

文章编号: 1000-8152(2002)06-0915-04

广义代数 Riccati 方程的一个比较定理*

张维海

(山东轻工业学院 计算机科学技术系, 济南 250100)

摘要: 给出了一个关于广义代数 Riccati 方程的比较定理, 作为推论给出了广义代数 Riccati 方程最大解的存在性定理, 并且证明了该最大解也是强解, 改进了以往文献中的结论.

关键词: 广义代数 Riccati 方程; 强解; 反馈能稳解; 均方稳定性

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

Comparison theorem for generalized algebraic Riccati equations

ZHANG Wei-hai

(Department of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Light Industry, Jinan 250100, China)

Abstract: We give a comparison theorem for generalized algebraic Riccati equations, as a corollary, an existence theorem on maximal solution is given. Moreover, we also prove this maximal solution to be a strong solution. All these obtained results improve the previous works.

Key words: generalized algebraic Riccati equation; strong solution; feedback stabilizing solution; mean square stability

1 引言(Introduction)

本文研究下列代数 Riccati 方程类:

$$PA + A'P + \sum_{i=1}^l \sigma_i' P \sigma_i - PBN^{-1}B'P + Q = 0, \quad (1)$$

这里 A, B, N 分别是 $n \times n, n \times r, r \times r$ 的矩阵, $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 是 $n \times n$ 的矩阵, $N > 0$ 为正定矩阵, Q 为对称矩阵. 约定本文中出现的矩阵皆为实的常数矩阵.

方程(1)是确定性代数 Riccati 方程的推广, 文献[1]称之为广义代数 Riccati 方程(本文简记为 GARE), 方程(1)在随机控制和滤波理论中有重要的应用, 见文献[2~5]等. 文献[1]给出了一个关于 GARE(1)的比较定理([1]的定理 2.1), 这就是

定理 1 设 $\hat{P}$ 是 GARE

$$PA + A'P + \sum_{i=1}^l \sigma_i' P \sigma_i - P\hat{N}^{-1}B'P + \hat{Q} = 0 \quad (2)$$

的对称解, $\hat{N}, \hat{Q}$ 是对称矩阵, $\hat{N} > 0$. 如果 (A, B) 是能稳的, 而且有

$$\inf_s \left\| \int_0^\infty e^{t(A-Bs)'} \sum_{i=1}^l (\sigma_i' \sigma_i) e^{t(A-Bs)} dt \right\| < 1, \quad (3)$$

则对任何给定的对称矩阵 Q 和 $N, Q - \hat{Q} \geq 0, N - \hat{N}$

≥ 0 , GARE(1)有一个对称解 $P \geq \hat{P}$, $(A - BN^{-1}B'P)$ 的特征值在闭的左半复平面, 即 $\sigma(A - BN^{-1}B'P) \subset C^{-,0}$.

本文将在文献[2,6]作者工作的基础上改进定理 1, 作为我们定理的推论, 将改进文献[1]的定理 2.2.

2 定义和主要结果(Definitions and main results)

为表述我们的定理, 首先给出一些定义. 考虑下列随机控制系统

$$dx = (Ax + Bu)dt + \sum_{i=1}^l \sigma_i x dW_i(t), \quad (4)$$

这里 $\{W_i(t), i = 1, 2, \dots, l\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的独立标准一维 Wiener 过程, $u(\cdot)$ 是 r 维的控制向量.

定义 1^[5] 系统(4)称为是能稳的(在均方意义下), 如果存在一个反馈控制律 $u = -Kx$, 使闭环系统

$$dx = (A - BK)xdt + \sum_{i=1}^l \sigma_i x dW_i \quad (5)$$

是均方稳定的, 其中 K 是一个适当维数的常矩阵.

* 基金项目: 山东省自然科学基金(Q99G01)资助项目.

收稿日期: 2000-06-22; 收修改稿日期: 2001-01-31.

当系统(4)是能稳的,后面也简称 $(A, B, \sigma_1, \dots, \sigma_l)$ 是能稳的;当式(5)是均方稳定的,我们也简称

$(A - BK, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的.

定义 2 GARE(1)的一个实对称解 P 称为反馈能稳解,如果令 $u(t) = -Kx(t) = -N^{-1}B'Px(t)$, 所得闭环系统 $dx = (A - BK)x(t)dt + \sum_{i=1}^l \sigma_i x(t)dW_i$ 是均方稳定的.

