文章编号: 1000 - 8152(2002)06 - 0912 - 03

一类不确定非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制*

关新平，华长春，龙承念
(燕山大学 电气工程学院,河北秦皇岛 066004)

摘要: 在一种工程应用背景之下,考虑了一类非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题,不确定性范数有界,基于 H J I 不等式研究了状态反馈控制器设计问题,使得闭环系统满足 H_∞ 干扰抑制性能要求.

关键词: 非线性系统; 鲁棒 H_∞ 控制; H J I 不等式
中图分类号: TP273,TP13　　**文献标识码**: A

Robust H_∞ control for a class of uncertain nonlinear systems

GUAN Xin-ping, HUA Chang-chun, LONG Cheng-nian
(Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: The problem of robust H_∞ control for a class of nonlinear systems under engineering background is considered. The uncertainties are norm bounded. Based on the Hamilton-Jacobi inequality, a state feedback control law is constructed such that the closed-loop systems satisfy H_∞ robust disturbance attenuation performance.

Key words: nonlinear systems; robust H_∞ control; H J I inequality

1 引言(Introduction)

非线性 H_∞ 控制是线性系统 H_∞ 控制问题的一个自然延伸,它借鉴的是线性系统下干扰抑制的思想.在保证系统稳定的前提下,使干扰对系统的评价性能的影响被抑制到所要求的最小程度,在这一思路下,已经取得了许多丰富的成果[1~6].

文献[3]在一种工程应用背景之下,考虑了本文所对应的线性系统情形的鲁棒 H_∞ 控制问题.而本文将其推广到非线性系统,考虑了相应的状态反馈情形.文献[6]也考虑了类似本文的系统,但没有考虑输入端存在不确定性情形.本文的处理方法独特,以往文献从构造李雅普诺夫函数入手,而本文考虑把不确定项与干扰放在一起考虑,得到了较好的结果,且本文的结果取线性情形时,正好是文献[3]的主要结果而文献[6]却做不到这一点.

2 系统描述与基本假设(System description and basic assumption)

考虑如下的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \Delta j(x) = \\ f(x) + \Delta f(x) + g_1(x)\omega + (g_2(x) + \Delta g_2(x))u, \\ z = h(x) + k(x)u. \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是在原点某领域的状态向量 $x(0) = 0$, $z \in \mathbb{R}^m$ 是评价输出向量, $u \in \mathbb{R}^p$ 为控制输入, ω 为外界扰动. $f(x), g_1(x), g_2(x), h(x), k(x)$ 为具有适当维数的已知函数向量和矩阵.

我们设系统(1)中的不确定性满足如下的通常的假设:

假设 1　系统(1)中不确定项满足 $\Delta j(x) = e_j\delta_j$, $\Delta f(x) = e_f\delta_f$, $\Delta g_2(x) = e_u\delta_u$,其中 $\|\delta_j\| \leqslant \|W(x)\dot{x}\|$, $\|\delta_f\| \leqslant \|m_f(x)\|$, $\|\delta_u\| \leqslant \|m_u(x)\|$.

定义 1　如果系统(1)当 $u = 0$ 时,满足如下条件,则称该系统满足鲁棒 H_∞ 性能指标:

1) 当 $w = 0$ 时,系统的平衡点 $x = 0$ 对于任意满足假设 1 的不确定性是稳定的.

2) 当 $x(0) = 0$ 时,对于任意给定的 $T > 0$ 和某个给定的 γ, 有 $\|z\|_T < \gamma\|\omega\|_T, \forall w \in L_2[0,T]$,此时所取的范数为广义的 L_2 范数.

3 主要结果(Main results)

作为一个简化情形,我们考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \Delta j(\dot{x}) = f(x) + g_1(x)\omega, \\ z = h(x) \end{cases} \tag{2}$$

的鲁棒 H_∞ 问题.

* 基金项目:国家杰出青年基金(69925308)资助项目.
收稿日期:2000 - 06 - 28; 收修改稿日期:2001 - 05 - 31.

