文章编号: 1000-8152(2003)03-0323-06

具有时滞的奇异系统 H_∞ 控制

夏元清, 贾英民
(北京航空航天大学 第七研究室,北京 100083)

摘要: 针对具有时滞的奇异系统 H_∞ 输出反馈控制问题,利用 Lyapunov 泛函方法,得到闭环系统稳定且具有 H_∞-范数界 γ 的充分条件,基于相应的 LMI 可行解给出了动态控制器显式表示.最后,数值例子表明了该方法的正确性.

关键词: 奇异系统; 时滞; 输出反馈; H_∞ 控制; 矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H_∞ output feedback controller design for linear singular systems with time-delay

XIA Yuan-qing, JIA Ying-min
(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The problem of designing output feedback controllers for linear singular system with time-delay is addressed. Based on the Lyapunov functional approach, the existence conditions and explicit expressions of H_∞ output feedback controllers are obtained in terms of linear matrix inequalities. Finally, an illustrative example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: singular systems; time-delay; output feedback; H_∞ control; LMI

1 引言(Introduction)

奇异系统广泛存在于许多工程系统中(如大系统、电力系统、电子网络、化学反应过程等).在这类系统中,由于传输滞后,有限计算时间和观测延迟等造成的时滞常常导致系统发生震荡甚至不稳定,因此研究具有时滞的奇异系统的控制问题是必要的.在线性系统中,有关 H_∞ 控制问题已得到充分研究[1~3],相应的研究方法和结论在时滞系统和奇异系统中得到进一步推广[4~7],文献[4,5]分别研究了时滞系统基于状态反馈和动态输出反馈 H_∞ 控制问题,文献[6,7]分别研究了奇异系统基于 J 谱分解和线性矩阵不等式方法的 H_∞ 控制问题.然而具有时滞的奇异系统的 H_∞ 控制问题还没有得到讨论.

本文对基于动态输出反馈的具有时滞的奇异系统 H_∞ 控制问题进行了研究.首先利用 Lyapunov 泛函方法导出了此类系统的稳定且具有 H_∞-范数界 γ 的充分条件,其次利用含等式约束的线性矩阵不等式方法,给出了此类系统控制存在动态输出反馈的充分条件和动态控制器的参数化表示,并进一步将含等式约束的线性矩阵不等式转化为等价的线性矩阵不等式,最后数值例子表明了该方法的有效性.

2 问题的描述(Problem description)

考虑如下具有时滞的线性奇异系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax + A_d x(t-\tau) + B_1 w + B_2 u, \\ z(t) = C_1 x(t), \\ y(t) = C_2 x(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为奇异状态变量,$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入,$w(t) \in \mathbb{R}^q$ 为干扰输入,$y(t) \in \mathbb{R}^p$ 为可测输出,$z(t) \in \mathbb{R}^s$ 为控制输出,$\tau > 0$ 为一给定常数,$E \in \mathbb{R}^{n\times n}, A, A_d, B_1, B_2, C_1, C_2$ 为相应维数的常数矩阵,rank $E = r \leqslant n$. 设全阶动态输出反馈控制器为

$$\begin{aligned} \tilde{E}\dot{\xi}(t) &= \tilde{A}\xi(t) + \tilde{B}y(t), \\ u(t) &= \tilde{C}\xi(t), \end{aligned} \tag{2}$$

则闭环系统为

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{A}_d \Phi\bar{x}(t-\tau) + \bar{B}w(t), \\ z(t) = \bar{C}\bar{x}(t). \end{cases} \tag{3}$$

其中

收稿日期:2000-12-06; 收修改稿日期:2002-11-20.
基金项目:国家自然科学基金(69625506);教育部高校博士点基金(1999000602)资助项目.

$$\bar{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix},\ \bar{E}=\begin{bmatrix}E&0\\0&\tilde{E}\end{bmatrix},$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A&B_2\tilde{C}\\ \tilde{B}C_2&\tilde{A}\end{bmatrix},\ \bar{A}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}A_{\mathrm{d}}\\0\end{bmatrix},$$

$$\Phi=[I\quad 0],\ \bar{B}=\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix},\ \bar{C}=[C_1\quad 0].$$

闭环系统(3)传递函数为 $H_{zw}(s)=\bar{C}(s\bar{E}-\bar{A}-\bar{A}_{\mathrm{d}}\Phi\mathrm{e}^{-\tau s})^{-1}\bar{B}$. 为了简洁,除时滞状态向量外,时间 t 省略.

