

文章编号: 1000-8152(2002)05-0713-07

机器人 LFT 变增益 H_∞ 控制

虞忠伟, 陈辉堂

(同济大学 信息与控制工程系, 上海 200092)

摘要: 针对平面两关节直接驱动机器人, 基于 LMI 技术提出一种设计能保证在整个运动范围内始终具有很好动态性能的 LFT 变增益 H_∞ 控制器的新方法. 将机器人系统转化为以两关节夹角余弦值为变参数的 LPV 模型并表示为关于变参数的 LFT 结构, 利用变参数的测量值设计具有相同 LFT 结构的 LPV H_∞ 控制器, 将此控制器的设计等价于以变参数为不确定项的 LTI 鲁棒控制器的设计并给出控制器可解的 LMIs 条件, 然后归纳出获得控制器的求解方法. 此控制器既克服了传统变增益控制器的缺陷, 又利用变参数的测量值降低了控制器设计的保守性. 实验结果验证了此控制器的有效性和先进性.

关键词: 机器人; LFT; 变增益 H_∞ 控制; LMI

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A

LFT gain scheduled H_∞ control for a robotic manipulator

YU Zhong-wei, CHEN Hui-tang

(Department of Information and Control Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A new approach to design an LFT gain scheduled H_∞ controller guaranteeing good dynamic performance in the whole operation range for a planar two-joint direct drive robotic manipulator was presented. The robot system was translated into an LPV (linear parameter varying) model taking the cosine of joint between two joints as the varying parameter. This LPV model was expressed as LFT structure about the varying parameter. Using the measured value of the varying parameter, the LPV H_∞ controller was designed with the same LFT structure. The controller design was equivalent to the robust LTI controller design taking the varying parameter as uncertainty term. The solvable LMIs (linear matrix inequalities) condition of the designed controller was given and the solved method to obtain the controller was induced. The designed controller not only overcomes the limitation of the conventional gain scheduled controller, but also reduces the conservation via the measured varying parameter. Experiment results prove the effectiveness and advancement of the designed controller.

Key words: robot; LFT(linear fractional transformation); gain scheduling H_∞ control; LMI(linear matrix inequality)

1 前言(Introduction)

变增益(gain scheduling)控制在实际应用中被证明是非常有效的^[1,2], 机器人作为一个强耦合、非线性的系统, 动力学特性随着其几何特性和惯量的不同而改变, 同时, 运动中存在动态不确定和外部干扰, 为保证机器人在整个运动范围内具有很好的动态性能, 控制器设计需结合两方面目标: 一是干扰衰减和鲁棒稳定; 二是控制器动态应随机器人几何特性和惯量实时调整. 第一个目标可用 H_∞ 综合技术加以解决^[3], 第二个目标就需要利用变增益技术^[4]. 但传统变增益控制^[5-7]不仅在设计和执行时复杂, 而且对其全局性能缺乏理论证明, 同时只适合系统状态变化缓慢的对象. 本文引入了 LFT(linear frac-

tional transformation)技术, 将机器人系统转化为以关节位置的函数为变参数的 LPV(linear parameter varying)模型并表示为关于变参数的 LFT 结构, 从减少控制器设计的保守性出发, 利用变参数设计一种具有同样 LFT 结构的 LPV H_∞ 控制器, 其动态随着变参数测量值平滑地变化, 从而克服了传统变增益控制的缺点, 具有处理快速变化系统的能力, 同时它的自适应特性使控制器又具有很高的动态性能. 本文将用到 LFT 的两种形式: 对于适当维矩阵 R 和 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 定义上 LFT 为 $F_u(S, R) = S_{22} + S_{21}R(I - S_{11}R)^{-1}S_{12}$, 下 LFT 为 $F_l(S, R) = S_{11} + S_{12}R(I - S_{22}R)^{-1}S_{21}$.

