文章编号：1000－8152(2002)06－0833－08

一类不确定非线性系统的输出反馈鲁棒自适应控制器的设计与分析*

杨昌利，阮荣耀
（华东师范大学 数学系，上海，200062）

摘要：考虑一类具有三角形结构和参数未知的不确定性非线性系统(1)．首先设计出一个稳定的滤波器，从而获得状态的实时估计；然后依此设计出一种用于跟踪参考信号的输出反馈自适应控制器．该控制器对系统的参数和状态的不确定性具有鲁棒性，能保证所建立的闭环系统的全局稳定性，并解决了 ϵ-跟踪问题．仿真结果表明，所设计的自适应控制器具有良好的跟踪性能，而且控制量在允许控制的范围之内．

关键词：非线性系统；不确定性；输出反馈；鲁棒自适应控制器；全局稳定性；ϵ-跟踪
中图分类号：O231.2　　**文献标识码**：A

Robust adaptive output-feedback controller design and analysis of a class of uncertain nonlinear systems

YANG Chang-li, RUAN Rong-yao
(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: A class of uncertain nonlinear systems (1) with a triangular structure and unknown parameters is considered. Firstly, a stable filter is designed, hence the real-time state estimation is gotten; and then a robust adaptive output-feedback controller is designed for tracking reference signal. The controller is robust to the uncertainties of both the parameter and the state of the systems, can guarantee the global stability of the resulting closed-loop system, and has solved the ϵ-tracking problem. The simulations show the good tracking effect of the designed adaptive controller, and the used data for determining the control action are in the range of the admissible control.

Key words: nonlinear systems; uncertainty; output-feedback; robust adaptive controller; global stability; ϵ-tracking

1　引言(Introduction)

近年来，非线性系统控制理论及其应用越来越受到人们的重视．许多研究考虑具有参数和结构不确定性的非线性控制系统的设计和分析，其中含参数不确定性非线性系统的 Backstepping 自适应控制问题已成为现代控制理论的主要热点之一[1～5]．这种非线性系统的 Backstepping 自适应控制方案按状态是否可测量而分为两类：一类是全状态反馈控制，另一类是输出反馈控制．

关于状态反馈控制方案，I. Kanellakopoulos 等人首创了 Backstepping 迭代设计方法，并使用该方法突破性地解决了一类非线性系统的自适应调节和跟踪问题，能保证所建立的闭环系统的全局稳定性，而且调节和跟踪具有渐近性[2～6]．文[7]针对存在有界扰动的情况首次解决了这类非线性系统鲁棒自适应控制的 ϵ-跟踪问题，使得跟踪绝对误差可以任意小．进一步，文[8]解决了具有一般不确定性非线性系统的状态反馈鲁棒自适应控制问题，也做到跟踪绝对误差可以任意小．

对于非线性系统的输出反馈自适应控制方案最初也是由 I. Kanellakopoulos 等人提出的，他们通过对线性系统自适应控制方法的推广，解决了一类非线性系统的输出反馈自适应控制问题[9,10]，但对系统的结构和非线性的增长速度有严格的限制．过后他们又自行改进，去掉了关于增长速度的限制[11]，但控制系统的结构仍受到不必要的限制，即只允许系统具有输出的非线性函数，而系统的阶数是特定的(限于考虑阶数为 5、相对阶为 3 的特殊非线性系统)．后来，R. Marino 和 P. Tomei 利用 Backstepping 设计方法给出崭新的输出反馈自适应控制方案[12,13]，去掉文[9～11]中所加的不必要限制，从而使得非线性系统的输出反馈自适应控制取得了突破

* 基金项目：上海市重点学科建设项目资助．
收稿日期：2001－02－16；收修改稿日期：2001－08－23．

性进展. 不过,在他们的自适应控制方案中,仅仅考虑模型参数的不确定性,没有考虑不可测干扰等其它不确定性. 文[14]针对存在参数不确定性和有界扰动的一类非线性系统,采用 Backstepping 设计方法,设计出一种输出反馈鲁棒自适应控制器,能保证闭环系统全局稳定,但无法保证跟踪精度,只能做到跟踪误差有界. 文[15]针对一类含有未知参数和有界扰动的非线性系统,设计出一种具有强鲁棒性的输出反馈自适应控制器,既能保证闭环系统的全局稳定性,又解决了 ε-跟踪问题.

以往的许多工作表明(例如见文[7~9]和[14,15]),采用 Backstepping 设计方法可以克服传统自适应控制设计对"高阶不确定性"所遇到的障碍,因而这种方法适用于解决一大类非线性系统的鲁棒自适应控制问题. 在实际系统中,有许多不确定性往往不能视为有界扰动,因此仅仅研究有界扰动下非线性系统的输出反馈控制是远远不够的. 本文将把文[15]的方法和结果推广到一类具有一般不确定性和参数未知的非线性系统(1). 我们提出一种简捷的直接设计方法,并在较弱的条件下,依此方法设计出一种适用于该类非线性系统的输出反馈鲁棒自适应控制器,而且既保证闭环系统的全局稳定性,又解决了 ε-跟踪问题.

2 系统的描述和假定(System descriptions and assumptions)

考虑非线性系统

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_{0i}(y) + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \phi_{ji}(y) + \varphi_i(x,t),$$
$$i = 1,\cdots,n-1, \tag{1a}$$

$$\dot{x}_n = \phi_{0n}(y) + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \phi_{jn}(y) + \sigma(y)u + \varphi_n(x,t), \tag{1b}$$

$$y = C^{\mathrm{T}}x. \tag{1c}$$

其中 $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别是系统的输入和输出,$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态,$\theta = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p$ 是未知的常数参数向量,$\phi_{ji}(y)(j = 0,1,\cdots,p; i = 1,2,\cdots,n)$ 和 $\sigma(y)$ 都是已知的非线性函数,$\varphi_i(x,t)(i = 1,\cdots,n)$ 是未知非线性函数,它表征系统状态及其变化率的不确定性,C 是已知的 n 维向量. 为了简单起见,本文只讨论 $C = [1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 的情况,于是式(1c)就变成 $y = x_1$. 在这种情况下,系统(1)的相对阶数恰好是 n,其零动态子空间蜕变成空集,因而系统(1)自然是一个非线性最小相位系统.