注 1 对于一般形式的方程

$$\begin{cases}E\dot{x}(t)=Ax(t)+A_{\mathrm{d}}(t-\tau)+B_1w+B_2u,\\ z(t)=C_1x+D_{11}x(t-\tau)+D_{12}w+D_{13}u,\\ y(t)=C_2x+D_{21}x(t-\tau)+D_{22}w+D_{23}u,\end{cases}\tag{4}$$

可通过如下方法使上式转化成形式(1),因上式可表示为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}E&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix}=\\ \begin{bmatrix}A&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_{\mathrm{d}}&0\\ \begin{matrix}D_{11}\\D_{21}\end{matrix}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix}(t-\tau)+\\ \begin{bmatrix}B_1\\D_{12}\\D_{22}\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}B_2\\D_{13}\\D_{23}\end{bmatrix}u,\\ \begin{bmatrix}z\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1&I\\C_2&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix},\end{cases}\tag{5}$$

所以可设 $D_{ij}=0,i=1,2,j=1,2,3$.

本文研究目的是如何确定设计全阶控制器 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 使得

1) 闭环系统(3)稳定;

2) 闭环系统(3)的传递函数满足 $\|H_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma$.

为此需要以下几个基本引理.

引理 1[2] 考虑如下对称矩阵 S:

$$S=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{12}^{\mathrm{T}}&S_{22}\end{bmatrix},\ S_{11},S_{12},S_{22}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

利用变换阵 $\tilde{T}=\begin{bmatrix}I&0\\I&I\end{bmatrix},\hat{T}=\begin{bmatrix}I&V\\0&I\end{bmatrix},V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为任意矩阵,定义下列矩阵

$$\begin{aligned}\tilde{S}&=\tilde{T}^{\mathrm{T}}S\tilde{T}=\begin{bmatrix}\tilde{S}_{11}&\tilde{S}_{12}\\ \tilde{S}_{12}^{\mathrm{T}}&\tilde{S}_{22}\end{bmatrix},\\ \hat{S}&=\hat{T}^{\mathrm{T}}S\hat{T}=\begin{bmatrix}\hat{S}_{11}&\hat{S}_{12}\\ \hat{S}_{12}^{\mathrm{T}}&\hat{S}_{22}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\tilde{S},\hat{S}$ 和 S 分块相同,则

$$\tilde{S}_{22}=\hat{S}_{11}-\tilde{S}_{11}+\tilde{S}_{12}+\tilde{S}_{12}^{\mathrm{T}}.\tag{7}$$

引理 2[8] 令 $N(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示矩阵 A 的零空间和值空间,$A^\perp$ 表示满足下列条件的矩阵;$N(A^\perp)=R(A)$ 且 $A^\perp A^{\perp\mathrm{T}}>0$,则给定矩阵 $G\in\mathbb{R}^{n\times n},U\in\mathbb{R}^{n\times m},V\in\mathbb{R}^{n\times k}$,存在矩阵 $X\in\mathbb{R}^{m\times k}$ 使得

$$G+UXV^{\mathrm{T}}+VX^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}<0,\tag{8}$$

当且仅当

$$U^\perp GU^{\perp\mathrm{T}}<0,\ V^\perp GV^{\perp\mathrm{T}}<0.\tag{9}$$

其中 $G\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵.

定义 1[6,7,9] 如果 E,A 同为 n 阶方阵,且行列式 $|sE-A|$ 不恒等于零,则称矩阵束 $sE-A$ 为正则矩阵束,称矩阵对 (E,A) 为正则的矩阵对.

引理 3[9] 如果 $(\bar{E},\bar{A})$ 为正则的,则闭环系统(3)满足初始条件的解存在且唯一.

3 主要结果(Main results)

下面给出本文的第一个结果.

