文章编号: 1000 - 8152(2002)06 - 0923 - 04

不确定关联大系统鲁棒分散可靠 H_∞ 控制*

桂卫华, 陈　宁, 吴　敏
(中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 410083)

摘要: 针对一类具有不确定性关联大系统,研究其鲁棒分散可靠状态反馈 H_∞ 控制器的设计方法.采用线性矩阵不等式的方法,给出了当控制器在规定范围内的一部分失效时控制器存在的充分条件,并能保证闭环系统可靠稳定和具有一定的 H_∞ 性能.仿真例子说明了方法的有效性.

关键词: 分散控制; 不确定性大系统; 可靠 H_∞ 控制; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Robust decentralized reliable H_∞ control for uncertain large-scale systems

GUI Wei-hua, CHEN Ning, WU min
(College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The design of decentralized robust reliable H_∞ controller is studied for a class of large-scale systems with parametric uncertainty. Based on linear matrix inequalities, the sufficient condition for the existence of a decentralized robust H_∞ state feedback controller has been presented despite possible actuator failures within prespecified subset of actuators. The given example shows the application of the method.

Key words: decentralized control; uncertain large-scale systems; reliable H_∞ control; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

目前,不确定大系统鲁棒分散 H_∞ 控制得到了广泛的关注和发展[1~4].由于元器件质量、环境变化等各种因素,执行器和传感器失效是实际工程系统经常遇到的问题.因此,随着对系统可靠性要求的提高,系统可靠控制问题的研究受到许多研究者的重视和关注.近年来,不确定系统的可靠 H_∞ 控制问题的研究已取得了一些成果[5,6].但现有结果多是研究集中控制问题,而对于不确定关联系统的分散鲁棒 H_∞ 控制方面的结果却鲜见报道.文[7]针对相似对称组合大系统,研究了分散容错 H_∞ 控制问题.鲁棒分散 H_∞ 控制不仅可以从理论上简化复杂问题,实现起来也经济可靠.

本文针对一类具有不确定性关联大系统,研究鲁棒分散可靠 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法.采用线性矩阵不等式的方法,给出了当控制器在规定范围内的一部分失效时,仍能保证闭环系统可靠稳定和具有一定的 H_∞ 性能.

2 问题描述(Problem description)

考虑由 N 个子系统组成的关联大系统,其子系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= [A_i + \Delta A_i(t)]x_i + B_i u_i + D_i\omega_i + \\ &\quad \sum_{j=1, i\neq j}^{N} A_{ij}(t)x_j, \qquad (1)\\ z_i &= E_i x_i,\ i = 1,2,\cdots,N.\end{aligned}$$

其中, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \omega_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ 和 $z_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ 分别为第 i 个子系统的状态、控制输入、干扰输入和被控输出向量.矩阵 A_i, B_i, E_i 和 D_i 均具有相应维数的常数矩阵.设系统(1)满足下列假定条件: (A_i, B_i) 是可稳定的.矩阵 $A_{ij}(t)$ 表示子系统的关联. $\Delta A_i(t)$ 表示子系统间的不确定性,设他们具有如下形式:

$$\Delta A_i(t) = L_i F_i(t) G_i. \qquad (2)$$

其中, L_i 和 G_i 为已知常数矩阵. $F_i(t)$ 是具有适当维数的未知函数矩阵,其元素是 Lebesgue 可测的,且满足:

$$F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leqslant I. \qquad (3)$$

* 基金项目:国家 863 应用基础研究基金(863 - 511 - 9845 - 003, 863 - 511 - 945 - 014)和国家自然科学基金资助项目.
收稿日期: 2000 - 09 - 16; 收修改稿日期: 2001 - 12 - 10.