2 机器人系统的 LPV 转化及其 LFT 表示 (LPV transformation of a robotic system and its LFT expression)

图 1 所示的平面两关节直接驱动机器人,其动力学方程表示为^[8]:

$$\begin{bmatrix} a & b \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ b \cos(\theta_2 - \theta_1) & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ b\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中

$$a = 5.6794 \text{kg} \cdot \text{m}^2, b = 1.4730 \text{kg} \cdot \text{m}^2, c = 1.7985 \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

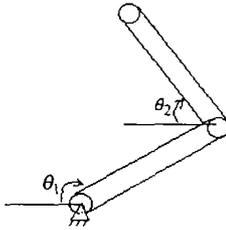


图 1 直接驱动机器人示意图

Fig. 1 The direct-drive robotic manipulator

利用雅可比线性化将机器人动力学方程(1)在平衡族 $X_e = (\theta_{1e} \ \theta_{2e} \ \dot{\theta}_{1e} \ \dot{\theta}_{2e})^T = (\theta_{1e} \ \theta_{2e} \ 0 \ 0)^T, \tau_e = (0 \ 0)^T$ 线性化为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{c}{M_e} & -\frac{b \cos(\theta_{2e} - \theta_{1e})}{M_e} \\ -\frac{b \cos(\theta_{2e} - \theta_{1e})}{M_e} & \frac{a}{M_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \theta_1 - \theta_{1e}, \hat{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_{2e}, \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{1e} = \dot{\theta}_1, \dot{\hat{\theta}}_2 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{2e} = \dot{\theta}_2, \\ \hat{\tau}_1 &= \tau_1 - \tau_{1e} = \tau_1, \hat{\tau}_2 = \tau_2 - \tau_{2e} = \tau_2, \\ M_e &= ac - b^2 \cos^2(\theta_{2e} - \theta_{1e}). \end{aligned}$$

因 $ac \gg b^2$, 所以 $M_e \approx ac$, 这样式(2)写为状态空间的形式为:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \cos(\theta_{2e} - \theta_{1e}) \\ -\frac{b}{ac} \cos(\theta_{2e} - \theta_{1e}) & \frac{1}{c} \end{bmatrix},$$

$$x = (\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \dot{\hat{\theta}}_1 \ \dot{\hat{\theta}}_2)^T, u = (\hat{\tau}_1 \ \hat{\tau}_2)^T.$$

从式(3)知矩阵 B 为 $\cos(\theta_{2e} - \theta_{1e})$ 的线性函数, 而 $\theta_{2e} - \theta_{1e}$ 是图 1 中关节 1, 2 的夹角, 它决定了式(3)的动态特性, 实际中可以以 θ_1 和 θ_2 的测量值作为平衡点来对系统(3)进行线性化, 这样随着 θ_1 和 θ_2 的变化, 式(3)是关于 $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ 的连续 LPV 系统, 本文就是要利用不同夹角处的 $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ 值来设计变增益控制器, 以提高控制性能. 设 $r(t) = \cos(\theta_{2e} - \theta_{1e})$, 图 1 可知 $\theta_{2e} - \theta_{1e} \in [-\pi, 0]$, 则 $r(t) \in [r_{\min}, r_{\max}] = [-1, 1]$. (3) 式中 B 可写为 $B = B_2 + rB_r$,

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{ac} \\ -\frac{b}{ac} & 0 \end{bmatrix}.$$

设 $z_r = u, w_r = rz_r$, 则式(3)的 LPV 系统可表示为关于变参数 $r(t)$ 的 LFT 结构:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_r w_r + B_2 u, \\ z_r = u, \\ w_r = rz_r, (|r| < 1). \end{cases} \quad (4)$$

3 LFT 变增益 H_∞ 控制器设计 (LFT gain scheduled H_∞ controller design)

3.1 控制器结构 (The controller structure)

设干扰项 $w(t)$ 为模型误差、动态不确定和外部干扰引起的等价扰动, 性能指标 $z(t)$ 表示对干扰 $w(t)$ 的扰动抑制性能, (4) 式可扩展为:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_r w_r + B_1 w + B_2 u, \\ z_r = C_r x + D_r w_r + D_{r1} w + D_{r2} u, \\ z = C_1 x + D_1 w_r + D_{11} w + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_2 w_r + D_{21} w + D_{22} u, \\ w_r = rz_r, (|r| < 1). \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{rr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{r1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{r2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{q_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{1r} = 0_{6 \times 2}, D_{11} = 0_{6 \times 2}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{\rho_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho_2} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{2r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$q_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 和 $\rho_j \geq 0 (j = 1, 2)$ 为性能指标加权系数. 性能指标系数矩阵 C_1, D_{1r}, D_{11} 和 D_{12} 的获得是由于要求对任意扰动 $w \in L_2[0, +\infty)$, 闭环系统均具有 H_∞ 性能 γ , 即要求

