

带有外干扰的滞后离散广义系统鲁棒 H_∞ 控制器设计: LMI 方法*

谢湘生, 胡 刚, 刘洪伟

(广东工业大学 系统工程研究所, 广州 510090)

摘要: 研究了带有外部干扰与状态滞后的离散广义系统鲁棒控制器的设计问题. 在对系统进行稳定分析的基础上, 给出了系统可以鲁棒镇定的条件, 并且将这一条件表示为线性矩阵不等式(LMI)的形式, 从而使得控制器的设计问题可利用现有的 LMI 方法解决.

关键词: 离散广义系统; 滞后; 稳定性; 鲁棒控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Robust H_∞ control of discrete-time singular systems with exogenous disturbance and time-delay

XIE Xiang-sheng, HU Gang, LIU Hong-wei

(Systems Engineering Institute, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: The design of robust controller for discrete-time singular systems with exogenous disturbance and time-delay is discussed. Based on the stability analysis for the systems, a sufficient condition of robust stabilization is established in terms of linear matrix inequality. Then the problem of design of robust feedback controller can be solved on the basis of LMI techniques.

Key words: discrete-time singular system; time-delay; stability; robust control; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

广义系统是客观系统的一种自然表示, 与通常的系统相比可用广义系统来描述更多实际的系统特征, 如关于物理变量的静态限制、脉冲元件等^[1], 因此广义系统在化学工程、受限力学系统、复杂电网络、经济系统等中得到了广泛的应用, 它的研究也受到人们的关注. 最近文[2]研究了离散广义系统的镇定问题, 建立了离散广义系统的设计方法, 但文中没有考虑干扰输入及滞后因素的影响. 在实际系统中必定存在不同程度的外部干扰, 滞后因素的影响也常常是不可避免的. 例如同时考虑动态均衡和静态均衡的经济系统是广义系统, 若其中某些影响因素对该经济系统的影响要延续一个以上的周期, 则该经济系统模型是带滞后的广义系统(尽管许多常见的经济模型都可以化为正常系统求解, 但对带滞后的广义系统, 这样做限制了初始条件取值的范围, 且丧失了无穷远模态等系统结构信息^[3]). 由对通常的离散系统及连续的广义系统相应问题的研究^[4,5]可知, H_∞ 控制是研究系统干扰抑制鲁棒镇定的一种较好的方法, 其研究近年来受到人们广泛关注, 本文的

目的是对带有外部扰动的滞后离散广义系统, 通过对系统进行稳定分析, 在此基础上利用线性矩阵不等式(LMI)给出鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法.

2 滞后离散广义系统的稳定性分析(Stability analysis of discrete-time singular systems with time-delay)

我们首先考虑不带控制输入的滞后离散广义系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d) + Bw(k), \quad (1a)$$

$$z(k) = Cx(k) + C_d x(k-d) + Dw(k). \quad (1b)$$

这里 x, z, w 分别是系统的状态, 量测输出, 外部干扰变量; d 为正整数, 表示时滞; 又假定 E, A, A_d, B, C, C_d, D 是具有适当维数的常数矩阵, 且 E 可以是奇异的.

众所周知, 系统(1a)可以转化为如下的维数更高的无滞后系统

$$EX(k+1) = AX(k) + Bw(k). \quad (2)$$

其中 $X(k) = [x^T(k) \ x^T(k-1) \ \cdots \ x^T(k-d)]^T$, 并且

* 基金项目: 广州市基础性研究计划(98-J-011-01)和广东省自然科学基金(980415)资助项目.

收稿日期: 2000-08-07; 收修改稿日期: 2001-12-03.

$$E = \begin{bmatrix} E & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 & A_d \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因此系统解(1a)的存在性等价于无滞后系统(2)解的存在性,并且研究系统(1)的稳定性问题可以转化为研究无滞后系统(2)的稳定性问题.但由于系统(2)的维数是系统(1a)的 d 倍,所以当时滞较大时,若利用系统(2)来研究系统(1)会使计算量大大增加,显然这不是一种解决(1)的稳定性问题的理想方法.本文将建立直接由系统(1)的参数给出的稳定性判据.