定理 1　对于系统(2)若存在适当的常数 $\lambda_j > 0$, 使得如下的 HJI 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x}f + \gamma^2\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)Q^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)^{\mathrm{T}} + \gamma^2 C^{\mathrm{T}}C < 0 \tag{3}$$

有光滑正定解 $V(x)$, 则系统(2)满足鲁棒 H_∞ 性能指标.

上式中

$$\begin{cases} Q = I - D^{\mathrm{T}}D > 0,\ B = [g_1(x), \lambda_j e_j], \\ C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}h(x) \\ \frac{1}{\lambda_j}Wf(x) \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda_j}WB \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{4}$$

证　我们的基本思路是将状态导数的扰动作为一种等效的外界扰动,并且定义一个包含它的广义的外界扰动.为此,我们设

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},\ d_1 = \omega,\ d_2 = -\frac{\delta_j}{\lambda_j}. \tag{5}$$

考虑

$$\frac{\partial V}{\partial x}(f + g_1\omega - e_j\delta_j) + \|z\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2 = \frac{\partial V}{\partial x}(f + Bd) + h^{\mathrm{T}}h - \gamma^2 d^{\mathrm{T}}d + \gamma^2 d_2^{\mathrm{T}}d_2, \tag{6}$$

注意到

$$\gamma^2 d_2^{\mathrm{T}}d_2 \leqslant \frac{\gamma^2}{\lambda_j^2}x^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}Wx = \frac{\gamma^2}{\lambda_j^2}(f + g_1\omega - e_j\delta_j)^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}W(f + g_1\omega - e_j\delta_j) = \frac{\gamma^2}{\lambda_j^2}(f + Bd)^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}W(f + Bd) = \frac{\gamma^2}{\lambda_j^2}f^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}Wf + \frac{\gamma^2}{\lambda_j^2}d^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}WBd + \frac{2\gamma^2}{\lambda_j^2}f^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}WBd. \tag{7}$$

将式(7)代入式(6),可得

$$\frac{\partial V}{\partial x}(f + g_1\omega - e_j\delta_j) + \|z\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2 \leqslant \frac{\partial V}{\partial x}(f+Bd)+\gamma^2C^{\mathrm{T}}C-\gamma^2d^{\mathrm{T}}Qd+\gamma^2(C^{\mathrm{T}}Dd+d^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}C) = \frac{\partial V}{\partial x}f+\gamma^2C^{\mathrm{T}}C-\gamma^2\left\|Q^{\frac{1}{2}}d-Q^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+C^{\mathrm{T}}D\right)^{\mathrm{T}}\right\|^2 + \gamma^2\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)Q^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)^{\mathrm{T}} \leqslant \frac{\partial V}{\partial x}f + \gamma^2\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)Q^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)^{\mathrm{T}} + \gamma^2C^{\mathrm{T}}C < 0.$$

积分后得

$$V(x(T)) - V(x(0)) + \|z\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2 < 0.$$

由于 $V(x(0)) = 0, V(x(T)) > 0$, 从而 $\|z\| < \gamma\|\omega\|$. 当 $\omega = 0$ 时,有 $\dot V < 0$, 从而系统是全局渐近稳定的.因此,系统满足鲁棒 H_∞ 性能指标.

证毕.

注 1　考虑线性情形:

$$\begin{cases} \dot x(t) + \Delta j(\dot x) = Ax + B\omega, \\ z = Cx. \end{cases}$$

取 Lyapunov 函数为二次型函数 $x^{\mathrm{T}}Px$, 则经过简单的化简,式(3)转化为 Riccati 不等式:

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + \gamma^2\left(\frac{1}{\gamma^2}P\hat B + \hat C^{\mathrm{T}}\hat D\right)Q^{-1}\left(\frac{1}{\gamma^2}P\hat B + \hat C^{\mathrm{T}}\hat D\right)^{\mathrm{T}} + \gamma^2\hat C^{\mathrm{T}}\hat C < 0.$$

上式中

$$Q = I - \hat D^{\mathrm{T}}\hat D > 0,\ \hat B = [B, \lambda_j e_j],$$

$$\hat C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}C \\ \frac{1}{\lambda_j}WA \end{bmatrix},\ \hat D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda_j}WB & We_j \end{bmatrix}.$$

此结果是文献[3]的一个主要结果.