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 + q_4 x_4^2 + \rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2) dt < \gamma \int_0^\infty w^T w dt.$$

由式(5), 可得出:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ D_{1r} \\ D_{2r} \end{bmatrix} r (I - D_{rr} \cdot r)^{-1} [C_r \quad D_{r1} \quad D_{r2}] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} = Fu(P, r) \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} D_r & C_r & D_{r1} & D_{r2} \\ B_r & A & B_1 & B_2 \\ D_1 & C_1 & D_{11} & D_{12} \\ D_2 & C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}.$$

式(6)表明变参数 $r(t)$ 以不确定项的形式从系统(3)中分离出来, 使得原系统(3)等价为一具有不确定项 r 的 LTI 系统 P , 为了减少控制器设计的保守性, 本文利用变参数 $r(t)$ 的测量值设计下列同样具有 LFT 结构的 LPV 控制器:

$$u = F_1(K, r)y. \quad (7)$$

其状态空间形式为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_K(r)x_K(t) + B_K(r)y(t), \\ u(t) &= C_K(r)x_K(t) + D_K(r)y(t). \end{aligned} \quad (8)$$

图 2 为具有 LFT 结构的 LPV 控制器结构图, 它可等价于图 3, 其中 P_a 为增广对象. 因此图 2 的设计 LFT-LPV 控制器问题就转换为了具有对角不确定块的鲁棒控制问题, 即在不确定块 $\begin{bmatrix} r(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{bmatrix}$ 条件下, 求解一 LTI 控制器 K (设为全阶), 使得 LFT-LPV 控制器(7)满足:

- i) 闭环系统在变参数 $r(t)$ 的整个变化范围内均稳定;
- ii) 闭环系统具有 H_∞ 性能 γ .

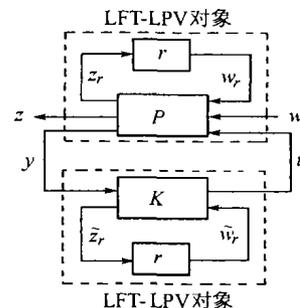


图 2 LFT-LPV 变增益控制器结构
Fig. 2 LFT-LPV gain scheduled controller structure

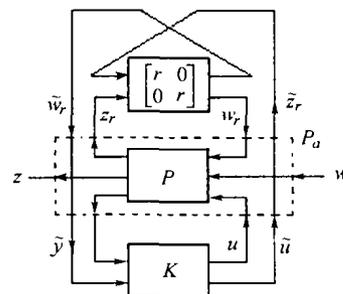


图 3 图 2 的等价结构
Fig. 3 The equivalent structure of Fig. 2

图 3 表明 LTI 控制器 K 的实现应具有下列形式:

$$K(s) = \begin{bmatrix} D_{K11} & D_{K1r} \\ D_{K1} & D_{K1r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{K1} \\ C_{Kr} \end{bmatrix} (sI - A_K)^{-1} [B_{K1} \quad B_{Kr}]. \quad (9)$$

其中 A_K 的阶数与 A 相同. 结合(7), (9)式, 式(8)的

LFT-LPV 控制器的状态空间矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A_K(r) & B_K(r) \\ C_K(r) & D_K(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_{K1} \\ C_{K1} & D_{K11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{Kr} \\ D_{K1r} \end{bmatrix} r(t) (I - D_{Krr}(t))^{-1} [C_{Kr} \quad D_{K1r}]. \quad (10)$$

3.2 控制器可解性条件 (Solvable conditions of controller)

3.2.1 相关引理 (Related lemmas)

根据小增益理论^[9], 对 LFT-LPV 控制问题的求解需定义与不确定参数 $r(t)$ 相应的比例集 $L_r = \{L > 0: L_r(t) = r(t)L, \forall t > 0\}$, 则其相似比例集即与不确定块 $\begin{bmatrix} r(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{bmatrix}$ 相应的比例集 (记为 $L_{r\oplus}$) 应为:

$$L_{r\oplus} = \left\{ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0: L_1, L_3 \in L_r, L_2 r(t) = r(t)L_2, \forall t > 0 \right\}. \quad (11)$$

引理 1^[9] 对于不确定参数 $r(t)$, 与其相应的相似比例集为 $L_{r\oplus}$, 如果存在比例矩阵 $L \in L_{r\oplus}$ 和 LTI 控制器 K 使得图 3 闭环系统 $F_1(P_a, K)$ 稳定且满足

$$\left\| \begin{bmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} F_1(P_a, K) \begin{bmatrix} L^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma.$$

那么 $F_1(K, r)$ 为 γ 次优变增益 H_{∞} 控制器.

