

文章编号: 1000 - 8152(2002)05 - 0704 - 05

具有状态时滞线性系统对时滞参数的自适应控制 *

姜偕富^{1,2}, 费树岷¹, 冯纯伯¹

(1. 东南大学 自动化研究所, 南京 210096; 2. 淮阴师范学院 数学系, 江苏淮阴 223001)

摘要: 对于存在状态时滞的线性时滞系统, 研究了无记忆与带记忆的复合状态反馈控制器的设计问题, 当滞后常数不能精确已知时, 首次提出了对时滞参数的自适应控制方案, 通过解相应的线性矩阵不等式(LMI)即能求得满足设计要求的对时滞参数自适应控制器. 最后给出了仿真实例以说明结论的有效性.

关键词: 时滞系统; 线性矩阵不等式(LMI); 内部渐近稳定性; 自适应控制; 带记忆反馈

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Memory feedback control for linear time-delay system with adaptation to delay parameter

JIANG Xie-fu^{1,2}, FEI Shu-min¹, FENG Chun-bo¹

(1. Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. Mathematics Department, Huaiyin Teacher's College, Jiangsu Huaiyin 223001, China)

Abstract: The controller design of linear time delay system with delayed state is derived via compound memory and memoryless feedback. When the delay constant is not precisely known for linear delay system, the feedback control with adaptation to delay parameter is first given. The adaptive controller, which satisfied the requirement of design, is obtained by solving an LMI. Finally an example is presented to show the effectiveness of our results.

Key words: time-delay systems; linear matrix inequality(LMI); asymptotic stability; adaptive control; memory feedback control

1 引言(Introduction)

线性时滞系统的研究由于其具有重要的理论和实际意义历来是控制理论界研究的热点之一. 目前, 线性时滞系统控制器的设计主要采用求解 Riccati 型矩阵方程(或不等式)^[1-6]、线性矩阵不等式(LMI)^[7-10]等来设计相应的控制器. 绝大多数反馈控制律的实现都采用无记忆反馈控制^[5-10], 它对于滞后影响较小或滞后常数本身很小的系统较为有效, 但对于滞后影响较大的系统^[2]来说, 有时就显得无能为力. 因而带记忆反馈控制的设计问题被提出^[1,2], 这种控制器设计方案可以控制某些用无记忆反馈控制器无法控制的系统^[2], 因而具有一定的理论与应用价值. 但是文[1]并没有具体给出控制器的设计方案, 文[2]虽然具体给出了控制器设计方案, 但由于其设计过程首先是通过设计系统中的记忆项来减小系统中滞后的影响, 然后再设计无记忆反馈控制项, 使得整个设计满足要求, 其带记忆项的

控制器设计带有很大的盲目性. 本文基于线性矩阵不等式方法, 当滞后常数精确已知时, 给出了带记忆的状态反馈控制器设计方案, 克服了文[2]中对记忆项控制设计的盲目性及参数调整的麻烦, 在一定程度上解决了用无记忆状态反馈控制器存在的缺陷. 然而, 在目前设计带记忆的状态反馈控制器却要求时滞常数是精确已知的, 这在实际工程中是难以做到的. 因而尽管带记忆状态反馈控制具有一定的优点, 但在实际问题中难以实现. 解决这一问题的途径之一是利用滞后的估计值来设计带记忆状态反馈控制器^[11], 然而控制器的存在性与滞后常数估计的准确性有关, 同样也具有一定的局限性.

本文针对实际问题中可能出现的时滞常数不能精确已知的缺点, 对时滞参数已知其上界的线性时滞系统, 首次提出一种对时滞参数的自适应控制方案, 基于线性矩阵不等式方法, 采用无记忆与记忆的复合状态反馈控制, 其中带记忆反馈中的时滞量为

* 基金项目: 国家攀登计划(970211017), 国家自然科学基金(69934010, 60074015)和东南大学-南瑞继保公司学位论文基金资助项目.
收稿日期: 2000 - 09 - 26; 收修改稿日期: 2001 - 04 - 17.