令

$$\begin{cases} A = \text{block-diag}(A_1,\cdots,A_N), \\ B = \text{block-diag}(B_1,\cdots,B_N), \\ C = \text{block-diag}(C_1,\cdots,C_N), \\ D = \text{block-diag}(D_1,\cdots,D_N), \\ E = \text{block-diag}(E_1,\cdots,E_N), \\ L = \text{block-diag}(L_1,\cdots,L_N), \\ F = \text{block-diag}(F_1,\cdots,F_N), \\ G = \text{block-diag}(G_1,\cdots,G_N), \\ K = \text{block-diag}(K_1,\cdots,K_N). \end{cases} \tag{4}$$

$H = (A_{ij})_{i\neq j}$ 表示以 A_{ij} 为第 i 行第 j 列元素构成的分块矩阵，$x = [x_1^{\mathrm T} \quad x_2^{\mathrm T} \quad \cdots \quad x_N^{\mathrm T}]$，对关联大系统，则闭环系统的集中形式可写为

$$\dot x = (A + LFG + H)x + Bu + D\omega, \tag{5a}$$

$$z = Ex. \tag{5b}$$

执行器分为两部分，其中一部分为容易失效的，记为 $\Omega \subseteq \{1,2,\cdots,m\}$，这一部分对于稳定系统而言是冗余的，但可用来改善系统性能. 另一部分记为 $\bar\Omega \subseteq \{1,2,\cdots,m\} - \Omega$，这一部分执行器不会失效. 对控制矩阵引入如下分解

$$B = B_{\Omega} + B_{\bar\Omega}. \tag{6}$$

其中 B_Ω 和 $B_{\bar\Omega}$ 是按照 $\bar\Omega$ 和 Ω 把矩阵 B 对应列置为零而得到的. 执行器在系统中起着传输控制器输出到对象的作用，不失一般性，我们假设其传递函数为1，同时当它失效时，假设其输出为任意能量有限的信号，且干扰信号作用到对象上去. 我们把实际失效的一部分执行器记为 $\omega \subseteq \Omega$，并对 B 采用如下分解

$$B = B_\omega + B_{\bar\omega}. \tag{7}$$

其中 B_ω 和 $B_{\bar\omega}$ 类似于 B_Ω 和 $B_{\bar\Omega}$ 对矩阵 B 的分解. 根据定义，不难得到如下事实

$$\begin{cases} B_\Omega B_{\bar\Omega}^{\mathrm T} = B_\omega B_\omega^{\mathrm T} + B_{\Omega-\omega} B_{\Omega-\omega}^{\mathrm T}, \\ B_{\bar\Omega} B_{\bar\Omega}^{\mathrm T} = B_{\bar\omega} B_{\bar\omega}^{\mathrm T} - B_{\Omega-\omega} B_{\Omega-\omega}^{\mathrm T}. \end{cases} \tag{8}$$

我们记 $\omega_f = [\omega^{\mathrm T} \quad \omega_u^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$，其中 $\omega_u \in \mathbb{R}^m$ 是由于对应的执行器失效而产生的干扰输入.

考虑如下状态反馈

$$u = Kx, \tag{9}$$

使得由式(1)和(9)组成的闭环系统 Σ_c 能分散可靠稳定系统(1)，同时可靠地抑制外界干扰 ω 和由于执行器失效所产生的干扰 ω_f，使下列条件满足：

1) 对所有容许的不确定性，闭环系统 Σ_c 分散二次稳定；

2) 给定 $\gamma > 0$，对所有容许的不确定性，从干扰 ω 到输出 z 的传递函数为 $T_{z\omega}(s)$ 满足：

$$\| T_{z\omega} \|_\infty < \gamma, \ \forall \omega \in L_2[0,\infty).$$

下面给出文中要用到的几个重要的引理.

引理 1[2] 设 Ξ 是具有适当维数的负定对称矩阵，$P = P^{\mathrm T}, L, G$ 是具有适当维数的向量矩阵，$F(t)$ 是不确定性矩阵，且满足(3)，那么

$$\Xi + PLF(t)G + G^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)L^{\mathrm T}P < 0,$$

当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$，使得下式成立

$$\Xi + \varepsilon PLL^{\mathrm T}P + \varepsilon^{-1}L^{\mathrm T}L < 0.$$

引理 2[1] 设 X 和 Y 是具有适当维数的向量或矩阵，则对任意正数 $\alpha > 0$，有

$$X^{\mathrm T}Y + Y^{\mathrm T}X \leqslant \alpha X^{\mathrm T}X + \alpha^{-1}Y^{\mathrm T}Y$$

成立.

引理 3[1] 对任意分块矩阵

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix}.$$

其中 $H_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,N)$ 是具有适当维数的矩阵块，H_{ii} 为方阵，存在矩阵 $H_k(k = 1,2,\cdots,N)$ 使得 $H = \sum_{k=1}^{N} H_k$ 且 $\sum_{k=1}^{n} H_k H_k^{\mathrm T}$ 是与 H 具有相同维数矩阵块的块对角矩阵.