注 1 在文献[2]中,我们已经证明 P 是 GARE(1)的一个反馈能稳解的充分必要条件是算子 $L: X \in S^n \mapsto X(A - BK) + (A - BK)'X + \sum_{i=1}^l \sigma_i' X \sigma_i$ 的谱属于开的左半复平面,即 $\sigma(L) \subset C^-$, 其中 $K = N^{-1}B'P$, S^n 是对称矩阵的集合.

在定义 2 和注 1 的基础上,定义:

定义 3 式(1)的一个对称解 P 称为是一个强解,如果 $\sigma(L) \subset C^{-,0}$.

本文的主要结论是:

定理 2 设 $\hat{P}$ 是 GARE(2)的对称解, $\hat{N}, \hat{Q}$ 是对称矩阵, $\hat{N} > 0$. 如果 $(A, B, \sigma_1, \dots, \sigma_l)$ 是能稳的, 则对于任何给定的对称矩阵 Q 和 N , $Q - \hat{Q} \geq 0, N - \hat{N} \geq 0$, GARE(1)有一个对称解 $P \geq \hat{P}$, P 是 GARE(1)的强解.

推论 1 如果 $Q \geq 0, (A, B, \sigma_1, \dots, \sigma_l)$ 是能稳的, 则 GARE(1)有一个最大解 P , P 同时也是一个强解.

3 定理的证明(Proof of the theorems)

为证明定理 2, 首先给出下列引理:

引理 1^[6] 若 $(F, \sum_{i=1}^l G_i)$ 是稳定的, 则对任何对称矩阵 M , Lyapunov-型方程

$$PF + F'P + \sum_{i=1}^l G_i'PG_i = -M \quad (6)$$

有唯一的对称解 P .

引理 2^[6] $(F, \sum_{i=1}^l G_i)$ 是稳定的充分必要条件是对于任何 $M > 0$, Lyapunov-型方程

$$PF + F'P + \sum_{i=1}^l G_i'PG_i = -M$$

有正解 $P > 0$.

引理 3 设 $(F, \sum_{i=1}^l G_i)$ 是稳定的, $M \geq 0$, 则式(6)有唯一解 $P \geq 0$.

证 考虑下列 Lyapunov-型方程

$$PF + F'P + \sum_{i=1}^l G_i'PG_i = -(M + \epsilon I),$$

其中 $\epsilon > 0, I$ 是单位矩阵. 根据引理 2 知, 上述方程有解 $P_\epsilon > 0$, 容易证明 P_ϵ 关于 ϵ 是单调有界的, $P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon \geq 0$ 是式(6)的解, 而且由引理 1 知解是唯一的.

定理 2 的证明分为两步:

第一步 首先证明在定理 2 的条件下, 对任何 $\epsilon > 0$, GARE

$$PA + A'P + \sum_{i=1}^l \sigma_i' P \sigma_i - PBN^{-1}B'P + Q + \epsilon I = 0 \quad (7)$$

有一个反馈能稳解是 $P_\epsilon > \hat{P}$, $(A - BN^{-1}B'P_\epsilon, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的.

证 因为 $(A, B, \sigma_1, \dots, \sigma_l)$ 是能稳的, 根据定义存在常数矩阵 K_0 使 $(A - BK_0, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的, 令 $A_0 = A - BK_0$, 由引理 1 知方程

$$P_1 A_0 + A_0' P_1 + \sum_{i=1}^l \sigma_i' P_1 \sigma_i + K_0' N K_0 + Q + \epsilon I = 0 \quad (8)$$

有对称解 P_1 . 容易验证下列恒等式成立:

$$\begin{aligned} P(A - BJ) + (A - BJ)'P + J'NJ = \\ P(A - BK) + (A - BK)'P + K'NK + (K - J)'N(K - J). \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $K = N^{-1}B'P$, J 是任何适当维数的矩阵. 在式(9)中令 $J = K_0, P = \hat{P}$, 并注意到方程(2)可得

$$\begin{aligned} \hat{P}(A - BK_0) + (A - BK_0)'\hat{P} + K_0' N K_0 + \sum_{i=1}^l \sigma_i' \hat{P} \sigma_i - \\ \hat{K}'(N - \hat{N})\hat{K} - (\hat{K} - K_0)'N(\hat{K} - K_0) + \hat{Q} = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