实际量的实时估计值,且控制器的存在性与滞后常数精确已知时相同.这使得我们对时滞系统设计带记忆反馈控制时不必已知时滞常数的精确值,只需估计时滞量的上界值.最后本文所给出的仿真示例也足以说明了本文所提出的对滞后参数自适应控制的有效性.

2 问题的提出(Problem statement)

考虑如下线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + Bu(t), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

式中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入向量, A, A_1, B 为具有适当维数的已知常数矩阵, $\tau \geq 0$ 为时滞常数, φ 为 $[-\tau, 0]$ 上的连续向量函数, 是系统(1)的初始状态, 即 $\varphi \in C[-\tau, 0]$.

本文研究的目的是: ① 当时滞常数 τ 精确已知时, 设计一个带记忆状态反馈控制策略

$$u(t) = F_1x(t) + F_2x(t-\tau), \quad (2)$$

使得如下闭环系统是渐近稳定的

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF_1)x(t) + (A_1 + BF_2)x(t-\tau), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

② 当滞后常数 τ 不能精确已知但已知其上界 τ^* 时, 设计一个带记忆的状态反馈控制策略

$$u(t) = F_1x(t) + F_2x(t-\hat{\tau}(t)). \quad (4)$$

其中 $\hat{\tau}(t)$ 为 τ 的估计值, 满足 $\hat{\tau}(t) \geq \tau, t \geq 0$ 以及设计对滞后常数 τ 的自适应律, 使得如下闭环系统是渐近稳定的

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF_1)x(t) + A_1x(t-\tau) + BF_2x(t-\hat{\tau}), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (5)$$

3 主要结论(Main results)

在叙述主要结果之前, 先给出下面的引理.

引理 1^[2] 对于任意适当维数的矩阵 X, Y 及正定矩阵 P , 有

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T P X + Y^T P^{-1} Y. \quad (6)$$

1) 首先我们假定滞后常数精确已知, 则可得如下结果.

定理 1 对给定的线性时滞系统(1), 如果存在矩阵 U, Y , 正定矩阵 X, V 满足如下线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{bmatrix} AX + BY + (AX + BY)^T & A_1V + BU & X \\ (A_1V + BU)^T & -V & 0 \\ X & 0 & -V \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

则存在形如(2)的状态反馈控制器使整个闭环系统(3)渐近稳定. 当(7)有解 U, Y, X, V 时, 控制器(2)的增益可取为 $F_1 = YX^{-1}, F_2 = UV^{-1}$.

证 如果取控制器形如(2), 则取闭环系统(3)的 Lyapunov 泛函为如下形式

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(\theta)Sx(\theta)d\theta. \quad (8)$$

式中 P, S 均为正定矩阵. 计算 $V(x_t)$ 沿着系统(3)的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= x^T(t)P(A + BF_1)x(t) + x^T(t)P(A_1 + BF_2)x(t-\tau) + x^T(t)(A + BF_1)^T Px(t) + x^T(t-\tau)(A_1 + BF_2)^T Px(t) + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) = [x^T(t) \quad x^T(t-\tau)]\Phi \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} P(A + BF_1) + (A + BF_1)^T P + S & P(A_1 + BF_2) \\ (A_1 + BF_2)^T P & -S \end{bmatrix}.$$

要使得 $\dot{V}(x_t) < 0$, 只要

$$\Phi < 0. \quad (9)$$

上述矩阵不等式两端同时乘以

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}.$$

其中: $X = P^{-1}, V = S^{-1}$, 可得如下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} (A + BF_1)X + X(A + BF_1)^T + XV^{-1}X & (A_1 + BF_2)V \\ V(A_1 + BF_2)^T & -V \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

根据 Schur 补定理, 矩阵不等式(10)等价于线性矩阵不等式(7), 其中: $Y = F_1X, U = F_2V$. 故(7)有解时系统(1)是渐近稳定的.