为了解决系统(1)的输出反馈鲁棒自适应跟踪控制问题,除了它自然满足最小相位条件外,还需作如下假定:

1) $\phi_{ji}(y)(j = 0,1,\cdots,p; i = 1,\cdots,n)$ 具有 $n-i$ 阶按段连续的偏导数,且在任何有限区间上有界;$\sigma(y)$ 也是按段连续的,它在任何有限区间上有界,且存在常数 $\delta > 0$,使得 $|\sigma(y)| \geqslant \delta, \forall y \in \mathbb{R}$.

2) 已知常数 P 是 $\|\theta\|$ 的上界,且对每一个未知函数 $\varphi_i(x,t)$,存在按段光滑的平方可积函数 $\mu_i(x_1,t) = \mu_i(y,t)$ 以及已知常数 Q_i 和 M_i 使得

$$|\varphi_i(x,t)| \leqslant Q_i|\mu_i(y,t)| + M_i, \quad i = 1,2,\cdots,n, t \in [0,\infty). \tag{2}$$

3) 参考信号 r 按段连续且有界,其导数 $\dot{r}, r^{(2)}, \cdots, r^{(n)}$ 也按段连续且有界.

注 1 假定 2)中要求非线性函数 μ_i 是平方可积的,这是对 φ_i 的一个限制性条件,但这种限制是相当微弱的. 实际上,只要 $\mu_i(y,t)$ 在 $y \in (-\infty,\infty)$ 的某一个有限区间上作为 $t \in [0,\infty]$ 的函数平方可积就行了,而且满足(2)的 Q_i, M_i 和 $|\mu_i|(i = 1,2,\cdots,n)$ 皆可以放大任意倍. 在定理 2 的证明中和第 6 节的仿真结果中将会看到,这完全不影响该闭环系统的全局稳定性,甚至几乎不影响输出跟踪的精度. 因此满足假定 2)的 φ_i 可以具有很一般的不确定性.

本文考虑只有输出 $y = x_1$ 可以直接测量的情况,在假定 1)~3)成立的前提下对系统(1)设计出输出反馈鲁棒自适应控制器,目的是在保证闭环系统全局稳定的同时解决所谓ε-跟踪问题:即对按段光滑的参考信号 r 和任意给定的常数$\varepsilon > 0$,设计出自适应控制器使得该闭环系统的所有信号全局有界,且存在有限的时间 $t(\varepsilon)$ 使得

$$|y(t) - r(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t(\varepsilon).$$

相应的 ε-调节问题可作为ε-跟踪问题的特例(即当 $r(t) \equiv 0$ 或常数的情况)看待,不另外再讨论.

注 2 本文所定义的 ε-跟踪问题类似于文[16]的 λ-跟踪问题,但研究的对象和方法完全不同于文[16],将给出更好的新结果.

3 滤波器的设计及其稳定性分析(Filter design and its stability analysis)

因为只有输出 $y = x_1$ 可以直接测量,所以必须设计一个滤波器来估计 $n-1$ 个状态分量 $x_2,\cdots,x_n$. 这里当然假定 $n \geqslant 2$,否则就不需要进行滤波了.

选择增益向量 $a = [a_1, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$，使得由它所构成的系统矩阵 A 是 Hurwitz 的，即 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都具有负实部，已知 $h = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{-\mathrm{Re}(\lambda_i)\}$ 是某个正数，并将系统(1)重写成

$$\dot{x} = Ax + ay + \phi_0(y) + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \phi_j(y) + \varphi(x,t) + B\sigma(y)u, \tag{3a}$$

$$y = x_1. \tag{3b}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi(x,t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x,t) \\ \varphi_2(x,t) \\ \vdots \\ \varphi_n(x,t) \end{bmatrix}, \quad \phi_j(y) = \begin{bmatrix} \phi_{j1}(y) \\ \phi_{j2}(y) \\ \vdots \\ \phi_{jn}(y) \end{bmatrix},$$

$j = 0, 1, \cdots, p$.

我们构造滤波器如下：

$$\dot{\xi}_0 = A\xi_0 + ay + \phi_0(y), \tag{4a}$$

$$\dot{\xi}_j = A\xi_j + \phi_j(y), \quad j = 1, \cdots, p, \tag{4b}$$

$$\dot{\eta} = A\eta + B\sigma(y)u. \tag{4c}$$

其中

$$\xi_j = [\xi_{j1}, \cdots, \xi_{jn}]^{\mathrm{T}}, \quad j = 0, 1, \cdots, p,$$

$$\eta = [\eta_1, \cdots, \eta_n]^{\mathrm{T}}.$$

若暂时假定参数向量 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p]^{\mathrm{T}}$ 已知，则可构成状态 x 的估计

$$\hat{x} = \xi_0 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \xi_j + \eta. \tag{5}$$

令 $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n]^{\mathrm{T}} = x - \hat{x}$，不难推出

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + \varphi(x(t), t). \tag{6}$$

滤波的目的是对系统状态 $x(t)$ 进行“最好的”估计，这个估计的精度，即滤波误差 $\tilde{x}(t)$ 的大小将对输出反馈控制产生相当大的影响；滤波必须具有稳定性(即当时间 t 充分长以后，初值 $\tilde{x}(0)$ 的影响可以忽略不计)，才有可能保证跟踪控制的精度. 下面的定理 1 表明滤波器(4) 确实是稳定的.