对系统(1)我们称它是正则的,如果系统(2)是正则的^[6];同样若系统(2)是因果的,就称系统(1)是因果的.由文[6]可知系统(2)正则的充分必要条件是 $\det(sE - A)$ 不恒为零,这等价于 $\det(s^{d+1}E - s^dA - A_d)$ 不恒等于零.此外当式(2)正则且 $\det(\lambda E - A) = 0$ 的所有根都在单位圆内部,即方程 $\det(\lambda E - A - \lambda^{-d}A_d) = 0$ 的所有根都在单位圆内部时,系统(2)是稳定的,因而此时系统(1)在零输入的条件下是稳定的.

类似于文[5]对通常系统的讨论我们引入如下稳定的概念.

定义 1 系统(1)称为具有指定 H_∞ 性能 γ 稳定的,如果在零输入条件下它是稳定的,并且对任意的 $w(k) \in l_2$, 在零初始条件有如下的不等式成立

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2.$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 l_2 范数.

定理 1 若存在对称矩阵 P , 正定矩阵 Q 及常数 $\gamma > 0$ 使得下面的矩阵不等式组成立

$$E^T P E \geq 0, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P A + Q + C^T C - E^T P E & A^T P A_d + C^T C_d & A^T P B + C^T D \\ A_d^T P A + C_d^T C & A_d^T P A_d + C_d^T C_d - Q & A_d^T P B + C_d^T D \\ B^T P A + D^T C & B^T P A_d + D^T C_d & B^T P B + D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

则系统(1)是具有指定 H_∞ 性能 γ 稳定的.

证 首先由不等式(4)易知,如下的不等式成立

$$\begin{bmatrix} A^T P A + Q - E^T P E & A^T P A_d \\ A_d^T P A & A_d^T P A_d - Q \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P A + C^T C + Q - E^T P E & A^T P A_d + C^T C_d & A^T P B + C^T D & 0 \\ A_d^T P A + C_d^T C & A_d^T P A_d + C_d^T C_d - Q & A_d^T P B + C_d^T D & A_d^T P F \\ B^T P A + D^T C & B^T P A_d + D^T C_d & B^T P B + D^T D - \gamma^2 I & B^T P F \\ 0 & F^T P A_d & F^T P B & -\epsilon I - F^T P F \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

由 Schur 补性质,从上式可知 $A^T P A + Q - E^T P E < 0$, 且

$$A_d^T P A_d - Q - (A_d^T P A)(A^T P A + Q - E^T P E)^{-1}(A^T P A_d) < 0.$$

故可找到正定矩阵 $Q_d, Q_d < 0$ 使得 $A_d^T P A_d - Q_d - (A_d^T P A)(A^T P A + Q - E^T P E)^{-1}(A^T P A_d) < 0$. 现在记 $Q_1 = Q$, 并取 $d-2$ 个正定矩阵 $Q_2, \dots, Q_{d-1}$ 使得

$$Q_2 - Q_1 < 0, Q_3 - Q_2 < 0, \dots, Q_d - Q_{d-1} < 0.$$

又记 $P = \text{block-diag}(P, Q_1, \dots, Q_d)$. 则 P 为对称矩阵, $E^T P E \geq 0$, 且据 Schur 补性质及式(5)易验证 $A^T P A - E^T P E < 0$. 于是由文[2]可知系统(2)是稳定的,从而在零输入条件下系统(1)是稳定的.再仿文[5]的方法,通过构造 Lyapunov 函数,可以证明在零初始条件下系统(1)满足 $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$, 因而系统(1)是具有 H_∞ 性能 γ 稳定的. 证毕

由文[2]的讨论可知,当定理 1 的条件满足时系统(2)是正则、因果并且稳定的,从而系统(1)此时也是正则、因果并且稳定的.

3 控制器的设计(Design of controller)

下面考虑带有滞后的广义离散控制系统

$$\begin{cases} Ex(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d) + Bw(k) + Fu(k), \\ z(k) = Cx(k) + C_d x(k-d) + Dw(k). \end{cases} \quad (6)$$

其中 $u(k)$ 为系统的控制变量, F 是适当维数的常数矩阵.我们的目的是寻找无记忆的静态反馈控制

$$u(k) = Kx(k) \quad (7)$$

使得闭环系统

$$\begin{cases} Ex(k+1) = (A + FK)x(k) + A_d x(k-d) + Bw(k), \\ z(k) = Cx(k) + C_d x(k-d) + Dw(k) \end{cases} \quad (8)$$

是具有指定 H_∞ 性能 γ 稳定的.