上式中的 $\hat{K} = \hat{N}^{-1}B'\hat{P}$. 式(8)减去式(10)得

$$\begin{aligned} (P_1 - \hat{P})A_0 + A_0'(P_1 - \hat{P}) + \sum_{i=1}^l \sigma_i'(P_1 - \hat{P})\sigma_i + \\ \hat{K}'(N - \hat{N})\hat{K} + (\hat{K} - K_0)'N(\hat{K} - K_0) + (Q + \epsilon I - \hat{Q}) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

因为 $(A - BK_0, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的, $Q - \hat{Q} \geq 0, N - \hat{N} \geq 0$, 因此根据引理 2 知 $P_1 > \hat{P}$.

取 $K_1 = N^{-1}B'P_1, A_1 = A - BK_1$, 今证明 $(A_1, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的. 在式(9)中, 取 $J = K_0, P = P_1$, 结合式(8)得

$$P_1 A_1 + A_1' P_1 + \sum_{i=1}^l \sigma_i' P_1 \sigma_i + (K_1 - K_0)'N(K_1 - K_0) + Q = 0. \quad (12)$$

在式(9)中,取 $J = K_1, P = \hat{P}$, 并给合方程(2)可得

$$\begin{aligned} & \hat{P}(A - BK_1) + (A - BK_1)' \hat{P} + K_1' NK_1 + \sum_{i=1}^l \sigma_i' \hat{P} \sigma_i - \\ & \hat{K}'(N - \hat{N}) \hat{K} - (\hat{K} - K_1)' N (\hat{K} - K_1) + \hat{Q} = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

式(12)减去式(13)可得

$$\begin{aligned} & (P_1 - \hat{P})A_1 + A_1'(P_1 - \hat{P}) + \sum_{i=1}^l \sigma_i'(P_1 - \hat{P})\sigma_i = \\ & - (K_1 - K_0)' N (K_1 - K_0) - \hat{K}'(N - \hat{N}) \hat{K} - \\ & (\hat{K} - K_1)' N (\hat{K} - K_1) - (Q + \epsilon I - \hat{Q}), \end{aligned}$$

仍由引理 2 知 $(A_1, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的. 由引理 1, 方程

$$P_2 A_1 + A_1' P_2 + \sum_{i=1}^l \sigma_i' P_2 \sigma_i + K_1' NK_1 + Q + \epsilon I = 0$$

有对称解 P_2 , 且类似于上面的证明可知, $P_2 > \hat{P}$,

$(A - BK_2, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的, 这里 $K_2 = N^{-1} B' P_2$, $A_2 = A - BK_2$.

一般我们可以令 $K_i = N^{-1} B' P_i, A_i = A - BK_i$. 通过反复运用引理 2, 我们可以得到一种迭代序列, 具体而言就是: 若 $(A - BK_i, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的, 则可通过求解

$$P_{i+1} A_i + A_i' P_{i+1} + \sum_{i=1}^l \sigma_i' P_{i+1} \sigma_i + K_i' NK_i + Q + \epsilon I = 0$$

来确定 P_{i+1} . 由

$$\begin{aligned} & (P_{i+1} - \hat{P})A_i + A_i'(P_{i+1} - \hat{P}) + \sum_{i=1}^l \sigma_i'(P_{i+1} - \hat{P})\sigma_i + \\ & \hat{K}'(N - \hat{N}) \hat{K} + (\hat{K} - K_i)' N (\hat{K} - K_i) + (Q + \epsilon I - \hat{Q}) = 0 \end{aligned}$$

得证 $P_{i+1} > \hat{P}$. 由方程

$$\begin{aligned} & (P_{i+1} - \hat{P})A_{i+1} + A_{i+1}'(P_{i+1} - \hat{P}) + \\ & \sum_{i=1}^l \sigma_i'(P_{i+1} - \hat{P})\sigma_i = \\ & - (K_{i+1} - K_i)' N (K_{i+1} - K_i) - \hat{K}'(N - \hat{N}) \hat{K} - \\ & (\hat{K} - K_{i+1})' N (\hat{K} - K_{i+1}) - (Q + \epsilon I - \hat{Q}) \end{aligned}$$