3.2.2 可解性条件 (Solvable conditions)

定理 1 对于 LFT-LPV 对象 (5), 假设 N_X 和 N_Y 分别表示 $[B_2^T \quad D_{r2}^T \quad D_{12}^T]$ 和 $[C_2 \quad D_{2r} \quad D_{21}]$ 零空间的基, 如果存在对称矩阵对 (X, Y) 和 (L_3, J_3) 满足下列 LMIs:

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_r^T & XC_1^T & B_r J_3 & B_1 \\ C_r X & -\gamma J_3 & 0 & D_{rr} J_3 & D_{r1} \\ C_1 X & 0 & -\gamma I & D_{r1} J_3 & D_{11} \\ J_3 B_r^T & J_3 D_{rr}^T & J_3 D_{r1}^T & -\gamma J_3 & 0 \\ B_1^T & D_{r1}^T & D_{11}^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Y + YA & YB_r & YB_1 & C_r^T L_3 & C_1^T \\ B_r^T Y & -\gamma L_3 & 0 & D_{rr}^T L_3 & D_{r1}^T \\ B_1^T Y & 0 & -\gamma I & D_{r1}^T L_3 & D_{11}^T \\ L_3 C_r & L_3 D_{rr} & L_3 D_{r1} & -\gamma L_3 & 0 \\ C_1 & D_{1r} & D_{11} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (14)$$

$$L_3 \in L_r, J_3 \in L_r, \begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} > 0. \quad (15)$$

那么存在 LFT-LPV 控制器 (7) 满足条件 i), ii).

证 由 3.1 节和引理 1 可知要得到 γ 次优 LFT-LPV H_{∞} 控制器 (7), 只要对图 3 的不确定块

$\begin{bmatrix} r(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{bmatrix}$ 条件下的增广对象 P_a 设计 γ 次优 LTI 控制器 K 即可, 为此对图 3 中的增广对象 P_a 定义:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= [\bar{w}_r \quad w_r \quad w]^T, \bar{z} = [\bar{z}_r \quad z_r \quad z]^T, \\ \bar{y} &= [\gamma \quad \bar{y}]^T, \bar{u} = [u \quad \bar{u}]^T. \end{aligned}$$

由 P 和图 3, (5) 式可改写为:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \bar{B}_1 \bar{w} + \bar{B}_2 \bar{u}, \\ \bar{z} = \bar{C}_1 x + \bar{D}_{11} \bar{w} + \bar{D}_{12} \bar{u}, \\ \bar{y} = \bar{C}_2 x + \bar{D}_{21} \bar{w} + \bar{D}_{22} \bar{u}. \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{B}_1 = [0 \quad B_r \quad B_1], \bar{B}_2 = [B_2 \quad 0], \\ \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_r \\ C_1 \end{bmatrix}, \bar{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{rr} & D_{r1} \\ 0 & D_{1r} & D_{11} \end{bmatrix}, \\ \bar{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ D_{r2} & 0 \\ D_{12} & 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & D_{2r} & D_{21} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (17)$$

LTI 控制器 K 的实现如 (9) 式, 其状态空间形式写为:

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K \bar{y}, \\ \bar{u} = C_K x_K + D_K \bar{y}. \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$B_K = [B_{K1} \quad B_{Kr}], C_K = \begin{bmatrix} C_{K1} \\ C_{Kr} \end{bmatrix}, D_K = \begin{bmatrix} D_{K11} & D_{K1r} \\ D_{Kr1} & D_{Krr} \end{bmatrix}.$$

记 $\Omega = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}$, 则由 (16), (18) 式, 闭环状态矩阵为:

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A_0 + \bar{B} \Omega \bar{C}, B_{cl} = B_0 + \bar{B} \Omega \bar{D}_{21}, \\ C_{cl} &= C_0 + \bar{D}_{12} \Omega \bar{C}, D_{cl} = \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} \Omega \bar{D}_{21}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{B}_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}, C_0 = [\bar{C}_1 \ 0], \\ \bar{D}_{12} = [0 \ \bar{D}_{12}], \bar{C} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix}, \bar{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_{21} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (19)$$

