态局部能检的 (记为 $\{f_1, f_2, h\}$ 零状态局部能检), 若在原点附近系统的任何一条轨线 $(x_1(t), x_2(t))$, 由 $h(x_1(t)) \equiv 0$ 可推得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$.

注 4 定义 4 是文 [8] 中零状态局部能检性定义的自然推广.

3 主要结果 (Main results)

定理 1 考虑非线性微分-代数系统 (2). 若 $[D_{x_2}^T f_1(0,0) \ D_{x_2}^T f_2(0,0)]^T$ 列满秩, $\{f_1, f_2, h\}$ 局部零状态能检, 且存在光滑函数 $V(x_1, x_2) \geq 0$, 满足 $V(0,0) = 0$, $D_{x_1}^2 V(0,0) > 0$. 当 $x_1 \neq 0$ 时, $V(x_1, 0) > 0$, 并且

$$[D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \frac{1}{2\gamma^2} [D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{x_1}^T V(x_1, 0) \\ D_{x_2}^T V(x_1, 0) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} h^T(x_1) h(x_1) \leq 0, \quad (14)$$

则系统(2)在 $w = 0$ 时, 指数为 1 且零解渐近稳定, 且当 $w \neq 0$, 初值 $x_1(0) = 0$ 时, 对任意的 $T > 0$, 有(3)成立, 其中 γ 是事先给定的一正数, c 是充分小的正数.

证 由条件(14)易得

$$\begin{bmatrix} D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \leq -\frac{1}{2} h^T(x_1) h(x_1) \leq 0. \quad (15)$$

当 $w = 0$ 时, 若存在系统的轨线 $x_1(t), x_2(t)$ 使上式等号恒成立, 则由(15)可见, $h(x_1(t)) \equiv 0$, 由 $\{f_1, f_2, h\}$ 局部零状态能检, 得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$. 对 $V(x_1(t), 0)$ 求导, 由复合函数求导法, 得

$$\frac{dV(x_1(t), 0)}{dt} = \begin{bmatrix} D_{x_1} V(x_1(t), 0), D_{x_2} V(x_1(t), 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

故 $V(x_1(t), 0) \equiv a$, a 为一常数. 注意

$$a = V(x_1(t), 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x_1(t), 0) = V(\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t), 0) = V(0, 0) = 0, \quad (17)$$

故 $V(x_1(t), 0) \equiv 0$. 由于 $x_1 \neq 0$ 时, $V(x_1, 0) > 0$, 因而 $x_1(t) \equiv 0$. 由引理可知, 系统在 $w = 0$ 时, 是指数为 1 且零解渐近稳定的. 当 $w \neq 0, x_1(0) = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_1(t), 0)}{dt} &= \begin{bmatrix} D_{x_1} V(x_1(t), 0), D_{x_2} V(x_1(t), 0) \end{bmatrix} \cdot \\ &\left\{ \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} w \right\} \leq \\ &-\frac{\gamma^2}{2} \|w - \frac{1}{\gamma^2} [D_{x_1} V(x_1(t), 0) D_{x_2} V(x_1(t), 0)] \cdot \\ &\begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \|^2 + \frac{\gamma^2}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \|h(x_1)\|^2 \leq \\ &\frac{\gamma^2}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \|y\|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

从而

$$V(x_1(T), 0) - V(0, 0) \leq \frac{1}{2} \int_0^T (\gamma^2 \|w\|^2 - \|y\|^2) dt. \quad (19)$$

再由 $V(0, 0) = 0$, 即得(3)成立.

下面我们讨论非线性微分-代数系统(4)的状态反馈 H_∞ 控制问题.

定理 2 考虑非线性微分-代数系统(4), 若

$$1) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} D_{x_2} f_1(0, 0) & g_{12}(0) \\ D_{x_2} f_2(0, 0) & g_{22}(0) \end{bmatrix} \geq m.$$

即存在常阵 K , 使得

$$\begin{bmatrix} D_{x_2} f_1(0, 0) + g_{12}(0)K \\ D_{x_2} f_2(0, 0) + g_{22}(0)K \end{bmatrix}$$

列满秩.