我们进一步考虑系统

$$\begin{cases} \dot x(t) + \Delta j(\dot x) = f(x) + \Delta f(x) + g_1(x)\omega, \\ z = h(x). \end{cases} \tag{8}$$

定理 2　若存在适当的常数 $\lambda_j, \lambda_f > 0$, 使得如下的 HJI 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x}f + \gamma^2\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)Q^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B + C^{\mathrm{T}}D\right)^{\mathrm{T}} + \gamma^2C^{\mathrm{T}}C < 0 \tag{9}$$

有光滑正定解 $V(x)$, 则系统(8)满足鲁棒 H_∞ 性能指标.上式中

$$\begin{cases} Q = I - D^{\mathrm{T}}D > 0,\ C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}h_1^{\mathrm{T}} & \frac{1}{\lambda_j}f^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}} & \frac{1}{\lambda_f}m_f^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\ B = [g_1\ \ \lambda_j e_j\ \ \lambda_f e_f],\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda_j}WB \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{10}$$

证　与定理 1 的证明一样,我们引入式(6)的广义外界扰动 d,

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},\ d_1 = \omega,\ d_2 = -\frac{\delta_j}{\lambda_j},\ d_3 = \frac{\delta_f}{\lambda_f}.$$

以下证明与定理1类似,故略.

注 2 考虑线性情形,本结论也可以推广到文献[3]的主要结论,从略.

下面我们考虑控制输入不为零且控制端含有结构不确定性的系统(1)的鲁棒 H_∞ 控制问题.

定理 3 若存在适当的常数 $\lambda_j,\lambda_f,\lambda_u>0$,使得如下的 HJI 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x}f+\gamma^2\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+C^{\mathrm T}D\Big)Q^{-1}\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+C^{\mathrm T}D\Big)^{\mathrm T}+\gamma^2C^{\mathrm T}C-\frac{1}{4}ab^{-1}a^{\mathrm T}<0 \tag{11}$$

有光滑正定解 $V(x)$,其中

$$a=\Big[\frac{\partial V}{\partial x}g_2+\frac{2\gamma^2}{\lambda_j^2}\Big(\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+C^{\mathrm T}D\Big)Q^{-1}B^{\mathrm T}+f^{\mathrm T}\Big)W^{\mathrm T}Wg_2+2h^{\mathrm T}k\Big],$$

$$b=\Big[\frac{\gamma^2}{\lambda_j^2}g_2^{\mathrm T}W^{\mathrm T}(WBQ^{-1}B^{\mathrm T}W^{\mathrm T}+I)Wg_2+\Big(k^{\mathrm T}k+\frac{\gamma^2}{\lambda_u^2}m_u^{\mathrm T}m_2\Big)\Big],$$

$$B=[g_1\quad \lambda_je_j\quad \lambda_fe_f\quad \lambda_ue_u],\ Q=I-D^{\mathrm T}D>0,$$

$$C=\Big[\frac{1}{\gamma}h_1^{\mathrm T}\quad \frac{1}{\lambda_j}f^{\mathrm T}W^{\mathrm T}\quad \frac{1}{\lambda_f}m_f^{\mathrm T}\quad 0\Big]^{\mathrm T},$$

$$D=\Big[0\quad \frac{1}{\lambda_j}B^{\mathrm T}W^{\mathrm T}\quad 0\quad 0\Big]^{\mathrm T}.$$

则反馈控制器 $u=-\frac{1}{2}b^{-1}a^{\mathrm T}$,能使系统(11)满足鲁棒 H_∞ 性能指标.