定理 1 对于无干扰闭环系统(3),即 $w=0$,如果存在矩阵 $\bar{P}$ 和正定阵 Q 使得

$$\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}=\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{E}\geqslant 0,\tag{10}$$

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}<0,\tag{11}$$

则闭环系统(3)为稳定的.

证 由式(11)可知,$\bar{A}$ 为可逆的,否则存在非零向量 ζ 使得 $\bar{A}\zeta=0$,在不等式两边同时左乘、右乘以 ζ^{T} 和 ζ,得

$$\zeta^{\mathrm{T}}(\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P})\zeta<0,$$

这与 $\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}$ 为非负定的相矛盾.这时对任何非零复数 s 可知下式成立:

$$|s\bar{E}-\bar{A}|=|-\bar{A}s||\frac{1}{s}I-\bar{A}^{-1}\bar{E}|.$$

由 $|\frac{1}{s}I-A^{-1}E|$ 为非零时,知$(\bar{E},\bar{A})$ 为正则的.根据引理3,闭环系统的解存在且唯一.

当 $w=0$ 时,定义如下 Lyapunov 泛函 $V(\bar{x},t)$:

$$V(\bar{x},t)=\bar{x}^{\mathrm{T}}\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{x}+\int_{t-\tau}^{t}\bar{x}^{\mathrm{T}}(s)\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi\bar{x}(s)\mathrm{d}s.$$

根据 $V(\bar{x},t)$ 的导数,并利用式(10)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x},t)=&(\bar{E}\dot{\bar{x}})^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{x}+\bar{x}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{\mathrm{T}}(\bar{E}\dot{\bar{x}})+\\&\bar{x}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi\bar{x}-\bar{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi\bar{x}(t-\tau).\end{aligned}$$

注意到闭环系统(3),上式可写为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x},t)=&\bar{x}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi)\bar{x}+\\&x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\Phi^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{x}+\bar{x}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}\Phi x(t-\tau)-\\&\bar{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi\bar{x}(t-\tau),\end{aligned}$$

上式右边同时加上和减去 $\bar{x}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{x}$,并完全平方可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\bar{x},t)=\\&\bar{x}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P})\bar{x}-\\&[\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{x}-Q\Phi\bar{x}(t-\tau)]^{\mathrm{T}}Q^{-1}[\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{x}-Q\Phi\bar{x}(t-\tau)]\leqslant\end{aligned}$$

$\bar{x}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A} + \Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P})\bar{x}$.

根据式(11)可知，对任何非零 $\bar{x} \in \Re^{2n}$，$\dot{V}(\bar{x},t) < 0$，因此闭环系统是稳定的.　　证毕.

其次，给出闭环系统稳定且具有 H_∞-范数界 γ 的充分条件，有如下结论：

定理 2　给定 $\gamma > 0$ 和正定阵 $Q > 0$，若存在矩阵 $\bar{P}$ 满足

$$\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P} = \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{E} \geqslant 0, \tag{12}$$

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A} + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} < 0, \tag{13}$$

则闭环系统(3)为稳定的，且传递函数 H_{zw} 的 H_∞ 范数满足 $\|H_{zw}\|_\infty \leqslant \gamma$.

证　令

$$S = -(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A} + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C}),$$

则由式(13)知 $S > 0$，且

$$-\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P} - \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A} - \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P} - \gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P} - \Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi - \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} - S = 0.$$

上式左边同时加上和减去 $\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}\omega\mathrm{j}$，$\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_d\Phi e^{-\mathrm{j}\omega\tau}$ 和 $\Phi^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}e^{\mathrm{j}\omega\tau}$，并利用式(12)可得

$$(\mathrm{j}\omega\bar{E} - \bar{A} - \bar{A}_{\mathrm{d}}\Phi e^{\mathrm{j}\omega\tau})^*\bar{P} + \bar{P}^{\mathrm{T}}(\mathrm{j}\omega\bar{E} - \bar{A} - \bar{A}_{\mathrm{d}}\Phi e^{\mathrm{j}\omega\tau}) - \gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P} - \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} - S - (\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P} - \Phi^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}e^{\mathrm{j}\omega\tau} - \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}\Phi e^{\mathrm{j}\omega\tau} + \Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi) = 0. \tag{14}$$

其中 $(\cdot)^*$ 为复矩阵的共轭转置.