由引理 1 和比例有界实引理^[10], 为得到满足要求的 γ 次优 LTI 控制器 K , 只需: 存在 $X_d > 0$ 和相似比例矩阵 $L \in L_r$, 满足:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma L & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

上式可化为:

$$\Psi + P_{X_d}^T \Omega Q + Q^T \Omega^T P_{X_d} < 0. \quad (20)$$

其中

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 & X_{cl} B_0 & C_0^T \\ B_0^T X_{cl} & -\gamma L & \bar{D}_{11}^T \\ C_0 & \bar{D}_{11} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix},$$

$$P_{X_d} = [\bar{B}^T X_{cl} \ 0 \ \bar{D}_{12}^T], Q = [\bar{C} \ \bar{D}_{21} \ 0].$$

由文[10], (20)式有解 Ω 的充要条件为:

$$W_{P_{X_d}}^T \Psi W_{P_{X_d}} < 0, \quad (21)$$

$$W_Q^T \Psi W_Q < 0. \quad (22)$$

其中 $W_{P_{X_d}}, W_Q$ 分别为 P_{X_d} 和 Q 的零空间的基.

$$\text{因 } P_{X_d} = H \begin{bmatrix} X_{cl} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, H = [\bar{B}^T \ 0 \ \bar{D}_{12}],$$

所以 P_{X_d} 零空间的基 $W_{P_{X_d}}$ 又可表示为: $W_{P_{X_d}} =$

$$\begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} W_H, W_H \text{ 为 } H \text{ 的零空间的基. 因此, (21)}$$

式又可写为:

$$W_H^T \Phi W_H < 0. \quad (23)$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} A_0 X_{cl}^{-1} + X_{cl}^{-1} A_0^T & B_0 & X_{cl}^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\gamma L & \bar{D}_{11}^T \\ C_0 X_{cl}^{-1} & \bar{D}_{11} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix}.$$

对 X_{cl} 和 X_{cl}^{-1} 进行分块:

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & E \end{bmatrix}, X_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & F \end{bmatrix}. \quad (24)$$

其中各分块矩阵均与 A 同阶.

设 $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ 为 $[\bar{B}_2^T \ \bar{D}_{12}^T]$ 的零空间的基, 则结合

(19)式可知 H 的零空间的基可表示为 $W_H =$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ 0 & 0 \\ P_3 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \text{ 定义 } L^{-1} = J, \text{ (19), (24)式代入(23)式}$$

后, 可得:

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & X\bar{C}_1^T & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 X & -\gamma J & \bar{D}_{11} \\ \bar{B}_1^T & \bar{D}_{11}^T & -\gamma J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} < 0.$$

由 Schur 补^[10], 上式又可化为:

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & X\bar{C}_1^T & \bar{B}_1 J \\ \bar{C}_1 X & -\gamma J & \bar{D}_{11} J \\ \bar{J} \bar{B}_1^T & \bar{J} \bar{D}_{11}^T & -\gamma J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

由定义(11)式和引理 1, L, J 应具有下列形式:

$$L = \begin{bmatrix} \bar{L} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} \bar{J} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (26)$$

其中 $\bar{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} \in L_{r \oplus r}, \bar{J} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2^T & J_3 \end{bmatrix} \in L_{r \oplus r}.$

设 $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ 为 $[B_2^T \ D_{12}^T \ D_{12}^T]$ 的零空间的基, 则考

$$\text{虑(17)式后, } \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \text{ 因此由(17)}$$

和(26), (25)式等价:

$$\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & XC_1^T & B_3 J_3 & B_1 \\ C_r X & -\gamma J_3 & 0 & D_{r1} J_3 & D_{r1} \\ C_1 X & 0 & -\gamma I & D_{r1} J_3 & D_{11} \\ J_3 B_1^T & J_3 D_{r1}^T & J_3 D_{r1}^T & -\gamma J_3 & 0 \\ B_1^T & D_{r1}^T & D_{11}^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0.$$

上式即为(12)式。

同理,由(22)式可得到(13)式。

由(24)式,容易验证 X_{cl} 满足下列等式:

$$X_{cl}T_2 = T_1. \quad (27)$$

其中

$$T_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix}.$$

对不等式 $X_{cl} > 0$ 左乘 T_2^T 右乘 T_2 , 利用(27)式,

得到 $T_2^T T_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$, 即为(14)式。

因(26)式中 L, J 应满足 $LJ = I$, 所以 $\bar{L}J = I$, 容易验证 \bar{L} 满足下列等式:

$$\bar{L}V_2 = V_1. \quad (28)$$

其中 $V_2 = \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ J_3 & I \end{bmatrix}$, $V_1 = \begin{bmatrix} 0 & L_2 \\ I & L_3 \end{bmatrix}$.