证 与定理1的证明一样,我们引入式(5)的广义外界扰动 d,$d=[d_1^{\mathrm T}\quad d_2^{\mathrm T}\quad d_3^{\mathrm T}\quad d_4^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$,其中 $d_1=\omega$,$d_2=-\frac{\delta_j}{\lambda_j}$,$d_3=\frac{\delta_f}{\lambda_f}$,$d_4=\frac{1}{\lambda_u}\delta_u$,我们把 $f+g_2u$ 和 $h+ku$ 看成一个整体,由定理1的结果,会得到系统(1)满足 H_∞ 指标的条件即下式成立

$$\frac{\partial V}{\partial x}\bar f+\gamma^2\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+\bar C^{\mathrm T}D\Big)Q^{-1}\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+\bar C^{\mathrm T}D\Big)^{\mathrm T}+\gamma^2\bar C^{\mathrm T}\bar C<0. \tag{12}$$

其中

$$\begin{cases}\bar f=f+g_2u,\\ \bar C=C+\Big[0\quad \frac{1}{\lambda_j}u^{\mathrm T}g_2^{\mathrm T}W^{\mathrm T}\quad 0\quad \frac{1}{\lambda_u}u^{\mathrm T}m_u^{\mathrm T}\Big]^{\mathrm T}.\end{cases} \tag{13}$$

式(13)代入式(12)得

$$\frac{\partial V}{\partial x}\bar f+\gamma^2\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+\bar C^{\mathrm T}D\Big)Q^{-1}\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+\bar C^{\mathrm T}D\Big)^{\mathrm T}+\gamma^2\bar C^{\mathrm T}\bar C=$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}f+\gamma^2\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+C^{\mathrm T}D\Big)Q^{-1}\Big(\frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}B+C^{\mathrm T}D\Big)^{\mathrm T}+\gamma^2C^{\mathrm T}C-\frac{1}{4}ab^{-1}a^{\mathrm T}+$$

$$\Big(u+\frac{1}{2}b^{-1}a^{\mathrm T}\Big)^{\mathrm T}b\Big(u+\frac{1}{2}b^{-1}a^{\mathrm T}\Big)-\frac{1}{4}ab^{-1}a^{\mathrm T}.$$

所以当状态反馈控制器取为 $u=-\frac{1}{2}b^{-1}a^{\mathrm T}$,在式(11)满足的前提下能使系统(1)满足鲁棒 H_∞ 性能要求. 证毕.

4 结论(Conclusion)

以往的文献中通常讨论与状态相联系的扰动,而状态导数的扰动研究的较少,而又不容否认这一扰动具有的独特的工程意义.本文在较为一般的情形下考虑了具有此类扰动的非线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题,基于 HJI 不等式研究了控制器的设计问题.

参考文献(References)

[1] Van der Schaft A J. L_2-gain analysis of nonlinear systms and nonlinear state feedback H_∞ control [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1992,37(6):770-784

[2] Isidori A, Astolfi A. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1992,37(9):1283-1293

[3] Shen Tielong, Zhang Huaiquan, Tamura K. Riccati equation approach to robust L_2-gain synthesis for a class of uncertain nonlinear systems [J]. Int. J. Control, 1996,64(6):1177-1188

[4] Wang Xangdong, Gao Liqun, Zhang Siying. Robust H_∞ control for nonlinear systems with parameter uncertain nonlinear systems with state feedback [J]. Acta Automatica Sinica, 1999,25(2):221-225 (in Chinese)

[5] Lu Guoping, Zheng Yufan. Robust H_∞ control for nonlinear systems with parameter uncertainty [J]. Acta Automatica Sinica, 1999,25(3):388-392 (in Chinese)

[6] Fu Yusun, Tian Zuohua, Shi Songjiao. H_∞ robust control for a class of nonlinear systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2000,26(1):121-126 (in Chinese)

本文作者简介

关新平 见本刊2002年第1期第130页.

华长春 1979年生.硕士研究生.研究方向为非线性系统、时滞系统的鲁棒控制.

龙承念 见本刊2002年第2期第219页.