2) 存在光滑函数 $V(x_1, x_2) \geq 0$, 满足 $V(0, 0) = 0, D_{x_1}^2 V(0, 0) > 0$. 当 $x_1 \neq 0$ 时, $V(x_1, 0) > 0$, 且

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1(x_1, x_2) \\ \hat{f}_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0) \end{bmatrix} \cdot \\ &\left\{ \frac{1}{2\gamma^2} \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_2) \\ g_{21}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_2) \\ g_{21}(x_1, x_2) \end{bmatrix}^T - \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{12}(x_1) \\ g_{22}(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{12}(x_1) \\ g_{22}(x_1) \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} D_{x_1}^T V(x_1, 0) \\ D_{x_2}^T V(x_1, 0) \end{bmatrix} + \\ &\frac{1}{2} h^T(x_1) h(x_1) \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\hat{f}_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) + g_{12}(x_1) K x_2, \quad (21)$$

$$\hat{f}_2(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) + g_{22}(x_1) K x_2. \quad (22)$$

3) $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, h\}$ 零状态局部能检, 则在状态反馈 $u = Kx_2 + l(x_1)$ 下, 系统闭环在 $w = 0$ 时, 指数为 1 且零解渐近稳定, 且当 $w \neq 0$, 初值 $x_1(0) = 0$ 时, 有(3)成立, 其中 γ 是事先给定的一正数,

$$l(x_1) = - \begin{bmatrix} g_{12}(x_1) \\ g_{22}(x_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{x_1}^T V(x_1, 0) \\ D_{x_2}^T V(x_1, 0) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

证 当 $w = 0$ 时, 在状态反馈 $u = Kx_2 + l(x_1)$ 下, 系统闭环为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g_{12}(x_1) K x_2 + g_{12}(x_1) l(x_1) = \\ \quad \hat{f}_1(x_1, x_2) + g_{12}(x_1) l(x_1), \\ 0 = f_2(x_1, x_2) + g_{22}(x_1) K x_2 + g_{22}(x_1) l(x_1) = \\ \quad \hat{f}_2(x_1, x_2) + g_{22}(x_1) l(x_1). \end{cases} \quad (24)$$

利用条件 2), 与定理 1 的证明类似, 当 $w = 0$ 时, 系统闭环指数为 1 且零解渐近稳定. 当 $w \neq 0$, 且 $x_1(0) = 0$ 时, 沿闭环轨线对 $V(x_1(t), 0)$ 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_1(t), 0)}{dt} = & [D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \cdot \\ & \begin{bmatrix} \hat{f}_1(x_1, x_2) + g_{12}(x_1)l(x_1) + g_{11}(x_1, x_2)w \\ \hat{f}_2(x_1, x_2) + g_{22}(x_1)l(x_1) + g_{21}(x_1, x_2)w \end{bmatrix} = \\ & [D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \begin{bmatrix} \hat{f}_1(x_1, x_2) \\ \hat{f}_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} - \|l(x_1)\|^2 + \\ & [D_{x_1} V(x_1, 0), D_{x_2} V(x_1, 0)] \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, x_2) \\ g_{21}(x_1, x_2) \end{bmatrix} w \leq \\ & -\frac{1}{2} \|l(x_1)\|^2 - \frac{1}{2} \|h(x_1)\|^2 + \frac{\gamma^2}{2} \|w\|^2 \leq \\ & \frac{\gamma^2}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \|y\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

两边从 0 到 T 积分, 并由 $V(0, 0) = 0$, 得

$$\int_0^T (\|y\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2) dt \leq -2V(x(T), 0) \leq 0, \quad (26)$$

此即(3)成立.