注意到

$$\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P} - \Phi^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}e^{\mathrm{j}\omega\tau} - \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}\Phi e^{-\mathrm{j}\omega\tau} + \Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi = (\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}e^{\mathrm{j}\omega\tau} - Q\Phi)^*Q^{-1}(\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}e^{\mathrm{j}\omega\tau} - Q\Phi).$$

记

$$X(\mathrm{j}\omega) = (\mathrm{j}\omega\bar{E} - \bar{A} - \bar{A}_{\mathrm{d}}\Phi e^{\mathrm{j}\omega\tau})^{-1},$$

$$W(\mathrm{j}\omega) = (\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}e^{\mathrm{j}\omega\tau} - Q\Phi)^*Q^{-1}(\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}e^{\mathrm{j}\omega\tau} - Q\Phi),$$

则由 $H_{zw}(\mathrm{j}\omega) = \bar{C}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B}$ 和 $(X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^* \times (14) \times X(\mathrm{j}\omega)\bar{B}$，可得

$$H_{zw}^*(\mathrm{j}w)H_{zw}(\mathrm{j}w) = \bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B} + (\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^* - \gamma^{-2}(\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^*(\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B}) - (X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^*[W(\mathrm{j}\omega) + S]X(\mathrm{j}\omega)\bar{B}.$$

注意到 $W(\mathrm{j}\omega) + S > 0$，在上式两边同乘以 -1 并加上 $\gamma^2 I$，可得

$$\gamma^2 I - H_{zw}^*(\mathrm{j}\omega)H_{zw}(\mathrm{j}\omega) = \gamma^2 I - \bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B} - (\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^* + \gamma^{-2}(\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^*(\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B}) + (X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^*[W(\mathrm{j}\omega) + S]X(\mathrm{j}\omega)\bar{B} \geqslant (\gamma I - \gamma^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B})^*(\gamma I - \gamma^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}X(\mathrm{j}\omega)\bar{B}) \geqslant 0.$$

上式表明 $H_{zw}^*(\mathrm{j}\omega)H_{zw}(\mathrm{j}\omega) \leqslant \gamma^2 I$，即 $\|H_{zw}\|_\infty \leqslant \gamma$.　证毕.

下面给出 H_∞ 控制器存在的充分条件及其参数化表示.

定理 3　给定纯量 $\gamma > 0$ 和正定阵 $Q > 0$，下列称述Ⅰ)和Ⅱ)为等价的.

Ⅰ) 存在矩阵 $\bar{P}$ 满足

$$\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P} = \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{E} \geqslant 0, \tag{15}$$

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A} + \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} < 0. \tag{16}$$

Ⅱ)

a) 存在矩阵 $K \in \Re^{m\times n}$ 和 $X \in \Re^{n\times n}$ 使得

$$E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \tag{17}$$

$$(A + B_2K)^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}(A + B_2K) + X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}Q^{-1}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}X + \gamma^{-2}X^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}X + Q + C_1^{\mathrm{T}}C_1 < 0. \tag{18}$$

b) 存在矩阵 $G \in \Re^{n\times p}$ 和 $Y \in \Re^{n\times n}$ 使得

$$EY^{\mathrm{T}} = YE^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \tag{19}$$

$$(A + GC_2)Y^{\mathrm{T}} + Y(A + GC_2)^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}Y(C_1^{\mathrm{T}}C_1 + Q)Y^{\mathrm{T}} + \gamma^2 A_{\mathrm{d}}Q^{-1}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} + B_1B_1^{\mathrm{T}} < 0. \tag{20}$$

c) 矩阵 X 和 Y 满足

$$E^{\mathrm{T}}(\gamma^2 Y^{-\mathrm{T}} - X) \geqslant 0. \tag{21}$$

如果Ⅱ)成立，可设

$$\Theta_X = (A + B_2K)^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}(A + B_2K) + X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}Q^{-1}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}X + \gamma^{-2}X^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}X + Q + C_1^{\mathrm{T}}C_1$$

和 $\Omega = \gamma^2 Y^{-\mathrm{T}} - X$，且 Ω 为非奇异的，如若不是，取 δX 代替 X，$\delta \in (0,1)$，δX 满足式(18)和式(21).