定理 1　在假定 2) 成立的前提下，采用滤波器(4)，则它所产生的滤波误差 $\tilde{x}(t)$ 全局有界，即对任何初值 $\tilde{x}(0)$ 都存在有限数 $E(\tilde{x}(0)) > 0$ 使得成立不等式

$$\| \tilde{x}(t) \| \leqslant E, \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{7}$$

证　常微分方程(6)的解为

$$\tilde{x}(t) = \mathrm{e}^{At}\tilde{x}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} \varphi(x(\tau), \tau) \mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

因为 A 是 Hurwitz 矩阵，其 n 个特征值实部的最大值为 $-h$，因此必存在常数 $D > 0$ 使得

$$\| \mathrm{e}^{At} \| \leqslant D\mathrm{e}^{-ht}. \tag{9}$$

从式(8)，(9)和(2)容易推出

$$\| \tilde{x}(t) \| \leqslant D\mathrm{e}^{-ht} \| \tilde{x}(0) \| + D\int_0^t \mathrm{e}^{h(\tau - t)} \sum_{i=1}^{n} Q_i \mid \mu_i(y(\tau), \tau) \mid \mathrm{d}\tau + D\sum_{i=1}^{n} M_i \int_0^t \mathrm{e}^{h(\tau - t)} \mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

不等式(10)右边的第一项和第三项显然是有界的，这是因为

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{e}^{-ht} \| \tilde{x}(0) \| = 0, \tag{11}$$

$$\int_0^t \mathrm{e}^{h(\tau - t)} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{h}(1 - \mathrm{e}^{-ht}) \leqslant \frac{1}{h}. \tag{12}$$

不等式(10)右边的第二项也是有界的，实际上根据假定 2)将可以推出

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t \mathrm{e}^{h(\tau - t)} \sum_{i=1}^{n} Q_i \mid \mu_i(y(\tau), \tau) \mid \mathrm{d}\tau = 0. \tag{13}$$

这样，由式(10) ~ (13)可知存在常数 $E > 0$ 使得不等式(7) 成立. 剩下的问题就是要论证式(13) 确实成立.

对任给 $\varepsilon > 0$，存在有限正数 T 使得

$$\mathrm{e}^{-hT} \leqslant \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{n} \left[Q_i \int_T^{\infty} \mu_i^2(y(t), t) \mathrm{d}t \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon.$$

因而据积分性质和 Schwarz 不等式可知，当 $t \geqslant 2T$ 时(这时 $t - T \geqslant T$) 必有

$$\int_0^t \mathrm{e}^{h(\tau - t)} \sum_{i=1}^{n} Q_i \mid \mu_i(y(\tau), \tau) \mid \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{n} Q_i \int_0^T \mathrm{e}^{h(\tau - t)} \mid \mu_i(y(\tau), \tau) \mid \mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{n} Q_i \int_T^t \mathrm{e}^{h(\tau - t)} \mid \mu_i(y(\tau), \tau) \mid \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$F_1 \mathrm{e}^{-h(t-T)} \left[\frac{1}{2h}(1 - \mathrm{e}^{2hT}) \right]^{\frac{1}{2}} + F_2 \left[\frac{1}{2h}(1 - \mathrm{e}^{2h(T-t)}) \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$(F_1 \mathrm{e}^{-h(t-T)} + F_2) \left[\frac{1}{2h} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

其中

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[Q_i \int_0^T \mu_i^2(y(\tau), \tau) \mathrm{d}\tau \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[Q_i \int_0^{\infty} \mu_i^2(y(\tau), \tau) \mathrm{d}\tau \right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{15}$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n}\left[Q_i\int_{\Gamma}^{t}\mu_i^2(y(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon, \quad (16)$$

$$\mathrm{e}^{-h(t-T)} \leqslant \mathrm{e}^{-hT} \leqslant \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性,式(14) ~ (16) 意味着式(13) 成立.

推论 在定理 1 的条件下,如果式(2) 中的 $M_i = 0(i = 1,2,\cdots,n)$,那么滤波误差方程(6) 是渐近稳定的,即对任意初值 $\tilde{x}(0)$ 皆有

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t) = [0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}. \quad (17)$$

证 按照定理 1 的推导,同样可以推出不等式(10),而且其右边第三项为零,因此由式(11)和(13)立即推出式(17).

注 3 在我们所要设计的自适应控制器中,滤波估计(5)中的 θ 将用它的实时估计值 $\hat{\theta}(t)$ 来代替,在 $\hat{\theta}$ 全局有界和假定 1),2)皆成立的情况下,可以证明定理 1 的结论仍然成立.

4 输出反馈自适应控制器的设计(Design of output-feedback adaptive controller)

在假定 1) ~ 3)成立的前提下,我们在 Backstepping 自适应控制方案的基础上,提出一个简捷的直接设计方法,针对非线性系统(3)来设计输出反馈自适应控制器,使得该闭环系统的输出 $y(t)$ 按预定的精度跟踪参考信号 $r(t)$. 根据定理1,我们可以假定已知 $|\tilde{x}_2(t)|$ 的上界为 E,但其余 $n-2$ 个分量 $\tilde{x}_3(t),\cdots,\tilde{x}_n(t)$ 的上界不必已知. 为了书写的简便,下面引进几个向量记号,即定义:

$$W_i = [\xi_{01},\cdots,\xi_{0i},\xi_{11},\cdots,\xi_{1i},\cdots,\xi_{p1},\cdots,\xi_{pi},\eta_1,\cdots,\eta_i]^{\mathrm{T}},\quad i = 1,2,\cdots,n,$$

$$v_i = [r,\cdots,r^{(i-1)}]^{\mathrm{T}},\ i = 2,\cdots,n,$$

$$\Psi = [\phi_{11} + \xi_{12},\phi_{21} + \xi_{22},\cdots,\phi_{p1} + \xi_{p2}]^{\mathrm{T}}.$$