利用以上讨论结果并根据逆矩阵引理及 Schur 补性质可以证明如下定理.

定理 2 若存在对称矩阵 P 与正定矩阵 Q 及正常数 ϵ 使得下面的线性矩阵不等式组成立

$$E^T P E \geq 0, \quad (9)$$

$$\epsilon I + F^T P F > 0, \quad (10)$$

则在反馈(7)下,系统(6)的闭环系统(8)是具有指定 H_∞ 性能 γ 稳定的,这里

$$K = -(F^T P F + \epsilon I)^{-1} F^T P A. \quad (12)$$

注意定理 2 的条件(9)~(11)是一个关于矩阵变量 P, Q 及变量 ϵ 的线性矩阵不等式组. 现在已有了许多关于求解线性矩阵不等式的有效算法和软件工具包(例如[7]),利用它们求解线性不等式组就可得到所需要的反馈控制律. 此外,还可利用这些工具软件优化设计,获得具有较小反馈增益参数的状态反馈控制律.

4 算例(Illustrative example)

考虑离散广义系统(6),设它的系数矩阵分别为:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.06 & -0.08 \\ 0.09 & 0.4 & -0.085 \\ -0.05 & 0.09 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & 0.055 \\ 0.02 & 0.075 & 0 \\ 0.065 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.07 & -0.06 \\ 0.05 & 0.02 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.1 \quad 0.4 \quad -0.6], C_d = [0.02 \quad -0.06 \quad 0.05],$$

$$D = [0.02 \quad -0.1], F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0.8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

其中 d 为一个给定的正整数,据定理 2,利用仿真软件 Matlab 可得,不等式组(9)和(10)解为

$$P = \begin{bmatrix} 0.0356 & -1.3914 & 0.6686 \\ -1.3914 & 0.1466 & -0.0430 \\ 0.6686 & -0.0430 & 0.2361 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2072 & 0.2017 & -0.0280 \\ 0.2017 & 0.9906 & -0.9297 \\ -0.0280 & -0.9297 & 1.0619 \end{bmatrix},$$

$$\epsilon = 90.8989, \gamma = 0.1527.$$

故所需要的反馈律为

$$K = \begin{bmatrix} 0.0569 & 0.1193 & 0.0393 \\ 0.0448 & -0.1299 & -0.0185 \end{bmatrix}.$$

在由此得到的反馈控制下闭环系统是具有 H_∞ 性能 γ 稳定的.

5 结论(Conclusion)

本文对带有外部干扰与状态滞后的离散广义系统研究了鲁棒控制问题,在对系统进行稳定分析的基础上,建立了系统鲁棒可镇定的条件,这一条件被表成了线性矩阵不等式的形式,因此可利用凸规划方法解决系统的控制器设计问题. 给出的算例说明了文中方法的可用性.

参考文献(References)

- [1] Lewis F L. A survey of linear singular systems [J]. Circuit Syst. Sig. Processing, 1986, 5(1): 3-26
- [2] Xu S, Yang C. Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach [J]. Automatica, 1999, 35(10): 1613-1667
- [3] Liu Y, Xie X. Theory and Application of Large-Scale Dynamic Systems (8): Stability, Stabilization and Control for Singular Large-Scale Systems with Time Delay [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998 (in Chinese)
- [4] Xie X. H_∞ control for robust stabilization of singular systems [J]. Control and Decision, 1999, 14(Suppl.): 501-505 (in Chinese)
- [5] Jon H K, Hon B P. H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system [J]. Automatica, 1999, 35(9): 1443-1451
- [6] Dai L. Singular Control Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989
- [7] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A, et al. LMI Control Toolbox Users Guide [M]. Natick: The Mathworks, Inc., 1995

本文作者简介

谢湘生 1957 年生,博士.现为广东工业大学教授.研究方向为滞后系统,广义系统的控制,系统科学在管理中的应用. Email: xshxie@163.com

胡刚 1964 年生,博士.现为广东工业大学副教授.研究方向为广义系统,滞后系统以及容错控制等.

刘洪伟 1962 年生,博士.现为广东工业大学副教授.研究方向为随机系统控制,智能控制,信息科学在管理中的应用.