推论 1　如果Ⅱ)成立，可得如式(2)的控制器

$$\begin{cases} \hat{E} = E, \\ \hat{C} = K, \\ \hat{B} = -\gamma^2\Omega^{-\mathrm{T}}Y^{-1}G, \\ \hat{A} = A - \hat{B}C_2 + B_2\hat{C} + \Omega^{-\mathrm{T}}\Theta_X - \Omega^{-\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}X + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X + A_{\mathrm{d}}Q^{-1}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}X. \end{cases} \tag{22}$$

定理 3 的证明　Ⅰ)⇒Ⅱ).

假设Ⅰ)成立.令 $\bar{P}$ 可分块为 $\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$，$\bar{P}_{11} \in \Re^{n\times n}$，$\bar{P}_{22} \in \Re^{n\times n}$.设 $\bar{P}$，$\bar{P}_{11}$ 和 $\bar{P}_{22}$ 为非奇异的.如若不是，在 $\bar{P}$ 可引进一微小摄动使得 $\bar{P}$，$\bar{P}_{11}$ 和 $\bar{P}_{22}$ 为非奇异的，同时满足式(15)和式(16)[7].

定义下列矩阵

$$\begin{cases}\bar{S}:=\begin{bmatrix} I & 0\\ -\bar{P}_{22}^{-\mathrm{T}}\bar{P}_{12}^{\mathrm{T}} & I\end{bmatrix},\ \bar{T}:=\begin{bmatrix} I & 0\\ -\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21} & I\end{bmatrix},\\ \bar{P}_c:=\bar{S}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{T}=\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}-\bar{P}_{12}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21} & 0\\ 0 & \bar{P}_{22}\end{bmatrix},\ \bar{E}_c:=\bar{S}^{-1}\bar{E}\bar{T}.\end{cases} \tag{23}$$

在式(15)和式(16)两边分别乘以 $\bar{T}^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{T}$,所得矩阵的(1,1)块表明取 $X:=\bar{P}_{11}-\bar{P}_{12}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}$, $K:=-\tilde{C}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}$,式(17)和式(18)成立.

其次定义下列矩阵

$$\begin{cases}\hat{S}:=\begin{bmatrix} I & -\bar{P}_{11}^{-\mathrm{T}}\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\\ 0 & I\end{bmatrix},\ \hat{T}:=\begin{bmatrix} I & -\bar{P}_{11}^{-1}\bar{P}_{12}\\ 0 & I\end{bmatrix},\\ \hat{P}_c:=\hat{S}^{\mathrm{T}}\bar{P}\hat{T}=\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & 0\\ 0 & *\end{bmatrix},\ \hat{E}_c:=\hat{S}^{-1}\bar{E}\hat{T}.\end{cases} \tag{24}$$

其中 * 所表示的部分在后面的证明中用不到.

在式(15)和式(16)两边分别乘以 $\hat{T}^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{T}$,所得矩阵的(1,1)块表明取 $\hat{Y}_c:=\gamma^2\hat{P}_c^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\gamma^2\bar{P}_{11}^{-\mathrm{T}} & 0\\ 0 & *\end{bmatrix}$, $Y:=\gamma^2\bar{P}_{11}^{-\mathrm{T}}$, $G:=\bar{P}_{11}^{-\mathrm{T}}\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\tilde{B}$,式(19)和式(20)成立.

最后,在式(15)两边分别乘以 $\bar{T}^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{T}$,所得矩阵(1,2)和(2,2)块分别表示

$$\tilde{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}=\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}}\tilde{E}\geqslant 0,\ \bar{P}_{12}^{\mathrm{T}}E=\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}}\tilde{E}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}.$$

因而 $\bar{P}_{22}^{-\mathrm{T}}\tilde{E}^{\mathrm{T}}=\tilde{E}\bar{P}_{22}^{-1}\geqslant 0$, $E^{\mathrm{T}}(\gamma^2Y^{-\mathrm{T}}-X)=E^{\mathrm{T}}(\bar{P}_{12}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21})=\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}(\bar{P}_{22}^{-\mathrm{T}}\tilde{E}^{\mathrm{T}})\bar{P}_{21}\geqslant 0$. 因此,式(21)成立.