可确定 $(A_{i+1}, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的. 由方程

$$\begin{aligned} & (P_i - P_{i+1})A_i + A_i'(P_i - P_{i+1}) + \sum_{i=1}^l \sigma_i'(P_i - P_{i+1})\sigma_i = \\ & - (K_{i+1} - K_i)' N (K_{i+1} - K_i) \end{aligned}$$

和引理 3 可确定 $P_i \geq P_{i+1}$. 这样的迭代过程可一直进行下去, 得到解序列

$$\{P_i: P_i > \hat{P}, P_1 \geq P_2 \geq \cdots \geq P_i \geq \cdots, i = 1, 2, \cdots\}$$

和稳定的矩阵对序列 $\{(A - BK_i, \sum_{i=1}^l \sigma_i): i = 1, 2,$

$\cdots\}$. 矩阵序列 $\{P_i\}$ 是单调有下界的, 因此极限存在, 令 $P_\epsilon = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i, K_\epsilon = N^{-1} B' P_\epsilon, A_\epsilon = A - BK_\epsilon$, 则

可证明 P_ϵ 是 GARE(7) 的解, $P_\epsilon > \hat{P}$, $(A_\epsilon, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的. 实际上, P_ϵ 是 GARE (7) 的解是显然的, 今证明 $P_\epsilon > \hat{P}$. 通过简单的计算知

$$\begin{aligned} & (P_\epsilon - \hat{P})A_\epsilon + A_\epsilon'(P_\epsilon - \hat{P}) + \sum_{i=1}^l \sigma_i'(P_\epsilon - \hat{P})\sigma_i + \\ & \hat{K}'(N - \hat{N}) \hat{K} + (\hat{K} - K_\epsilon)' N (\hat{K} - K_\epsilon) + \\ & (Q + \epsilon I - \hat{Q}) = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

若 $P_\epsilon - \hat{P}$ 非正定, 取 $0 \neq \xi \in \text{Ker}(P_\epsilon - \hat{P})$, 用 ξ' 和 ξ 分别左乘、右乘式(14) 的两边, 得

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi' \left(\sum_{i=1}^l \sigma_i'(P_\epsilon - \hat{P})\sigma_i \right) \xi = \\ - \xi' [\hat{K}'(N - \hat{N}) \hat{K} + \\ (\hat{K} - K_\epsilon)' N (\hat{K} - K_\epsilon) + \\ (Q + \epsilon I - \hat{Q})] \xi < 0, \quad (15) \end{aligned}$$

式(15)是一个矛盾, 故 $P_\epsilon - \hat{P}$ 是正定的, 或者说 P_ϵ

$> \hat{P}$. 再由引理 2 得证 $(A_\epsilon, \sum_{i=1}^l \sigma_i)$ 是稳定的, 根据定义 P_ϵ 是一个反馈能稳解.

第二步 在第一步的基础上, 容易证明 P_ϵ 关于 ϵ 单调有下界, 故极限存在, 记 $P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon$, 则 P 是 GARE(1) 的解, $P \geq \hat{P}$. 由于 P 是反馈能稳解的极限, 因此根据定义也不难验证 P 是一个强解. 定理 2 由此得证.

推论 1 的证明: 注意到若令 $Q = 0$, GARE(1) 总有零解, 利用定理 2, 推论 1 的结论是显然的.

4 结论(Conclusions)

本节我们将阐述如下一些事实, 一些显见的结论请读者自证.

1) 上一节给出的迭代算法可以看成是求解确定性代数 Riccati 方程的 Kleinman 迭代算法的推广, 见文献[7]. 而且可以证明迭代的收敛速度是二次的, 即存在常数 C , 对 $i = 2, 3, \cdots$, 有

$$\|P_i - P_{i+1}\| \leq C \|P_i - P_{i-1}\|^2.$$

2) 容易证明 P 是 GARE(1) 的强解蕴涵着 $\sigma(A - BN^{-1} B' P) \subset C^{-, 0}$ 但是反过来不成立, 读者很容易举出这方面的反例.