若取 $F_2 = 0$, 由定理 1 我们有如下推论.

推论 1 对于给定的线性时滞系统(1), 如果存在矩阵 Y 与对称正定矩阵 X, V 满足如下线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{bmatrix} AX + BY + (AX + BY)^T & A_1V & X \\ (A_1V)^T & -V & 0 \\ X & 0 & -V \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

则取无记忆反馈控制律

$$u(t) = F_1x(t) \quad (12)$$

时整个闭环系统(1)是内部渐近稳定的, 这时

$$F_1 = YX^{-1}.$$

注 1 比较线性矩阵不等式(7)与(11)可以看出,当(11)有解时(7)一定有解(这时只要取 U 为零矩阵即可),反之则不一定成立.这就是说(7)的可解性要比(11)好.这说明采用带记忆的状态反馈控制,可以解决无记忆状态反馈控制无法控制的系统.这一结论与文[2]的结论是完全一致的.

注 2 由于目前 LMI 的解法已比较成熟,不等式(7)与(11)可直接由 MATLAB 的 LMI 工具箱求解,不需调整任何参数,因而克服了文[2]中带记忆项控制的设计的盲目性与参数调整的麻烦.

注 3 形如(2)的带记忆状态反馈控制方案,其缺点是:当系统的时滞常数 τ 不能确切已知时,尽管可以假定状态 $x(t)$ 可量测,但 $x(t-\tau)$ 并不能量测,因而是不可实现的.这一问题可由下面的自适应方案来解决.

2) 其次,当滞后常数 τ 未知但其上界已知,我们有如下结果.

定理 2 对给定的线性时滞系统(1),如果 τ 的上界已知为 τ^* ,存在矩阵 U, Y , 正定矩阵 X, V 满足线性矩阵不等式(7),则可取形如(4)的带记忆状态反馈控制器,且对 τ 的自适应律可取为

$$\dot{\hat{\tau}}(t) = -\frac{1}{\gamma} x^T(t) \Phi x(t), \quad \hat{\tau}(0) > \tau^*, \quad (13)$$

$$\Phi \triangleq (A + BF_1)^T P_1^{-1} (A + BF_1) + A_1^T P_2^{-1} A_1 + (BF_2)^T P_3^{-1} (BF_2) + PBF_2(P_1 + P_2 + P_3)(BF_2)^T P.$$

其中 P_1, P_2, P_3 为任意给定的正定矩阵, $\gamma > 0$ 为待选定的常数使得 τ 的估计值 $\hat{\tau}(t)$ 满足: $\hat{\tau}(t) \geq \tau$, $\forall t \geq 0$, 这时整个闭环系统(5)是渐近稳定的且控制器(4)增益矩阵与定理 1 相同,即可取 $F_1 = YX^{-1}$, $F_2 = UV^{-1}$.

证 由(5)式可得

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A + BF_1)x(t) + (A_1 + BF_2)x(t - \tau) - \\ & BF_2[x(t - \tau) - x(t - \hat{\tau})] = \\ & (A + BF_1)x(t) + (A_1 + BF_2)x(t - \tau) - \\ & BF_2 \int_{-\hat{\tau}}^{-\tau} [(A + BF_1)x(t+s) + A_1x(t+s-\tau) + \\ & BF_2x(t+s-\hat{\tau})] ds. \end{aligned} \quad (14)$$