对给定的跟踪精度 $\varepsilon > 0$,不妨假定 $\varepsilon^2 \leqslant 2(1 + P^2)$,并设 $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}M_i$, $Q = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}Q_i$, 可令

$$N = 2(1 + P^2)/\varepsilon^2,\ K = n[Q^2 + (M + E)^2]/4. \quad (18)$$

设 $\hat{\theta}(t)$ 表示参数向量 θ 在时刻 t 的估计量,$\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$, $z_i(i = 1,\cdots,n)$ 表示闭环状态变量,取为

$$z_1 = e = y - r = x_1 - r, \quad (19)$$

$$z_i = \eta_i - \alpha_{i-1},\ i = 2,\cdots,n, \quad (20)$$

其中 α_{i-1} 是变量$(e,\hat{\theta},W_i,v_i)$ 的线性或非线性函数,由下列关系式所确定:

$$\alpha_0 = -z_1 = -e = r - y,$$

$$\alpha_1 = \dot{r} - (N + K)z_1 - \phi_{01} - \xi_{02} - Kz_1\mu_1^2 - \Psi^{\mathrm{T}}\hat{\theta}, \quad (21)$$

$$\alpha_i = a_i\eta_i - z_{i-1} - Nz_i + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial e}(\Psi^{\mathrm{T}}\hat{\theta} - N\Psi^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{i-2}z_{j+1}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}} + \xi_{02} + \phi_{01} + \eta_2 - \dot{r}) - Kz_i(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial e})^2(1 + \mu_1^2) + \tau_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}} + \dot{W}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial W_i} + v_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial v_i},\ i = 2,\cdots,n-1, \quad (22)$$

对于上式中的求和符号 $\sum\limits_{j=1}^{i}(\cdot)$,当 $i < 1$ 时,我们约定它取值为零(下同),而式中的 p 维向量值函数 τ_i 满足关系式:

$$\tau_1 = Nz_1\Psi - 2N\hat{\theta}, \quad (23a)$$

$$\tau_i = \tau_{i-1} - Nz_i\Psi\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial e},\ i = 2,\cdots,n, \quad (23b)$$

则取自适应律为

$$\dot{\theta} = -\dot{\hat{\theta}} = \tau_n, \quad (24)$$

并取控制律为

$$u = \frac{1}{\sigma(y)}[a_n\eta_n - z_{n-1} - Nz_n + \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial e}(\Psi^{\mathrm{T}}\hat{\theta} - N\Psi^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{n-2}z_{j+1}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}} + \xi_{02} + \phi_{01} + \eta_2 - \dot{r}) - Kz_n(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial e})^2(1 + \mu_1^2) + \tau_n^{\mathrm{T}}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\beta}} + \dot{W}_n^{\mathrm{T}}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial W_n} + v_n^{\mathrm{T}}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial v_n}]. \quad (25)$$

5 稳定性分析和跟踪误差估计(Stability analysis and tracking error estimation)

现在,我们对上节所设计的输出反馈自适应控制系统的鲁棒性能进行分析,得到的主要结果是下述定理.

定理 2 设系统(1)和参考信号 r 满足假定 1) ~ 3),并将上节所设计的自适应律(24) 和控制律(25) 应用于系统(3),则该闭环系统的所有信号全局有界,且对任意给定 $\varepsilon > 0$,存在有限的时间 $t(\varepsilon)$ 使得

$$|y(t) - r(t)| \leqslant \varepsilon,\ \forall\, t \geqslant t(\varepsilon). \quad (26)$$

这个定理的证明需要用到几个有关的不等式,下面用引理的形式给出.

引理 1 在满足定理 2 条件的前提下,下述不等式成立:

$$z_i(z_{i-1} + \dot{z}_i) \leqslant z_iz_{i+1} - Nz_i^2 - z_i\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial e}\Psi^{\mathrm{T}}(\tilde{\theta} +$$

$$N\sum_{j=1}^{i-2} z_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial \hat{\theta}}) + z_i(\tau_i - \dot{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} +$$

$$[(E+M)^2+Q^2]/(4K),\ i = 2,\cdots,n-1. \quad (27)$$

证　由式(3b),(1a)和(5)可得

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2+\phi_{01}+[\phi_{11},\phi_{21},\cdots,\phi_{p1}]\theta + \varphi_1 =$$

$$\xi_2+\tilde{x}_2 + \phi_{01}+[\phi_{11},\phi_{21},\cdots,\phi_{p1}]\theta+\varphi_1 =$$

$$\xi_{02} + \eta_2 + \phi_{01} + \Psi^{\mathrm{T}}\theta + \tilde{x}_2 + \varphi_1. \quad (28)$$

再由式(20),(4c),(22)和(28)推出

$$\dot{z}_i = \dot{\eta}_i - \dot{\alpha}_{i-1} =$$

$$\eta_{i+1}-a_i\eta_i-\dot{e}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e}-\dot{\hat{\theta}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}}-\dot{W}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial W_i}-\dot{v}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial v_i} =$$

$$z_{i+1} - z_{i-1} - Nz_i - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e}(\Psi^{\mathrm{T}}\tilde{\theta} + N\Psi^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{i-2} z_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial \hat{\theta}} +$$

$$\tilde{x}_2 + \varphi_1) + (\tau_i - \dot{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} -$$

$$Kz_i(1+\mu_1^2)(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e})^2,\ i = 2,\cdots,n-1, \quad (29)$$

其中 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. 从式(29)可立即得到

$$z_i(z_{i-1} + \dot{z}_i) =$$

$$z_{i+1}z_i - Nz_i^2 - z_i\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e}\Psi^{\mathrm{T}}(\tilde{\theta} + N\sum_{j=1}^{i-2} z_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial \hat{\theta}}) +$$

$$z_i(\tau_i - \dot{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} - z_i\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e}(\tilde{x}_2 + \varphi_1) -$$

$$K(1+\mu_1^2)(z_i\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e})^2,\ i = 2,\cdots,n-1. \quad (30)$$

因为 φ_1 满足不等式(2),又因为可配成完全平方的二次三项式是非负的,所以必有

$$-z_i\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e}(\tilde{x}_2 + \varphi_1) - K(1+\mu_1^2)(z_i\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e})^2 \leqslant$$

$$(\tilde{x}_2+M_1+Q\mid\mu_1\mid)\left|z_i\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e}\right| - K(1+\mu_1^2)(z_i\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e})^2 \leqslant$$

$$[(E+M)^2+Q^2]/(4K). \quad (31)$$

从式(30)和(31)立即推出不等式(27)成立.