对不等式 $\bar{L} > 0$ 左乘 V_2^T 右乘 V_2 , 利用(28)式,

得到 $V_2^T V_1 = \begin{bmatrix} J_3 & I \\ I & L_3 \end{bmatrix} > 0$, 即为(15)式。 证毕。

3.3 控制器求解(Solving controller)

根据定理1的证明过程,本文归纳出一种获得LFT-LPV控制器(7)的求解方法:

Step 1 根据定理1,利用MATLAB LMI Control Toolbox^[11]求出满足控制器可解条件(12)~(15)的 X, Y, L_3 和 J_3 ;

Step 2 计算 X_{cl} .

· 利用MATLAB SVD函数对 $I - XY$ 进行因式分解获得可逆方阵 M, N , 使得 $MN^T = I - XY$;

· 求解方程(27), 获得 X_{cl} ;

Step 3 计算 L, J , 由(26)式知需先计算 \bar{L}

· 利用MATLAB SVD函数对 $I - L_3 J_3$ 进行因式分解获得可逆方阵 L_2, J_2 , 使得 $L_2^T J_2 = I - L_3 J_3$;

· 求解方程(28), 获得 \bar{L} , 同时 $\bar{J} = \bar{L}^{-1}$;

Step 4 求解LMI(20), 得到其解为 Ω ;

Step 5 由(10)式可得满足设计要求的LFT-LPV控制器(7)。

4 实验结果(Experiment result)

实验中取性能指标中加权系数为:

$$q_1 = 2.25, q_2 = 9, q_3 = 1,$$

$$q_4 = 16, \rho_1 = 1.44, \rho_2 = 1.44.$$

利用MATLAB LMI Control Toolbox, 对定理1中的LMI利用mincx命令进行优化得到最优 $\gamma = 1.0324$, 按照3.3节可设计出LTI控制器(9)式, 得到满足要求的LFT-LPV H_∞ 控制器(10)式. 关节1的参考输入为频率为0.125Hz的方波, 关节2的参考输入为相同频率的正弦波, 即: $\theta_{2d} = 0.5 + 0.5\sin(0.25\pi t)$, 本文还实验了单一 H_∞ LTI控制器, 对两种控制器的控制性能进行比较, 比较结果见图4。