3 鲁棒分散可靠 H_∞ 控制(Robust decentralized reliable H_∞ control)

由系统(5)和控制器(9)构成的闭环系统可写为

$$\begin{cases} \dot x = (A + LFG + H + BK)x + D\omega, \\ z = Ex. \end{cases} \tag{10}$$

首先针对上述不确定性系统给出如下重要的引理.

引理 4[8] 考虑闭环系统(10)，对任意给定的正数 γ 和可允许的参数不确定性 $F(t)$，若存在一个正定对称阵 P，满足

$$(A + LFG + BK + H)^{\mathrm T}P + P(A + LFG + BK + H) + \gamma^{-2}PDD^{\mathrm T}P + E^{\mathrm T}E < 0 \tag{11}$$

时，系统(5)是鲁棒二次稳定的，并满足 $\| T_{z\omega} \|_\infty < \gamma, \forall \omega \in L_2[0,\infty)$.

下面给出当执行器不失效时的鲁棒分散 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法.

定理 1 对任意给定的正数 γ，若存在正定矩阵 $X > 0, \rho > 0, \varepsilon > 0$ 和 $\delta_k > 0$，满足

$$W_1 = \begin{bmatrix} \bar A_1 & XE^{\mathrm T} & XG^{\mathrm T} & D & [X \cdots X] \\ EX & -I & & & \\ GX & & -\varepsilon I & & \\ D^{\mathrm T} & & & -\gamma^2 I & \\ [X \cdots X]^{\mathrm T} & & & & -\mathrm{diag}(\delta_1,\cdots,\delta_N) \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

式中

$$\bar{A}_1 = XA^{\mathrm{T}} + AX - \rho BB^{\mathrm{T}} + \varepsilon LL^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{N} \delta_k H_k H_k^{\mathrm{T}},$$

H_k 满足引理 3 的条件,则由闭环系统(10) 二次稳定且满足 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$. 而且,无记忆的状态反馈控制器可由下式给出:

$$u = -\frac{\rho}{2} B^{\mathrm{T}} X^{-1} x(t). \tag{13}$$

证　由引理 4,若式(11)成立,则闭环系统(10)稳定且满足 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$. 将式(11)展开得

$$A^{\mathrm{T}}P + \Delta A^{\mathrm{T}}P - \rho PBB^{\mathrm{T}}P + H^{\mathrm{T}}P + PA + P\Delta A + PH + \gamma^{-2}PDD^{\mathrm{T}}P + E^{\mathrm{T}}E < 0. \tag{14}$$

考虑到不确定性的表达形式和引理 1 有

$$\Delta A^{\mathrm{T}}P + P\Delta A = (LFG)^{\mathrm{T}}P + PLFG < \varepsilon PLL^{\mathrm{T}}P + \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G. \tag{15}$$

又根据引理 2 和 3 有

$$H^{\mathrm{T}}P + PH \leqslant \delta PHH^{\mathrm{T}}P + \delta^{-1}I = P\sum_{k=1}^{m} \delta_k H_k H_k^{\mathrm{T}} P + \sum_{k=1}^{m} \delta_k^{-1} I. \tag{16}$$

考虑到式(15)和(16),若下式成立

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - \rho PBB^{\mathrm{T}}P + \varepsilon PLL^{\mathrm{T}}P + \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G + \gamma^{-2}PDD^{\mathrm{T}}P + E^{\mathrm{T}}E + P\Big(\sum_{k=1}^{N} \delta_k H_k H_k^{\mathrm{T}}\Big)P + \sum_{k=1}^{N} \delta_k^{-1} I < 0, \tag{17}$$

则式(14)成立. 对式(17)两边同时乘以 P^{-1}, 令 $X = P^{-1}$, 并由 Schur 补可得式(17)等价于式(12).

证毕.

注 1　为了求解这个控制器,可解如下最小化问题:

$$\min_{X,\rho,\varepsilon,\delta_k} \quad \gamma$$

$$\text{s.t.} \quad -X < 0,\ -\rho < 0,\ -\varepsilon < 0,\ -\delta_k < 0, W_1 < 0. \tag{18}$$

对于上述问题,可用 LMI 控制工具箱的标准函数求解[9].