引理 2　假设定理 2 的条件成立,并设

$$V_i(t) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{j=1}^{i} z_j^2(t)+\frac{1}{N}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\theta}(t)\Big],\ i=1,2,\cdots,n, \quad (32)$$

则

$$\dot{V}_i \leqslant z_iz_{i+1}-2NV_i+P^2+i[(E+M)^2+Q^2]/(4K)+$$

$$(\tau_i-\dot{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}\Big[\frac{1}{N}\tilde{\theta}+\sum_{j=1}^{i-1} z_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial \hat{\theta}}\Big],\ i=1,2,\cdots,n-1, \quad (33)$$

和

$$\dot{V}_n \leqslant N\varepsilon^2/2 - 2NV_n. \quad (34)$$

证　我们用数学归纳法来证明不等式(33). 首先,当 $i = 1$ 时,对 V_1 求导,并使用关系式(19),(28),(20),(21),(23a)和(32)以及显然成立的下列不等式

$$\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(\tilde{\theta} + 2\hat{\theta}) = \|\theta\|^2 - \|\hat{\theta}\|^2 \leqslant P^2,$$

$$\tau_1(\tilde{x}_2+\varphi_1)-Kz_1^2(1+\mu_1^2)\leqslant[(E+M)^2+Q^2]/(4K),$$

容易推出

$$\dot{V}_1 = z_1\dot{z}_1 + \frac{1}{N}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\tilde{\theta}} =$$

$$z_1z_2 - Nz_1^2 - Kz_1^2(1+\mu_1^2) +$$

$$z_1(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Psi + \tilde{x}_2 + \varphi_1) + \frac{1}{N}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\tilde{\theta}} \leqslant$$

$$z_1z_2 - 2NV_1 + P^2 + [(E+M)^2 +$$

$$Q^2]/(4K) + \frac{1}{N}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(\tau_1 - \dot{\hat{\theta}}).$$

这表示不等式(33)在 $i = 1$ 的情况下是成立的.

其次,假定当 $i = 2,\cdots,n-2$ 时,不等式(33)成立,那么只要推出当 $i = n-1$ 时,不等式(33)也成立,就完成了式(33)中所有 $n-1$ 个不等式的证明. 对 V_{n-1} 求导,并应用归纳法的假定和关系式(27),(23b)可以推出

$$\dot{V}_{n-1} = z_{n-1}\dot{z}_{n-1} + \dot{V}_{n-2} \leqslant$$

$$z_{n-1}(z_{n-2} + \dot{z}_{n-1}) - 2NV_{n-2} + P^2 +$$

$$(n-2)[(E+M)^2+Q^2]/(4K) +$$

$$(\tau_{n-2} - \dot{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}(\frac{1}{N}\tilde{\theta} - \sum_{j=1}^{n-3} z_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial \hat{\theta}}) \leqslant$$

$$z_{n-1}z_n - 2NV_{n-1} + P^2 +$$

$$(n-1)[(E+M)^2+Q^2]/(4K) +$$

$$(\tau_{n-1} - \dot{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}(\frac{1}{N}\tilde{\theta} + \sum_{j=1}^{n-2} z_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial \hat{\theta}}).$$

这就说明了当 $i = n-1$ 时,不等式(33)确实成立.

最后,对 V_n 求导,并利用不等式(33)可得

$$\dot{V}_n = z_n\dot{z}_n + \dot{V}_{n-1} \leqslant$$

$$z_n(z_{n-1} + \dot{z}_n) - 2NV_{n-1} + P^2 +$$

$$(n-1)[(E+M)^2+Q^2]/(4K) +$$

$$(\tau_{n-1} - \dot{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}(\frac{1}{N}\tilde{\theta} + \sum_{j=1}^{n-2} z_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial \hat{\theta}}), \quad (35)$$

其中 $\dot{z}_n$ 可由等式(20)两边对时间 t 求导,并使用关系式(4c)和(28)而推出

$$\dot{z}_n = \sigma(y)u - a_n\eta_n - (\tilde{x}_2 + \varphi_1 + \xi_{02} + \eta_2 +$$

$$\phi_{01} + \Psi^{\mathrm{T}}\theta - \dot{r})\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial e} - \dot{\hat{\theta}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} -$$

$$\dot{W}_n^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial W_n} - \dot{v}_n^{\mathrm{T}}\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial v_n}. \quad (36)$$

将式(36)代入式(35),并应用关系式(25),(23b)和(24),可把式(35)化简成

$$\dot{V}_n \leqslant P^2+(n-1)[(E+M)^2+Q^2]/(4K)-2NV_n+ z_n(\tilde{x}_2+\varphi_1)\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial e}-K(1+\mu_1^2)(z_n\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial e})^2.$$

对 $i=n$ 应用不等式(31),上式就变成

$$\dot{V}_n \leqslant P^2+n[(E+M)^2+Q^2]/(4K)-2NV_n. \tag{37}$$

由式(18)可知, $n[(E+M)^2+Q^2]=4K, 1+P^2=N\varepsilon^2/2$, 所以式(37)意味着不等式(34)成立.

