

一类离散切换系统的渐近稳定性*

张霄力, 刘玉忠, 赵 军

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘要: 利用多 Lyapunov 函数, 研究了一类由 m 个离散子系统构成的切换系统的渐近稳定性, 给出了该系统全局渐近稳定的两个充分条件. 仿真结果表明文中的结论是有效的.

关键词: 混合动态系统; 离散系统; 切换系统; 渐近稳定性; 多 Lyapunov 方法

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Asymptotic stability of a class of discrete switched systems

ZHANG Xiao-li, LIU Yu-zhong, ZHAO Jun

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: Switched systems consisting of a class of m -discrete subsystems are studied. Two sufficient conditions of asymptotic stability are given by using multi-Lyapunov functions. The simulations show the validity of the result.

Key words: hybrid dynamical systems; discrete systems; switched systems; asymptotic stability; multi-Lyapunov methods

1 引言(Introduction)

切换系统是一类重要的混合系统, 它可以看作是由几个微分方程及作用在其中的切换规则构成. 切换系统的稳定性是研究最为集中的问题, 目前已引起国内学者的广泛关注^[1]. 切换系统不同于以往的时间连续系统或离散时间系统, 它具有一些特殊的性质, 所以切换策略的选取是十分重要的. 如果各子系统存在共同的 Lyapunov 函数, 切换策略的选取有着相当宽的范围以使整个系统稳定. 文献[2]给出了共同 Lyapunov 函数存在的条件和切换策略的选取方式. 对于线性切换系统, 共同 Lyapunov 函数的存在性与任意切换策略下系统的稳定性几乎是等价的^[3]. 然而对于非线性切换系统, 存在共同 Lyapunov 函数这一条件往往过强, 很多系统不满足这一条件. 于是, 多 Lyapunov 函数方法被广泛地用于稳定性研究^[4,5].

现有的切换系统稳定性方面的研究主要针对各子系统是连续的情形, 对于离散的情形几乎未有结果报道. 本文研究了每个子系统都为离散系统的非线性切换系统的渐近稳定性, 得到了判断系统渐近稳定性的两个充分条件.

2 系统描述与主要结果(System description and main results)

考虑由 m 个离散子系统构成的切换系统

$$x[k+1] = f_i(x[k]), \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\}. \quad (1)$$

这里 $k \in E = \{h+i \mid i=0, 1, 2, \dots, h \geq 0\}$, $x[k] \in \mathbb{R}^n$, 切换系统满足每个 f_i 是全局 Lipschitz 连续的. 为叙述方便, 引入如下记号及定义: 对任意给定的初始时间 $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ 及初始值 $x_0 = x(\tau_0)$. 定义切换序列

$$S = \{x_0; (i_0, \tau_0), (i_1, \tau_1), \dots, (i_n, \tau_n), \dots, i_j \in M, \tau_j \in E\}. \quad (2)$$

(i_j, τ_j) 表示系统的动态沿着 $x[k+1] = f_{i_j}(x[k])$ ($k \in E$) 展开.

对任意 $j \in M$, 用 $S|j$ 表示第 j 个子系统 $x[k+1] = f_j(x[k])$ 打开或关闭的切换时间, 即

$$S|j = \{\tau_{2j_1}, \tau_{2j_1+1}, \tau_{2j_2}, \tau_{2j_2+1}, \dots, \tau_{2j_n+1} \dots \mid i_{2j_n} = j, \tau_{j_n} \in E\}. \quad (3)$$

定义在严格增加的时间序列 $T = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$

* 基金项目: 国家自然科学基金(79970114), 国家攀登计划(970211017), 国家留学回国人员基金和教育部及东北大学骨干教师基金资助项目.

收稿日期: 2000-05-08; 收修改稿日期: 2001-04-29.

$\{\tau_m \in E\}$ 上的时间集合

$$H(T) = \bigcup_j \{k \mid \tau_{2j} \leq k \leq \tau_{2j+1}, k \in E\} \quad (4)$$

表示第 j 个子系统在切换系统状态轨迹中所在的时间. 令 $B(r), \bar{B}(r)$ 分别表示欧氏空间中以原点为球心, r 为半径的球和闭球.