Ⅱ)⇒Ⅰ).设Ⅱ)成立,且 $\Omega=\gamma^2Y^{-\mathrm{T}}-X$ 为非奇异的,并定义

$$\bar{P}:=\begin{bmatrix}\gamma^2Y^{-\mathrm{T}} & -\Omega\\ -\Omega & \Omega\end{bmatrix},\ \tilde{S}:=\tilde{T}:=\begin{bmatrix} I & 0\\ I & I\end{bmatrix},$$

$$\hat{S}:=\begin{bmatrix} I & \gamma^{-2}Y\Omega^{\mathrm{T}}\\ 0 & I\end{bmatrix},\ \hat{T}=\begin{bmatrix} I & \gamma^{-2}Y^{\mathrm{T}}\Omega\\ 0 & I\end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}:=\tilde{S}^{\mathrm{T}}\bar{P}\tilde{T}=\begin{bmatrix} X & 0\\ 0 & \Omega\end{bmatrix},\ \hat{P}:=\hat{S}^{\mathrm{T}}\bar{P}\hat{T}=\begin{bmatrix}\gamma^2Y^{-\mathrm{T}} & 0\\ 0 & *\end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}:=E,\ \bar{E}=\begin{bmatrix} E & 0\\ 0 & \tilde{E}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_c:=\tilde{S}^{-1}\bar{A}\tilde{T},\ \tilde{B}_c:=\tilde{S}^{-1}\bar{B},\ \tilde{C}_c:=\bar{C}\tilde{T},$$

$$\tilde{A}_{\mathrm{d}c}:=\tilde{S}^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}\tilde{T},\ \tilde{\Phi}_c:=\tilde{T}^{-1}\Phi\tilde{T},\ \tilde{Q}_c:=\tilde{T}^{\mathrm{T}}Q\tilde{T},$$

$$\hat{A}_c:=\hat{S}^{-1}\bar{A}\hat{T},\ \hat{B}_c:=\hat{S}^{-1}\bar{B},\ \hat{C}_c:=\bar{C}\hat{T},$$

$$\hat{A}_{\mathrm{d}c}:=\hat{S}^{-1}\hat{A}_{\mathrm{d}}\hat{T},\ \hat{\Phi}_c:=\hat{T}^{-1}\Phi\hat{T},\ \hat{Q}_c:=\hat{T}^{\mathrm{T}}Q\hat{T}.$$

根据式(17),式(19)和式(21)可得 $E^{\mathrm{T}}X=X^{\mathrm{T}}E\geqslant 0$, $E^{\mathrm{T}}\Omega=\Omega^{\mathrm{T}}E\geqslant 0$,因而 $\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}=\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{E}\geqslant 0$, 即式(15)成立.

其次,证明式(16)成立.考虑如下分块

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12}\\ \tilde{R}_{12}^{\mathrm{T}} & \tilde{R}_{22}\end{bmatrix}&=\tilde{T}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\\ &\quad\gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi+\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C})\tilde{T}=\\ &\quad\tilde{A}_c^{\mathrm{T}}\tilde{P}+\tilde{P}^{\mathrm{T}}\tilde{A}_c+\tilde{P}^{\mathrm{T}}\tilde{A}_{\mathrm{d}c}\tilde{Q}_c^{-1}\tilde{A}_{\mathrm{d}c}^{\mathrm{T}}\tilde{P}+\\ &\quad\gamma^{-2}\tilde{P}^{\mathrm{T}}\tilde{B}_c\tilde{B}_c^{\mathrm{T}}\tilde{P}+\tilde{\Phi}_c^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_c\tilde{\Phi}_c+\tilde{C}_c^{\mathrm{T}}\tilde{C}_c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{R}_{11} & \hat{R}_{12}\\ \hat{R}_{12}^{\mathrm{T}} & \hat{R}_{22}\end{bmatrix}&=\hat{T}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\\ &\quad\gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi+\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C})\hat{T}=\\ &\quad\hat{A}_c^{\mathrm{T}}\hat{P}+\hat{P}^{\mathrm{T}}\hat{A}_c+\hat{P}^{\mathrm{T}}\hat{A}_{\mathrm{d}c}\hat{Q}_c^{-1}\hat{A}_{\mathrm{d}c}^{\mathrm{T}}\hat{P}+\\ &\quad\gamma^{-2}\hat{P}^{\mathrm{T}}\hat{B}_c\hat{B}_c^{\mathrm{T}}\hat{P}+\hat{\Phi}_c^{\mathrm{T}}\hat{Q}_c\hat{\Phi}_c+\hat{C}_c^{\mathrm{T}}\hat{C}_c.\end{aligned}$$