定理 2 的证明.取

$$V(t)=V_n(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t)+\frac{1}{2N}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\theta}(t), \tag{38}$$

则可利用不等式(34)推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(t)\mathrm{e}^{2Nt})=\dot{V}(t)\mathrm{e}^{2Nt}+2NV(t)\mathrm{e}^{2Nt}\leqslant N\varepsilon^2\mathrm{e}^{2Nt}/2. \tag{39}$$

在 $[0,t]$ 上对式(39) 两端进行积分,并用 e^{-2Nt} 乘以不等式的两边得

$$V(t)\leqslant[V(0)-\varepsilon^2/4]\mathrm{e}^{-2Nt}+\varepsilon^2/4, \tag{40}$$

其中 $V(0)\geqslant 0$,不妨假定 $V(0)\geqslant\varepsilon^2/2$, 则可取

$$t(\varepsilon)=\ln[4V(0)/\varepsilon^2-1]/(2N).$$

显然 $t(\varepsilon)$ 是有限的,且

$$[V(0)-\varepsilon^2/4]\mathrm{e}^{-2Nt}\leqslant\varepsilon^2/4,\ \forall\, t\geqslant t(\varepsilon). \tag{41}$$

由式(40)和(41)立即推出

$$|y(t)-r(t)|=|z_1(t)|\leqslant\sqrt{2V_1(t)}\leqslant\sqrt{2V(t)}\leqslant\varepsilon,\ \forall\, t\geqslant t(\varepsilon). \tag{42}$$

即不等式(26)成立.

从式(38)和(40)可以看出, $\tilde{\theta}(t)$ 和 $z_1(t),\cdots,z_n(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上有界,且它们的有界性不依赖于初值 $\tilde{\theta}(0)\in\mathbb{R}^p$ 和 $z_1(0),\cdots,z_n(0)\in\mathbb{R}^n$,即 $\tilde{\theta}(t)$ 和 $z_1(t),\cdots,z_n(t)$ 全局有界.从而直接推出 $\hat{\theta}(t)$, $y(t)$ 和 α_0 也全局有界.下面我们来证明该闭环系统的其余所有信号都是全局有界的.

据假定 A_1, y 全局有界意味着 $\phi_j(y)(j=0,1,\cdots,p)$ 和 $\sigma(y)$ 全局有界. 考察式(4),由于系统矩阵 A 是 Hurwitz 的,因此可由式(4a),(4b)和 $y,\sigma(y)$, $\phi_j(y)(j=0,1,\cdots,p)$ 的全局有界性立即推出 ξ_j 和 $\dot{\xi}_j(j=0,1,\cdots,p)$ 都是全局有界的,从而 Ψ 和 τ_1 也全局有界,再由式(4c)推出 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 和 $\dot{\eta}_1,\cdots,\dot{\eta}_{n-1}$ 是全局有界的,从而 $W_1,\cdots,W_n$ 和 $\dot{W}_1,\cdots,\dot{W}_{n-1}$ 也是全局有界的. 因此由式(5)和注2可知 $\hat{x}(t), e(t)$ 和 $x(t)$ 皆全局有界.

据假定 2)和 3)可知,由式(21)所确定的 α_1 是全局有界的.因为

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial e}=-N-K(1+\mu_1^2),\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial v_2}=1,\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{\theta}}=-\Psi,$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial W_2}=[0,1,0,\hat{\theta}_1,0,\hat{\theta}_2,\cdots,0,\hat{\theta}_p,0,0]^{\mathrm{T}}$$

或为常量或为有界量,所以由式(22),(23b)和假定 2),3)推出 α_2 和 τ_2 全局有界. 又因为 $\partial\alpha_2/\partial e$, $\partial\alpha_2/\partial\hat{\theta}$, $\partial\alpha_2/\partial W_3$ 和 $\partial\alpha_2/\partial v_3$ 也或为常量或为有界量,所以又可由式(22),(23b) 和假定 2),3) 推出 α_3 和 τ_3 全局有界. 如此逐次递推,不难顺序推出 α_i, $\tau_i(i=4,\cdots,n-1)$ 和 τ_n 皆全局有界.

剩下的问题是还需要证明 $u(t),\dot{\eta}_n(t)$ 和 $\dot{W}_n(t)$ 的全局有界性.因为 $\partial\alpha_{n-1}/\partial W_n$ 的前 $(2+p)n-1$ 个分量或为常数或为有界量,而最后一个分量,即第 $(2+p)n$ 个分量是零,又因为 $\dot{W}_n$ 的前 $(2+p)n-1$ 个分量皆全局有界,所以根据上述论证所得的结果,由式(25) 和假定 1) 立即推出 u 是全局有界的.于是由(4c)推出 $\dot{\eta}_n$ 全局有界,从而 $\dot{W}_n$ 也全局有界. 这样就完全证明了该闭环系统的所有信号皆全局有界.

注 4 若 $V(0)\leqslant\varepsilon^2/2$,则可取定理2中的 $t(\varepsilon)=0$. 这表明所构成的自适应控制系统的输出跟踪精度一开始就达到预定的要求,即

$$|y(t)-r(t)|\leqslant\varepsilon,\ \forall\, t\geqslant 0.$$

注 5 不等式(26)对输出跟踪精度的估计是很保守的.实际上,偏差 $|y(t)-r(t)|$ 可能比 ε 小得多,而且达到跟踪精度要求的时刻 t 可能比 $t(\varepsilon)$ 早得多. 这可以从下一节的仿真结果中看出.

注 6 从式(40) 和(42) 可以推出,跟踪的绝对误差 $|e(t)|=|y(t)-r(t)|$ 以负指数衰减速度进入"稳态",即

$$\sqrt{2}\,|e(t)|=\sqrt{2}\,|y(t)-r(t)|\leqslant\mathrm{e}^{-Nt}\sqrt{4V(0)-\varepsilon^2}+\varepsilon. \tag{43}$$

6 仿真(Simulations)

例 1 考虑不确定性非线性系统

$$\dot{x}_1=x_2+\theta y^3+\varphi_1(x,t), \tag{44a}$$

$$\dot{x}_2=y^3\mathrm{e}^{-y^2}+u+\varphi_2(x,t), \tag{44b}$$

$$y=x_1. \tag{44c}$$

其中 θ 是未知参数, $\varphi_j(x,t)(j=1,2)$ 是未知非线性函数,模拟时假定 $\theta=1$,

$$\varphi_j(x,t)=0.2\sin(0.04j\pi t)x_1^2\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2)t}+0.2\cos(x_j\pi t),\ j=1,2,$$