3) 需要指出的是, 定理 1 的条件强于定理 2 的条件. 这是因为根据文献[3]的定理 4.1 知, 对任何 $Q > 0, N > 0$, 如果 (A, B) 是能稳的, 且式(3)成立, 则 GARE(1) 有解 $P_0 > 0$. 根据文献[8] 的定理 1 有

$(A, B, \sigma_1, \dots, \sigma_l)$ 是能稳的. 这说明定理 1 的条件蕴涵着定理 2 的条件, 反之则不成立, 见文献[2]中给出的反例.

因此我们在较定理 1 弱的条件下, 获得了更强的结论.

参考文献(References)

- [1] de Souza C E, Fragoso M D. On the existence of maximal solution for generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control [J]. Systems and Control Letters, 1990, 14(3): 233 - 239
- [2] Zhang Weihai. A study on algebraic Riccati equation arising from infinite horizon stochastic L-Q optimal control [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1998 (in Chinese)
- [3] Wonham W M. On a matrix Riccati equation of stochastic control [J]. SIAM J. Control, 1968, 6(4): 681 - 697
- [4] Gao Z Y, Ahmed N U. Feedback stabilizability of non-linear stochas-

tic systems with state-dependent noise [J]. Int. J. Control, 1987, 45 (2): 729 - 737

- [5] Willems J L, Willems J C. Feedback stabilizability for stochastic systems with state and control dependent noise [J]. Automatica, 1976, 12(3): 277 - 283
- [6] Zhang Weihai, Yuan Fuyu, Wei Qicai. A Lyapunov-type equation on mean square stability of stochastic systems [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1998, 15(4): 39, 133 - 134
- [7] Kleinman D L. On an iterative technique for Riccati equation computations [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1968, 13(1): 114 - 115
- [8] Zhang Weihai. A note on the stabilizability of the stochastic systems [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17(1): 129 - 132

本文作者简介

张维海 1965 年生. 1998 年获浙江大学博士学位. 现为山东轻工业学院副教授. 主要研究方向: 随机控制理论, 随机过程的极限理论, 最佳估计理论等. Email: zwhtl@public.jn.sd.cn

下 期 要 目

- | | |
|--|--------------------|
| 摄动类摆系统的总体性质及鲁棒稳定性 | 杨 莹, 黄 琳 |
| 导弹制导的鲁棒几何方法 | 张友安, 胡云安, 林 涛 |
| 模糊小波基神经网络的机器人轨迹跟踪控制 | 孙 炜, 王耀南 |
| 广义区间系统的稳定性与二次能稳分析 | 苏晓明, 张庆灵 |
| 离散 H_∞ 滤波系统最优范数计算的特征值算法 | 吴志刚, 钟万颢 |
| 基于 RBF 神经网络的一类不确定非线性系统自适应 H_∞ 控制 | 陈 谋, 姜长生, 吴庆宪, 曹邦武 |
| 最佳动力换挡规律自学习算法的收敛性分析 | 杨志刚, 曹长修, 苏玉刚 |
| 动态未知环境中移动机器人的滚动路径规划及安全性分析 | 张纯刚, 席裕庚 |
| 纺织品检测中的模式识别应用 | 韩武鹏, 陈文楷, 刘正耀 |
| 非最小相位搅拌机的鲁棒控制 | 王 伟, S. Engell |
| 基于离散变结构控制的 DC/DC 变换器 | 孟光伟, 瞿少成, 蔡汉强, 姚琼荟 |
| 最佳拟合与神经网络相结合实现传感器特性线性化 | 朱庆保 |
| 一类非线性系统的自组织模糊 CMAC 神经网络自适应重构跟踪控制 | 王 源, 胡寿松, 吴庆宽 |
| 具有时变时滞的不确定时滞系统的输入-输出能量解耦 | 毛维杰, 褚 健 |
| 基于 H_∞ 控制理论的 2-DOF 内模控制器设计及其在电力系统中的应用 | 李树荣, 王 钊 |
| 基于自适应阻抗控制的轴孔装配方法 | 芦 俊, 颜景平, 陈俊杰 |
| 不确定时滞线性系统的鲁棒容错控制研究 | 刘 鹏, 周东华 |
| 一种基于复数编码的遗传算法 | 郑朝晖, 张 焱, 裘聿皇 |