其中 $\tilde{R}_{11},\tilde{R}_{12},\tilde{R}_{22},\hat{R}_{11},\hat{R}_{12},\hat{R}_{22}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 根据引理1,可得下列等式

$$\tilde{R}_{22}=\hat{R}_{11}-\tilde{R}_{11}+\tilde{R}_{12}+\tilde{R}_{12}^{\mathrm{T}}.$$

如果 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ 定义为式(22),则

$$\begin{aligned}&\tilde{R}_{11}=\tilde{R}_{12}=\tilde{R}_{12}^{\mathrm{T}}=\\ &(A+B_2K)^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}(A+B_2K)+X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}Q^{-1}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}X+\\ &\gamma^{-2}X^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}X+Q+C_1^{\mathrm{T}}C_1<0,\\ &\hat{R}_{11}=\\ &\gamma^2Y^{-1}((A+GC_2)Y^{\mathrm{T}}+Y(A+GC_2)^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}Y(C_1^{\mathrm{T}}C_1+\\ &Q)Y^{\mathrm{T}}+\gamma^2A_{\mathrm{d}}Q^{-1}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}+B_1B_1^{\mathrm{T}})Y^{-\mathrm{T}}<0,\end{aligned}$$

因而

$$\tilde{R}_{22}=\hat{R}_{11}+\tilde{R}_{11}<0,$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12}\\ \tilde{R}_{12}^{\mathrm{T}} & \tilde{R}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{11}\\ \tilde{R}_{11} & \hat{R}_{11}+\tilde{R}_{11}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} I & 0\\ I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{R}_{11} & 0\\ 0 & \hat{R}_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I\\ 0 & I\end{bmatrix}<0,$$

即

$$\begin{aligned}&\hat{T}^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\mathrm{d}}Q^{-1}\bar{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\\ &\gamma^{-2}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{P}+\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi+\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C})\hat{T}<0.\end{aligned}$$

上式表明式(16)成立. 证毕.

注 2 如果由推论1所得控制器 $(\tilde{E},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 含脉冲模态,可通过如下方法得到无脉冲模态的控制器.设 E 有奇异值分解

$$E=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{\mathrm{T}},\ \tilde{A}=U\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\Sigma>0$. 如果 $\tilde{A}_{22}$ 为非奇异的,控制器无脉冲模态为正则的. 如果 $\tilde{A}_{22}$ 为奇异的,可设 $\sigma>0$ 使得 $\sigma I+\tilde{A}_{22}$ 为非奇异的且用 $\sigma I+\tilde{A}_{22}$ 来代替矩阵 $\tilde{A}_{22}$ 使得 $\tilde{A}$ 满足式(16).

最后本文利用线性矩阵不等式方法给出式(17)~(21)有解 (X,Y,K,G) 的充要条件.不妨设

$$E = U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{\mathrm{T}},\ \Sigma \in \mathbb{R}^{r\times r},\ A = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{12}\end{bmatrix},\ C_1 = [C_{11}\quad C_{12}],$$

$$I_n = [I_{11}\quad I_{12}],\ A_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix}A_{d11}\\ A_{d12}\end{bmatrix}.$$

其中 $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, A_{d11} \in \mathbb{R}^{r\times n}, B_{11} \in \mathbb{R}^{r\times q}, C_{11} \in \mathbb{R}^{s\times r}, I_{11} \in \mathbb{R}^{n\times r}$.