而待跟踪的参考信号为 $r(t)=\sin(0.04\pi t)$. 在此情

况下，针对系统(44)进行自适应控制仿真. 分别按跟踪精度 $\varepsilon_1 = 0.18$ 和 $\varepsilon_2 = 0.12$ 来设计自适应律和控制律. 选取 $P = 1, Q = M = 0.2, \mu_1(x,t) = \mu_2(x,t) = y^2 e^{-y^2 t}, a = [5,6]^T$，并构造如下滤波器：

$$\dot{\xi}_0 = A\xi_0 + ay + \phi_0,$$
$$\dot{\xi}_1 = A\xi_1 + \phi_1,$$
$$\dot{\eta} = A\eta + Bu.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ y^3 e^{-y^2} \end{bmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} y^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

$$\xi_j = [\xi_{j1}, \xi_{j2}]^T \quad (j = 0,1),$$

则状态 x_2 的滤波结果为

$$\hat{x}_2 = \xi_{02} + \hat{\theta}\xi_{12} + \eta_2.$$

其中 $\hat{\theta}(t)$ 是参数 θ 在时刻 t 的估计值.

此滤波器所产生的滤波误差 $\tilde{x}(t)$ 之模 $\|\tilde{x}(t)\|$ 的上界可取为 $E = 2.4$. 按照式(18)来计算，应取 $K = 3.4$；但 N 不必完全按照公式(18)来计算，对应于 ε_1 和 ε_2 分别取 $N = 12$ 和 $N = 18$. 采用第4节中给出的设计步骤和方法，针对本例而设计的自适应律和控制律分别为

$$\dot{\hat{\theta}} = N(gz_1 - 2\hat{\theta} + fgz_2) \tag{45}$$

和

$$u = 6\eta_2 - z_1 - Nz_2 - f(\xi_{02} + \eta_2 - \dot{r} + g\hat{\theta} + f(f - N))z_2 - g\dot{\hat{\theta}} - \dot{\xi}_{02} - \dot{\xi}_{12}\hat{\theta} + \ddot{r}. \tag{46}$$

其中

$$f = N + K + K\mu_1^2, \quad g = y^3 + \xi_{12}, \quad z_1 = y - r,$$
$$z_2 = \eta_2 + (N + K)z_1 + \xi_{02} + Kz_1\mu_1^2 + g\hat{\theta} - \dot{r}.$$

仿真结果见图1～3，其中 $y_i(t), u_i(t)$ 和 $e_i(t)$ 是按跟踪精度为 $\varepsilon_i (i = 1,2)$ 的要求而进行仿真所产生的系统输出 y，控制函数 u 和跟踪误差 e.

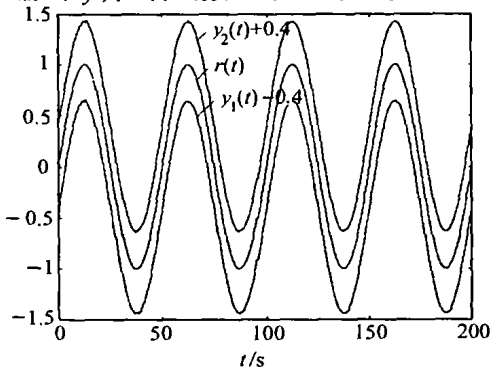

图1　输出 $y_i(t)$ ε_i-跟踪 $(i=1,2)$ $r(t)=\sin(0.04\pi t)$

Fig. 1　The outputs $y_i(t)$ ε_i-traking$(i=1,2)$ $r(t)=\sin(0.04\pi t)$

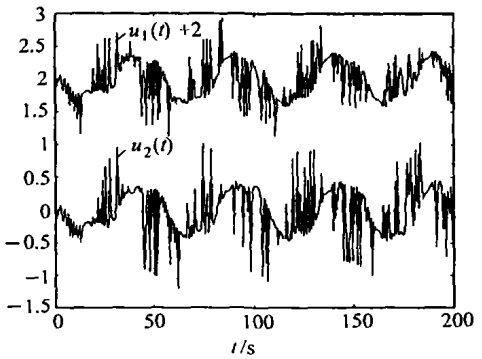

图2　对应于 ε_i 的控制量 $u_i(t)(i=1,2)$

Fig. 2　The control quantities $u_i(t)$ correspond to $\varepsilon_i (i=1,2)$

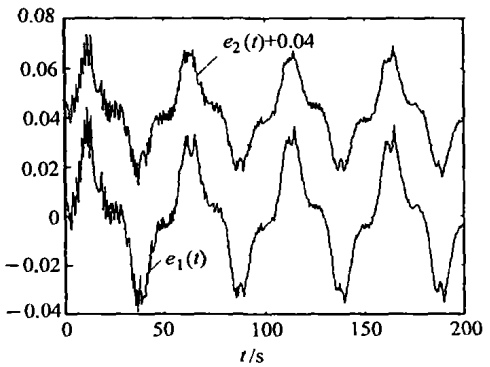

图3　对应于 ε_i 的跟踪误差 $e_i(t)(i=1,2)$

Fig. 3　The tracking errors $e_i(t)$ correspond to $\varepsilon_i (i=1,2)$

例2　仍考虑非线性系统(44)，而待跟踪的参考信号为

$$r(t) = \begin{cases} 0.5, & 50k \leqslant t < 50k + 25, \\ -0.5, & 50k + 25 \leqslant t < 50(k+1), \end{cases} \quad k = 0,1,2,3. \tag{47}$$

此函数是按段光滑的，其导数为4对正负单位脉冲函数之和，即

$$\dot{r}(t) = \sum_{k=0}^{3} [\delta(t - 50k) - \delta(t - 50k - 25)].$$

针对此例而设计的自适应律和控制律仍然是式(45)和(46)，只是其中的参考信号 $r(t)$ 由正弦波换为式(47)所定义的矩形波. 仿真时 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, N_1, N_2$ 和 K 的取值与例1相同. 仿真结果见图4～图6.