例 设系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 \\ x_1 x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$z = x_1^2 + x_1.$$

显然, 定理 2 中的条件 1) 被满足. 令

$$K = 1, V(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2,$$

易见 $V(x_1, x_2) \geq 0$, 满足

$$V(0, 0) = 0, D_{x_1}^2 V(0, 0) = 4 > 0.$$

当 $x_1 \neq 0$ 时, $V(x_1, 0) = 2x_1^2 > 0$, $D_{x_1} V(x_1, 0) = 4x_1$, $D_{x_2} V(x_1, 0) = -2x_1$, 则条件 2) 中的不等式为

$$4x_1^2 x_2 - 2x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^4 + x_1^3 + \left(\frac{1}{2\gamma^2} - \frac{3}{2}\right) x_1^2 \leq 0.$$

易见若 $\gamma > \frac{1}{\sqrt{3}}$, 则在 (x_1, x_2) 的充分小邻域内条件

2), 3) 均能满足. 所求状态反馈为 $u = x_2 + 2x_1$.

4 结束语(Conclusions)

本文分析了一类非线性微分-代数系统的局部 L_2 增益, 并讨论了状态反馈 H_∞ 控制问题, 在一定条件下给出了控制器的设计, 并保证了闭环指数为 1 且零解渐近稳定. 这在一定程度上推广了正常状态

空间系统状态反馈 H_∞ 控制问题的结果.

参考文献(References)

- [1] Chen L, Liu X. Noninteracting control for a class of nonlinear differential-algebraic systems [A]. Proceedings of the 13th Triennial World Congress [C]. San Francisco, USA, 1996, 245 - 250
- [2] Liu X. Local disturbance decoupling of nonlinear singular systems [J]. Int. J. Control, 1998, 70(5): 685 - 702
- [3] Venkatasubramanian V, Schattler J, Zaborszky H. Local bifurcations and feasibility regions in differential-algebraic systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, 40(12): 1992 - 2013
- [4] Boutayeb M, Darouach M. Observers design for nonlinear descriptor systems [A]. Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control [C]. New Orleans, LA, USA, 1995, 2369 - 2374
- [5] Liu X. On linearization of nonlinear singular control systems [A]. Proceedings of the American Control Conference [C]. San Francisco, California, USA, 1993: 2284 - 2287
- [6] Wang H, Yung C, Chang F. H_∞ control for nonlinear differential-algebraic equations [A]. Proceeding of the 37th Conference on Decision and Control [C]. Tampa, Florida, USA, 1998, 4092 - 4097
- [7] Isidori A, Wang K. H_∞ control via measurement feedback for general nonlinear systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, 40(3): 466 - 472
- [8] Schaft A J. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1992, 37(6): 770 - 784
- [9] Zhang Q L, Zhang L Q, Dai G Z, et al. Analysis and synthesis of robust stability for linear time-invariant descriptor systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(4): 525 - 528 (in Chinese)
- [10] Knobloch H W, Isidori A, Flockerzi D. Topics in Control Theory [M]. Berlin, Germany: Birkhäuser Verlag, 1993
- [11] Chen B S, Liu Y Q. The stability of nonlinear differential-algebraic systems [J]. Control Theory and Applications, 2000, 17(1): 40 - 44 (in Chinese)

本文作者简介

朱建栋 1976 年生, 1996 年毕业于徐州师范大学并获学士学位, 1999 年于山东大学数学与系统科学学院获硕士学位, 并继续攻读博士学位. 已发表论文 7 篇. 主要研究兴趣是广义系统, 非线性微分-代数系统及 H_∞ 控制理论. Email: zhu@math.sdu.edu.cn

程兆林 1939 年生, 山东大学数学与系统科学学院教授, 博士生导师. 主要研究兴趣是多变量控制系统, 广义系统, 非线性微分-代数系统及 H_∞ 控制理论.

李树荣 1964 年生, 石油大学(华东)信息与控制工程学院自动化系教授, 1987 年毕业于山东大学, 1990 年与 1993 年毕业于中国科学院系统科学研究所, 分别获硕士和博士学位, 1993 年 9 月于清华大学电机工程与应用电子技术系从事博士后研究工作. 主要研究方向为非线性控制理论与应用, 数学机械化等.