下述定理给出了系统(1)具有 H_∞ 范数界 γ 的鲁棒分散可靠 H_∞ 镇定的一个充分条件.

定理 2　对任意给定的正数 γ,若存在正定矩阵 $X > 0, \rho > 0, \varepsilon > 0$ 和 $\delta_k > 0$, 满足

$$W_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & XE^{\mathrm{T}} & XG^{\mathrm{T}} & D & B_{\Omega} & [X \cdots X] \\ EX & -I & & & & \\ GX & & -\varepsilon I & & & \\ D^{\mathrm{T}} & & & -\gamma^2 I & & \\ B_{\Omega}^{\mathrm{T}} & & & & -\gamma^2 I & \\ [X \cdots X]^{\mathrm{T}} & & & & & -\mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_N) \end{bmatrix} < 0. \tag{19}$$

式中

$$\bar{A}_2 = XA^{\mathrm{T}} + AX - \rho B_{\bar{\Omega}} B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}} + \varepsilon LL^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{N} \delta_k H_k H_k^{\mathrm{T}}.$$

H_k 满足引理 3 的条件,则对于任意执行器 $\omega \subseteq \Omega$ 失效时,由系统(5) 和控制器(9) 构成的闭环系统可靠稳定且 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$. 而且,无记忆的状态反馈控制器可由下式给出:

$$u = -\frac{\rho}{2} B^{\mathrm{T}} X^{-1} x(t). \tag{20}$$

证　根据 B_ω 和 $B_{\bar{\omega}}$ 的定义,由系统(5)和控制器(20)构成的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = \Big(A + LFG + H - \dfrac{\rho}{2} B_{\bar{\omega}} B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} X^{-1}\Big)x + [D \quad B_\omega]\omega_f, \\ z = Ex. \end{cases} \tag{21}$$

由引理 4,若式(11)成立,则闭环系统(13)稳定且满足 $\| T_{z\omega} \|_\infty < \gamma$. 将式(11)展开得

$$A^{\mathrm{T}}P + \Delta A^{\mathrm{T}}P - \rho PB_{\bar{\omega}} B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} P + H^{\mathrm{T}}P + PA + P\Delta A + PH + \gamma^{-2}PDD^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-2}PB_{\omega}B_{\omega}^{\mathrm{T}}P + E^{\mathrm{T}}E < 0. \tag{22}$$

考虑到式(15)和式(16)和下述事实

$$B_{\bar{\Omega}} B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}} \leqslant B_{\bar{\omega}} B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}. \tag{23}$$

若下式成立

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - \rho PB_{\Omega}B_{\Omega}^{\mathrm{T}}P + \varepsilon PLL^{\mathrm{T}}P + \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G + \gamma^{-2}PDD^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-2}PB_{\bar{\Omega}}B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}P + E^{\mathrm{T}}E + P\Big(\sum_{k=1}^{N} \delta_k H_k H_k^{\mathrm{T}}\Big)P + \sum_{k=1}^{N} \delta_k^{-1} I < 0, \tag{24}$$

则式(22)成立. 对式(24)两边同时乘以 P^{-1},令 $X = P^{-1}$, 并由 Schur 补可得式(24)等价于式(19).

证毕.

注 2　为了求解这个控制器,可解如下最小化问题:

$$\min_{X,\rho,\varepsilon,\delta_k} \quad \gamma$$

$$\text{s.t.} \quad -X < 0,\ -\rho < 0,\ -\varepsilon < 0,\ -\delta_k < 0, W_2 < 0, \tag{25}$$

对于上述问题,可用 LMI 控制工具箱的标准函数求解[9].