这时为了研究闭环系统(5)的渐近稳定性,取 Lyapunov 泛函为如下形式

$$V_1(x_t) = x^T(t) Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(\theta) Sx(\theta) d\theta +$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\hat{\tau}}^{-\tau} \int_{t+\theta}^t x^T(s) (A + BF_1)^T P_1^{-1} (A + BF_1) x(s) ds d\theta + \\ & \int_{-\hat{\tau}}^{-\tau} \int_{t+\theta-\tau}^t x^T(s) A_1^T P_2^{-1} A_1 x(s) ds d\theta + \frac{1}{2} \gamma (\hat{\tau} - \tau)^2 + \\ & \int_{-\hat{\tau}}^{-\tau} \int_{t+\theta-\hat{\tau}}^t x^T(s) (BF_2)^T P_3^{-1} (BF_2) x(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

式中 P_i, P, S ($i = 1, 2, 3$) 均为正定矩阵, γ 为选定的正常数.由(13)式可以看出显然有 $\dot{\hat{\tau}}(t) \leq 0$, 则 $V_1(x_t)$ 沿着系统(14)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) \leq & [x^T(t) \quad x^T(t - \tau)] \Phi \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix} + (\hat{\tau} - \tau) \{ \gamma \dot{\hat{\tau}} + \\ & x^T(t) [(A + BF_1)^T P_1^{-1} (A + BF_1) + A_1^T P_2^{-1} A_1 + \\ & (BF_2)^T P_3^{-1} (BF_2) + PBF_2(P_1 + P_2 + P_3)(BF_2)^T P] x(t) \}. \end{aligned}$$

以上推导过程中利用了引理 1. 于是,若取 τ 的估计值 $\hat{\tau}(t)$ 的自适应律为(13),则由定理 1 可知当线性矩阵不等式(7)有解时, $\dot{V}_1(x_t) < 0$, 即系统(5)是渐近稳定的.

下面我们说明定理 1 中 γ 的存在性.

注 4 当闭环系统(5)渐近稳定时,由 $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) 及(13)式可知 $\dot{\hat{\tau}}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). 因此由 $\hat{\tau}(t)$ 的单调性且 $\hat{\tau}(t) \geq 0$ 得: $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\tau}(t) = \tau_\infty$ 存在,且

$$\tau_\infty = \hat{\tau}(0) - \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} x^T(t) \Phi x(t) dt \triangleq \hat{\tau}(0) - \frac{1}{\gamma} N(\varphi).$$

由于 $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), 故存在常数 $M, \lambda > 0$, 使 $\|x(t)\| < Me^{-\lambda t} \|\varphi\|, \forall t \geq 0$, 其中 M 是由系统参数决定的与初始值 φ 无关的常数,因而

$N(\varphi) = \int_0^{+\infty} x^T(t) \Phi x(t) dt \leq \frac{1}{2\lambda} M^2 \|\Phi\| \cdot \|\varphi\|^2$, 故 $\varphi \in C_R[-\tau, 0] = \{\varphi \in C[-\tau, 0], \|\varphi\| \leq k\}$ 时, $N(\varphi)$ 是可以估计的.因而只要

$$\gamma^{-1} \leq \max_{\varphi \in C_R[-\tau, 0]} \left\{ \frac{\hat{\tau}(0) - \tau}{N(\varphi)} \right\},$$

便有 $\tau_\infty \geq \tau$ 成立.由此可见,定理 2 中的正常数 γ 对于给定的系统和取值于有界集的初始函数确实是存在的且可以估计.

综上所述,针对时滞参数 τ 的自适应控制策略,我们提出如下步骤:

1) 求解线性矩阵不等式(7)得到控制器增益矩阵 F_1 与 F_2 及正定矩阵 $P = X^{-1}$;

2) 针对初始函数可能取值的有界集合 $C_R[-\tau, 0]$, 选取适当的正定矩阵 P_1, P_2, P_3 与常数 $\gamma > 0$, 从而由(13)求得 $\hat{\tau}(t)$;

3) 最后用带记忆的状态反馈控制器(4)及对滞

后参数的自适应律(13),构成闭环系统(5).由定理2可知(5)是渐近稳定的.