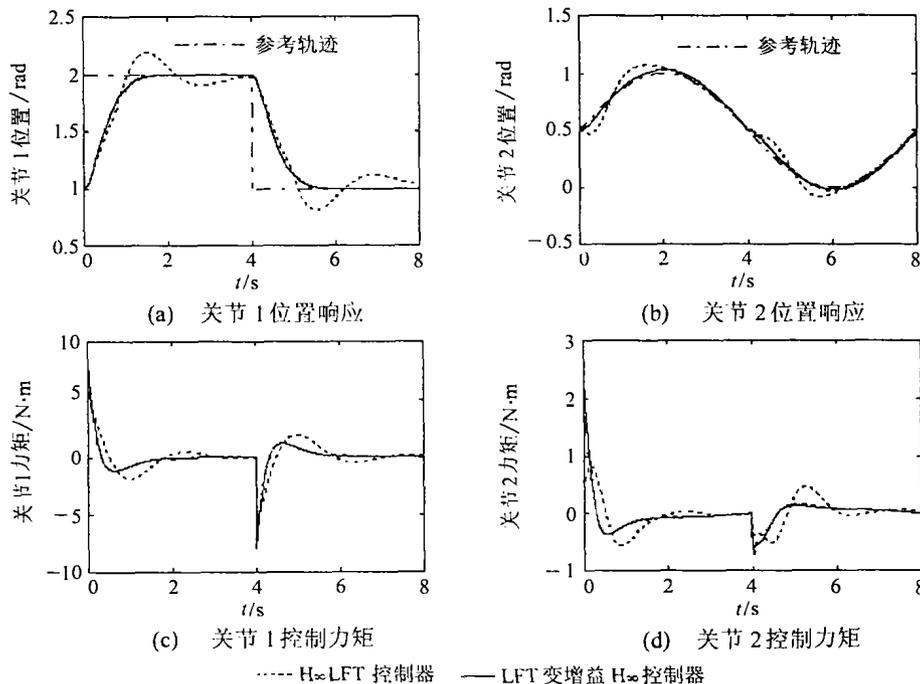


图4 实验结果
Fig. 4 Experiment result

图4(a)表明在LFT变增益 H_∞ 控制器作用下, 机器人阶跃响应无超调、运动平滑、上升时间较小,

同时系统在不同点具有很强的切换能力, 而 H_∞ LTI 控制器作用下的阶跃响应性能明显要差得多. 图4

(b)表明虽然关节 2 由于关节 1 位置的切换引起其负载的突然增加,但在 LFT 变增益 H_∞ 控制器作用下,机器人马上又跟上了参考输入,而在 H_∞ LTI 控制器作用下,机器人较大地偏离参考轨迹并需经过较长时间才能跟上参考输入,这是由于 LFT 变增益 H_∞ 控制器利用了变参数 $r(t)$ 的测量值实时调整控制器动态的结果。

5 结论(Conclusion)

本文通过引入 LFT 技术,在机器人系统转化为以两关节夹角余弦值为变参数的 LPV 模型的基础上将其表示为关于变参数的 LFT 结构,再利用变参数的测量值设计出具有相同 LFT 结构的 LPV H_∞ 控制器,理论上证明了此控制器能保证在机器人的整个运动范围内系统始终具有很好的性能,并将此 LFT-LPV 变增益控制器的设计等价于以变参数为不确定项的 LTI 鲁棒控制器的设计从而利用 LMI 方法得到了控制器可解的条件,简化了设计.此控制器既克服了传统变增益控制器计算量大、执行复杂、只适合状态变化缓慢的对象、理论上缺乏保证其全局性能的不足,又因利用了变参数的测量值大大降低了控制器设计的保守性.实验通过与 H_∞ LTI 控制器的控制性能进行比较,证明了本文设计的 LFT 变增益 H_∞ 控制器的先进性。

参考文献(References)

- [1] Apkarian P, Biannic J. Gain scheduled control of missile via linear matrix inequalities [J]. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 1995, 18(3): 532 - 538
- [2] Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled H_∞ control of lin-

ear parameter-varying systems: a design example [J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1251 - 1261

- [3] Doyle J C, Stein G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis [J]. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, 26(1): 4 - 16
- [4] Apkarian P, Adams R J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems [J]. *IEEE Trans. on Control System Technology*, 1997, 6(1): 21 - 32
- [5] Shamma J S, Athans M. Analysis of nonlinear gain scheduled control systems [J]. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, 35(8): 898 - 907
- [6] Shamma J S, Athans M. Gain scheduling: potential hazards and possible remedies [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1992, 12(3): 101 - 107
- [7] Jiang J. Optimal gain scheduling controller for a diesel engine [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1994, 14(4): 42 - 48
- [8] Yu Zhongwei, Chen Huitang. Friction adaptive compensation scheme based on sliding-mode observer [J]. *Robot*, 1999, 21(7): 562 - 568
- [9] Apkarian P. Gain scheduling via linear fractional transformations [J]. *Systems & Control Letters*, 1994, 22(2): 79 - 92
- [10] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to control [J]. *J. of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(2): 421 - 448
- [11] Gahinet P, Arkadii N, Laib A J, et al. The LMI control Toolbox [A]. *Proc. of 33rd Conf. on Decision and Control [C]*. Lake Buena Vista, FL, USA, 1994, 2038 - 2041

本文作者简介

虞忠伟 1973 年生. 1999 年于同济大学电气工程系获硕士学位,现为同济大学信息与控制工程系博士生. 主要研究方向为机器人变增益鲁棒控制,学习控制. Email: yuzhongwei7302@sina.com

陈辉堂 1933 年生. 1953 年毕业于上海交通大学,1956 年研究生毕业于上海交通大学工业企业电气化专业,现为同济大学信息与控制工程系教授,博士生导师. 研究方向为机器人控制与智能控制.