定义 1 称 $V(x)$ 是候选 Lyapunov 函数, 如果 $V(x)$ 是连续的, 正定的, 关于原点 $x = 0$ 具有连续偏导数.

定义 2 给定 R 中严格增加的时间序列 T , 称函数 $V(x)$ 是关于函数 f 及轨道 $x(\cdot)$ 的类 Lyapunov 函数, 如果存在正定函数 $W(x)$, 使

$$\text{i)} \quad \Delta V(x[k]) = V(x[k+1]) - V(x[k]) \leq -W(x[k]), \quad k \in H(T); \quad (5)$$

$$\text{ii)} \quad V(x[\tau_{2j+2}]) \leq V(x[\tau_{2j+1}]). \quad (6)$$

由上面给出的类 Lyapunov 函数定义, 可以得到下面的结果:

定理 1 假设 $V_i (i \in M)$ 是候选 Lyapunov 函数, 函数 $f_i(x)$ 满足 $f_i(0) = 0$, 若对每一个切换序列 S 及所有 i , V_i 均是在 $S \mid i$ 上关于 f_i 和 $x[\cdot]$ 的类 Lyapunov 函数, 则系统(1)是 Lyapunov 意义下渐近稳定的.

定理 1 的充分性是由第 i 个子系统的 Lyapunov 函数的严格单调非增性得到的, 下面我们给出离散切换系统渐近稳定的另一充分条件, 它的充分性是由不同子系统的 Lyapunov 函数单调性得到的:

首先取切换序列(2)在其第一、第二坐标上的投影序列, 得到指标序列

$$\Pi_1(S) = i_0, i_1, \dots, i_n, \dots \quad (7)$$

和切换的时间序列

$$\Pi_2(S) = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots \quad (8)$$

于是我们有下面的定理:

定理 2 假设 $V_i (i \in M)$ 是候选 Lyapunov 函数, 函数 $f_i(x)$ 满足 $f_i(0) = 0$, 若对任给 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 及所有 τ_0 , 存在切换序列(2), 使 $x_0 = x(\tau_0)$ 且存在一个正定函数 $Y(x)$ 和 $\tau_{\min} > 0$, 使得

$$\text{i)} \quad \tau_{\min} \leq \tau_j < \infty, \quad \forall \tau_j \in \Pi_2(S); \quad (9)$$

$$\text{ii)} \quad V_{i_{j+1}}(x[\tau_{j+2}]) - V_{i_j}(x[\tau_{j+1}]) \leq -Y(x[\tau_{j+1}]), \quad \forall i_j, i_{j+1} \in \Pi_1(S), \quad (10)$$

则系统(1)是全局渐近稳定的.

证 由于 $V_{i_{j+1}}(x[\tau_{j+2}]) - V_{i_j}(x[\tau_{j+1}]) < 0$ 对 $x[\tau_{j+1}], x[\tau_{j+2}]$ 都不为零, 所以 $\{V_{i_j}(x[\tau_{j+1}])\}$ 是严格单调减少的且非负, 于是有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_{i_j}(x[\tau_{j+1}]) = L \geq 0. \quad (11)$$

从而由极限的性质有

$$0 = L - L =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} V_{i_{j+1}}(x[\tau_{j+2}]) - \lim_{j \rightarrow \infty} V_{i_j}(x[\tau_{j+1}]) = \\ & \lim_{j \rightarrow \infty} [V_{i_{j+1}}(x[\tau_{j+2}]) - V_{i_j}(x[\tau_{j+1}])] \leq \\ & \lim_{j \rightarrow \infty} [-Y(x[\tau_{j+1}])] \leq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

则有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Y(x[\tau_{j+1}]) = 0. \quad (13)$$

由 $Y(x)$ 的正定性及其在 0 点的连续性知

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x[\tau_{j+1}] = 0. \quad (14)$$

3 仿真算例(Simulation)

考虑由下列两个离散子系统构成的切换系统

$$x[k+1] = F_i x[k], \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & -0.4 & -0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_2 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ -0.4 & 0.6 & -0.5 \\ 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

取 $Q = I$, 解 Lyapunov 方程: $F_i^T P_i F_i - P_i = -Q$, 分别得到相应的 Lyapunov 函数: $V_i = x^T P_i x$, 这里