4 仿真示例(Simulation example)

考虑文[2]中的线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} u(t).$$

与文[2]中一样我们取时滞常数 $\tau = 0.8$,且取 $\hat{\tau}(0) = 1.2$.对于这样一个系统,如果采用文[3]的无记忆状态反馈控制器设计方案,将得不到一个镇定系统的控制器.如果采用文[2]的带记忆状态反馈控制器设计方案,虽然可以得到一个镇定系统的控制器,但在文[2]的设计中 F_2 的选取带有很大的盲目性,且文[2]中的仿真结果要求 τ 的值精确已知,当 τ 不能精确已知时实现起来有一定的困难.这时,如果采用本文关于 τ 的自适应控制器设计方案,通过解线性矩阵不等式(7)可以得到带记忆的状态反馈控制律为

$$u(t) = [7.3981 \quad -4.0132 \quad -7.6281]x(t) + [-0.5154 \quad -0.4061 \quad -1.0359]x(t-\hat{\tau}(t)).$$

关于 τ 的自适应控制律为:

$$\dot{\hat{\tau}}(t) = -x^T(t)\Phi_1 x(t), \hat{\tau}(0) = \tau^*.$$

其中

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.3209 & -0.1837 & -0.3500 \\ -0.1837 & 0.1155 & 0.2066 \\ -0.3500 & 0.2066 & 0.4105 \end{bmatrix}.$$

当 τ 精确已知时,其仿真结果如图1所示;当 τ 不能精确已知但已知其上界为 τ^* 时,其仿真结果如图2所示,这时 $\hat{\tau}(t)$ 的变化如图3所示.

其中初始函数选为:

$$x_0 = [2\sin\hat{t} \quad -3\cos\hat{t} \quad 4\sin\hat{t} + 3\cos\hat{t}], \\ \hat{t} = 4\pi(t-\tau)/\tau, t \leq 0,$$

步长为0.01秒.且取: $\gamma = 10^4$, P_1, P_2, P_3 均为三阶单位矩阵.

从图2中可以看出,在大约经过4个时滞周期,系统的状态就进入稳态区了.比较图1与图2可以看出,当时滞常数不能精确已知时,其仿真结果与滞后常数精确已知时的仿真结果相比没有太大的变化,这说明当时滞常数不能精确已知时,本文的对时滞参数的自适应控制器设计方案具有很好的优越性.