4　算例(An example)

考虑由两个子系统构成的不确定大系统(1),其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ E_1 = [0 \quad 1],$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ E_2=[0\quad 1],$$

$$L_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ G_1=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.2\end{bmatrix},$$

$$L_2=\begin{bmatrix}2&0\\0&-2\end{bmatrix},\ G_2=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix},$$

$$F_1(t)=F_2(t)=\begin{bmatrix}\sin t&0\\0&\cos t\end{bmatrix}.$$

令

$$H_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ H_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&2&0&0\end{bmatrix},$$

容易验证满足引理4的条件.设第一个子系统的第二个执行器容许失效,则

$$B_{\bar{\Omega}}=\begin{bmatrix}0.3&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ B_{\Omega}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0.5&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

令 $\gamma=1$. 根据定理2,解LMI(19)可得分散可靠反馈控制器

$$K=\text{block-diag}\{K_1,K_2\}=$$

$$\begin{bmatrix}6.4620&-9.7723&0&0\\22.7468&-18.1722&0&0\\0&0&-1.1438&-5.9427\end{bmatrix}.$$

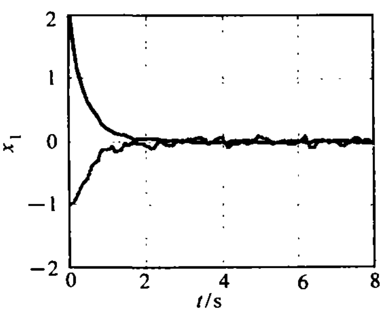

图1 失效时第1个子系统的状态响应曲线

Fig. 1 The state response curve of the first subsystem when possible actuator failures

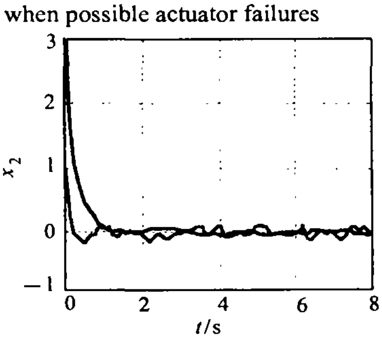

图2 失效时第2个子系统的状态响应曲线

Fig. 2 The state response curve of the second subsystem when possible actuator failures

设外界干扰 ω 为0~0.5间的随机数,取初始条件 $x_1=[2\quad 1]^{\mathrm{T}}$, $x_2=[3\quad 1]^{\mathrm{T}}$ 进行仿真,结果如图1和2所示,分别表示失效时两个子系统的状态曲线.仿真结果表明:本文所得的可靠设计方法是有效的,可以达到预期的控制目的.

5 结论(Conclusions)

本文针对一类具有不确定性关联大系统,研究鲁棒分散可靠 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法.把现有的可靠 H_∞ 控制器结果扩展到了关联大系统.采用线性矩阵不等式的方法,不需调整参数,计算简便.所给出的控制器能可靠鲁棒镇定闭环系统且保证一定的 H_∞ 性能.

参考文献(References)

[1] Wang Y Y, Xie L H, de Souza C E. Robust decentralized control of interconnected uncertain linear systems [A]. Proceedings of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control [C]. New Orleans, Louisiana, USA, 1995, 2653 – 2658

[2] Shang Q, Sun Y. Decentralized robust H_∞ control for uncertain interconnected large-scale systems [J]. Control and Decision, 1999, 14(4): 334 – 401 (in Chinese)

[3] Wang X, Gao L, Zhang C. Quadratic stability and decentralized stabilization via state feedback for uncertain interconnected systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(3): 397 – 401 (in Chinese)

[4] Wang X, Gao L, Zhang C. H_∞ small-gain condition on quadratic stability and connective stability of uncertain composite systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(4): 600 – 602 (in Chinese)

[5] Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1992, 37(3): 290 – 304

[6] Seo C J, Kim B K. Robust and H_∞ control for linear systems with parameter uncertainty and actuator failure [J]. Automatica, 1996, 32(3): 465 – 467

[7] Huang S, Lam J, Yang G H, et al. Fault tolerant decentralized H_∞ control for symmetric composite systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1999, 44(11): 2108 – 2114

[8] Xie L, Fu M, de Souza C E. H_∞ control and quadratic stavilization of systems with parametric uncertainty via output feedback [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1992, 37(8): 1253 – 1255

[9] Gahinet P, Nemirovski A, Laub J, et al. LMI Control Toolbox [M]. Natick MA, U.S.: The Math. Works Inc., 1995

本文作者简介

桂卫华 见本刊2002年第2期第206页.

陈 宁 1970年生.在读博士生.研究方向:LMI方法及应用,大系统分散控制, H_∞ 控制和结构奇异值控制.

吴 敏 见本刊2002年第2期第206页.