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 3.6125 & 1.0699 & 0.3450 \\ 1.0699 & 2.1924 & 0.7376 \\ 0.3450 & 0.7376 & 2.2067 \end{pmatrix}, \\ P_2 &= \begin{pmatrix} 4.4010 & -1.1989 & 4.2008 \\ -1.1989 & 11.3825 & 1.8322 \\ 4.2008 & 1.8322 & 7.8349 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

切换规则取切换时间周期 $t = 0.1$ 为秒. 取初始值 $x_0 = (2, -2, 1)$, $t \in [0, 3]$, 可以验证切换系统(15)满足定理 1 的条件, 其状态响应的结果如图 1 所示.

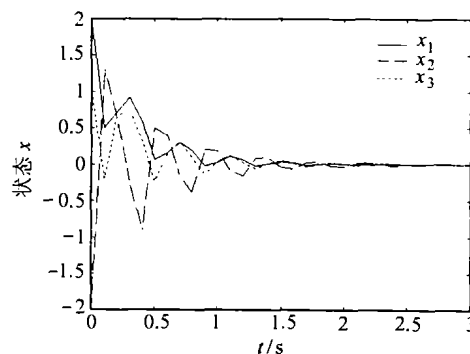


图 1 切换系统的状态响应

Fig. 1 The states respond of the switched systems

4 结论(Conclusion)

本文讨论了一类由 m 个离散子系统组成的切

换系统的渐近稳定性,给出了其在相应的切换策略下,保证系统渐近稳定的两个充分条件.最后对 $m = 2$ 时的系统进行了仿真计算,其结果验证了切换策略的有效性,从而提供了判断切换系统渐近稳定性的方法.

参考文献(References)

- [1] Xie Guangming, Zheng Dazhong. Controllability and reachability of linear switching systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(Suppl.):135-140 (in Chinese)
- [2] Narendra K S, Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A -matrices [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, 39(12):2469-2471
- [3] Shorten R N, Narendra K S. A sufficient condition for the existence of a common Lyapunov function for two second-order linear systems [A]. In Proceedings of the Conference on Decision and Control [C]. San Diego, California, USA, 1997, 3521-3522

- [4] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1998, 43(4):475-482
- [5] Peleties P, DeCarlo R A. Asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov-like functions [A]. In Proceedings of American Control Conference[C]. Boston, MA, USA, 1991, 1679-1684

本文作者简介

张霄力 1970 年生.2001 年在东北大学获工学博士学位,现在清华大学自动化系从事博士后研究工作.研究方向为混合系统.切换系统的稳定性研究,复杂非线性系统的结构研究等等. Email: zxl@cims.tsinghua.edu.cn

刘玉忠 1963 年生.2001 年在东北大学获工学博士学位,现在中国科学院沈阳自动化所从事博士后研究工作.研究方向为混合系统,切换系统的稳定性研究,复杂非线性系统的结构研究.

赵 军 1957 年生.东北大学信息科学与工程学院教授,博士生导师.现为中国自动化学会控制理论委员会委员.主要研究方向为复杂非线性系统结构研究,混合系统,切换系统稳定性研究.

(上接第 773 页)

(2):208-211 (in Chinese)

- [4] Dai L. Singular Control Systems [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- [5] Shen T L. Theory and Application of H_∞ Control [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996
- [6] Su H Y, Wang J C, Chu J. Output feedback stabilizing controller for linear time-varying uncertain systems with delayed state [J]. Control Theory & Applications, 1998, 15(6):939-944
- [7] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8):1196-1199
- [8] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge, UK:

Cambridge University Press, 1985

本文作者简介

谢湘生 1957 年生.1997 年在华南理工大学控制理论与应用专业获博士学位,现为广东工业大学系统工程研究所教授.目前主要研究:滞后系统、广义系统的基本理论、控制及其应用,系统工程在经济管理中的应用.

刘洪伟 1962 年生.1999 年在华南理工大学控制理论与应用专业获博士学位,现为广东工业大学系统工程研究所副教授.目前主要研究:随机系统基本理论、控制与应用,信息技术在经济管理中的应用.