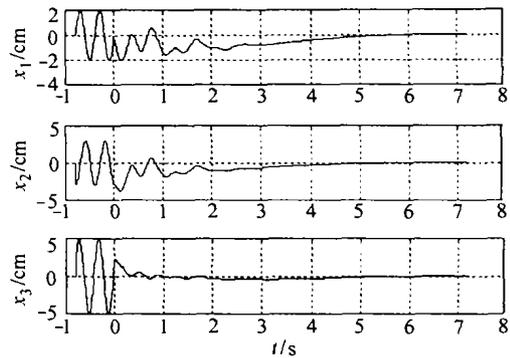


图1 滞后常数精确已知时的仿真结果

Fig. 1 Simulation results if the delay is available

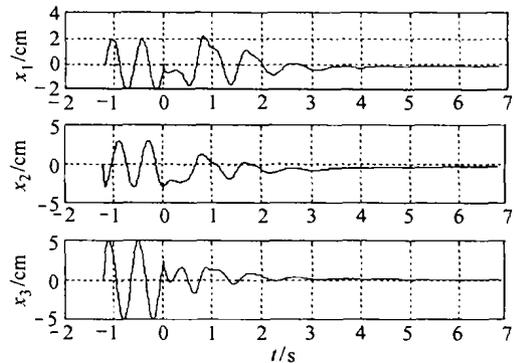


图2 滞后常数不能精确已知时的仿真结果

Fig. 2 Simulation results if the delay is not available

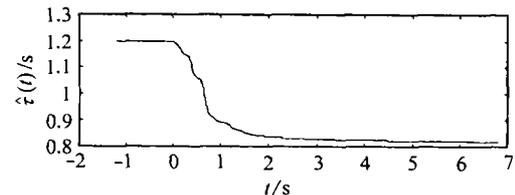


图3 滞后 $\hat{\tau}(t)$ 的变化曲线

Fig. 3 The variation of delay $\hat{\tau}(t)$

注5 在上述仿真过程中, P_1, P_2, P_3 均取为三阶单位矩阵.事实上,由上面的证明过程可以看出,对于给定的线性时滞系统,只要相应的线性矩阵不等式(7)有解,无论 P_1, P_2, P_3 取什么样的正定矩阵,所求得的使(1)的闭环系统是渐近稳定的控制器都是不变的.然而对于 P_1, P_2, P_3 的不同选择,它们所对应的仿真曲线会有所不同.

5 结语(Conclusion)

本文基于线性矩阵不等式方法,通过求解线性矩阵不等式(7),当滞后常数精确已知时即可求得相应的带记忆状态反馈控制器(2);当滞后常数不能精确已知时,即可求得相应的带记忆状态反馈控制器(4)及对时滞参数的自适应控制律(13).通过仿真示例可以看出,本文的控制器设计方案当时滞常数未知时容易实现,具有很好的优越性.

参考文献(References)

- [1] Tian Lianjiang, Gao Weibing, Cheng Mian. On the robust stabilization of uncertain time-delay system [J]. Control Theory and Applications, 1993, 10(6): 718 - 723
- [2] Jiang Xiefu, Fei Shumin, Feng Chun-bo. The H_∞ control of linear time-delay systems [J]. Control and Decision, 1999, 14(6):712 - 715
- [3] Han Ho Choi, Myung Jin Chung. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control [J]. Automatica, 1995, 31(6):917 - 919
- [4] Wang Jingcheng, Su Hongye, Jin Jianxiang, et al. Robust H_∞ controller design for linear time-varying uncertain systems with delayed state and control [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(2):257 - 262 (in Chinese)
- [5] Yang Fuwen. H_∞ state feedback control for time delay systems [J]. Control and Decision, 1997, 12(1):68 - 72
- [6] Kokame H, Kobayashi H, Mori T. Robust H_∞ performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(2):223 - 226
- [7] Niculescu S I. H_∞ memoryless control with an α -stability constraint for time-delay systems: an LMI approach [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998, 43(5):739 - 743
- [8] Yu Li, Chu Jian. An LMI approach to guaranteed cost of control of linear uncertain time-delay systems [J]. Automatica, 1999, 35(6): 1155 - 1159
- [9] Li Xi, Guay M, Huang B, et al. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear systems with input delay [A]. Proceedings of the American Control [C]. San Diego, USA, 1999, 800 - 804
- [10] Carlos E, De Souza, Li Xi. Delay-dependence robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems [J]. Automatica, 1999, 35(7):1313 - 1324
- [11] Jiang Xiefu, Fei Shumin, Feng Chun-bo. Delay-dependent feedback control for linear time-delay system [J]. J. of Southeast University, 2000, 30(2):62 - 66

本文作者简介

姜信富 1963年生. 1985年毕业于苏州大学数学系, 1999年3月获硕士学位, 2001年12月获东南大学工学博士学位, 现在清华大学自动化系从事博士后研究工作. 主要研究兴趣: 时滞系统的控制与综合, 自适应控制, 鲁棒控制以及 H_∞ 控制等. Email: jiangxf@tsinghua.org.cn

费树岷 1961年生. 1985年获安徽大学理学硕士学位, 1995年获北京航空航天大学工学博士学位, 1995年至1997年在东南大学自动化所从事博士后研究工作. 现为东南大学自动化所教授. 主要研究兴趣: 非线性控制系统设计与综合, 鲁棒控制, 自适应控制, 时滞系统的设计与综合等.

冯纯伯 见本刊2002年第3期第328页.