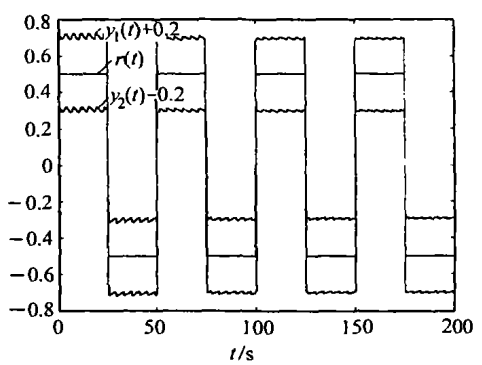

图4　输出 $y_i(t)$ ε_i-跟踪 $(i=1,2)$ 由(47)确定的 $r(t)$

Fig. 4　The outputs $y_i(t)$ ε_i-traking $(i=1,2)$ $r(t)$ in (47)

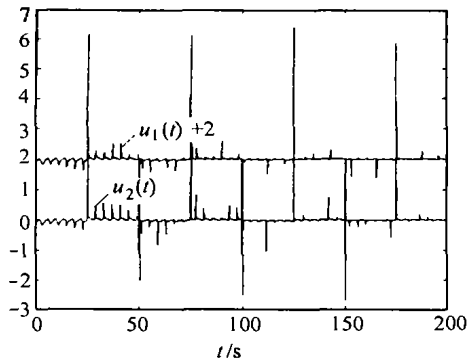

图 5 对应于 ε_i 的控制量 $u_i(t)(i=1,2)$

Fig. 5 The control quantities $u_i(t)$ correspond to $\varepsilon_i(i=1,2)$

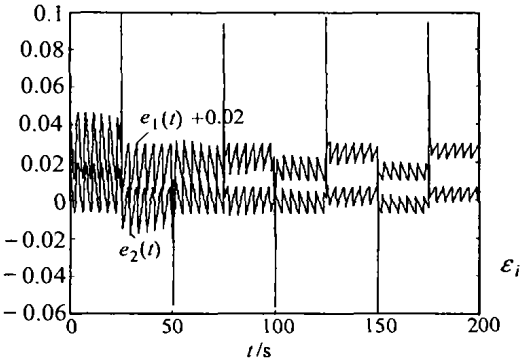

图 6 对应于 ε_i 的跟踪误差 $e_i(t)(i=1,2)$

Fig. 6 The tracking errors $e_i(t)$ correspond to $\varepsilon_i(i=1,2)$

注 7 例 2 中的参考信号 $r(t)$ 不满足假定 3)，我们也能很好地解决它的 ϵ-跟踪问题；不过在这种情况下，无法保证闭环系统的全局稳定性，而必须要求初始值在适当范围中选取.

7 结论(Conclusions)

本文针对一类具有一般不确定性和参数未知的非线性系统(1)所设计的输出反馈鲁棒自适应控制器是可行的，该控制器既能保证闭环系统的全局稳定性，又能使跟踪精度达到预定的要求，而且控制量在允许控制范围之内，从而很好地解决了这类非线性系统的 ϵ-跟踪问题.

参考文献(References)

[1] Chen Hanfu, Guo Lei. Some developments and expectations of modern control theory [J]. Chinese Science Bulletin, 1998,43(1):1 - 7 (in Chinese)

[2] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1991,36(11):1241 - 1253

[3] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control,1994,39(4):738 - 752

[4] Danbing S, Annaswammy A M, Baillieul J. Adaptive control of nonlinear systems with a triagular structure [J]. IEEE Trans. Automatic Control,1994,39(7):1411 - 1427

[5] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design [M]. New York: Wiley, 1995

[6] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Adaptive nonlinear control without over-parameterization [J]. System and Control Letters,1992,19(3):177 - 185

[7] Huang Changshui, Ruan Rongyao. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems [J]. Journal of East China Normal University (Natural Science Edition), 2000,101(3):12 - 18 (in Chinese)

[8] Huang Changshui, Ruan Rongyao. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2001,27(1):82 - 88 (in Chinese)

[9] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Middleton R H. Observer-based adaptive control of nonlinear systems under matching conditions [A]. Proc. of 1990 American Control Conference [C]. San Diego, CA, 1990,549 - 555

[10] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Middleton R H. Indirect adaptive output-feedback control of a class of nonlinear systems [A]. Proc. of 29th IEEE Conference Decision Control [C]. Honolulu, HI,1990, 2714 - 2719

[11] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Middleton R H. Adaptive output-feedback control of systems with output nonlinearities [J]. IEEE Trans. Automatic Control,1992,37(11):1666 - 1682

[12] Marino R, Tomei P. Globas adaptive output-feedback control of nonlinear systems, Part I: linear parameterization [J]. IEEE Trans. Automatic Control,1993,38(1):17 - 32

[13] Marino R, Tomei P. Globas adaptive output-feedback control of nonlinear systems, Part II: nonlinear parameterization [J]. IEEE Trans. Automatic Control,1993,38(1):33 - 48

[14] Chen Weitian, Shi Songjiao, Zhang Zhongjun. Adaptive output-feedback control of a class of uncertain nonlinear systems [J]. Acta Mathematica Scientia, 1998,18(2):140 - 148

[15] Huang Changshui, Ruan Rongyao. Adaptive output-feedback control of a class of nonlinear systems with bounded disturbances. Acta Mathematica Scientia, 2000,20(3):405 - 413

[16] Ilchmann A, Ryan E P. Universal λ-tracking for nonlinearly-perturbed systems in the presence of noise [J]. Automatica, 1994,30 (2):337 - 346

本文作者简介

杨昌利 1963年生.华东师范大学数学系副教授.主要研究自适应控制与鲁棒控制. Email:clyang@math.ecnu.edu.cn

阮荣耀 1937年生,华东师范大学数学系教授,主要研究现代控制理论及其应用. Email:ryruan@math.ecnu.edu.cn