定义 M_X, U_X 和 M_Y, U_Y 为列满秩矩阵且满足下列条件

$$M_X U_X^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\begin{matrix}A_{12}\\ A_{22}\end{matrix} & B_2\\ I_{12} & 0\\ C_{12} & 0\\ \multicolumn{2}{l}{0_{(n+q)\times(n+m-r)}}\end{bmatrix},\ M_Y U_Y^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\begin{matrix}A_{21}^{\mathrm{T}}\\ A_{22}^{\mathrm{T}}\end{matrix} & C_2^{\mathrm{T}}\\ \gamma A_{d12}^{\mathrm{T}} & 0\\ B_{12}^{\mathrm{T}} & 0\\ \multicolumn{2}{l}{0_{(s+n)\times(n+p-r)}}\end{bmatrix},$$

可得如下结果:

定理 4　给定正定阵 Q 和纯量 $\gamma > 0$,式(17)~(21)有解当且仅当存在对称阵 P_X, P_Y 使得

$$\begin{bmatrix}P_X & \Sigma^{-1}\\ \Sigma^{-1} & P_Y\end{bmatrix} \geqslant 0,\ M_X^{\perp}Q_X M_X^{\perp\mathrm{T}} < 0,\ M_Y^{\perp}Q_Y M_Y^{\perp\mathrm{T}} < 0, \tag{25}$$

其中

$$Q_X = \begin{bmatrix}X_0A^{\mathrm{T}}+AX_0^{\mathrm{T}} & X_0 & X_0C_1^{\mathrm{T}} & B_1 & \gamma A_{\mathrm{d}}\\ X_0^{\mathrm{T}} & -\gamma Q^{-1} & 0 & 0 & 0\\ C_1X_0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0\\ B_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma I & 0\\ \gamma A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\gamma Q\end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$Q_Y = \begin{bmatrix}Y_0^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}Y_0 & \gamma Y_0^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}} & Y_0^{\mathrm{T}}B_1 & C_1^{\mathrm{T}} & I\\ \gamma A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}Y_0 & -\gamma Q & 0 & 0 & 0\\ B_1^{\mathrm{T}}Y_0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0\\ C_1 & 0 & 0 & -\gamma I & 0\\ I & 0 & 0 & 0 & -\gamma Q^{-1}\end{bmatrix}, \tag{27}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix}\Sigma P_X & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ Y_0 = \begin{bmatrix}P_Y\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{28}$$

推论 2　如果式(25)存在可行解 P_X 和 P_Y,则式(17),(18)的解可表示为

$$X := \gamma\check{X}^{-\mathrm{T}},\ Y := \gamma\check{Y}^{-\mathrm{T}},$$

$$K := (\check{X}^{-1}W)^{\mathrm{T}},\ G := (Z\check{Y}^{-1})^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

其中

$$\check{X} := \begin{bmatrix}\Sigma P_X & \\ 0 & X_m\end{bmatrix},\ \check{Y} := \begin{bmatrix}P_Y\Sigma & 0\\ & Y_m\end{bmatrix},$$

$$J := [I_n\quad 0_{n\times(2n+s+q)}],$$

$$[X_m\quad W] := -\delta_X(J^{\mathrm{T}}\Psi_XJ)^{-1}J^{\mathrm{T}}\Psi_XM_XU_X^{+},$$

$$[Y_m^{\mathrm{T}}\quad Z^{\mathrm{T}}] := -\delta_Y(J^{\mathrm{T}}\Psi_YJ)^{-1}J^{\mathrm{T}}\Psi_YM_YU_Y^{+},$$

$$\Psi_X := (-Q_X + \delta_XM_XM_X^{\mathrm{T}})^{-1},$$

$$\Psi_Y := (-Q_Y + \delta_YM_YM_Y^{\mathrm{T}})^{-1},$$

$$\delta_X > \lambda_{\max}[M_X^{+}(Q_X - Q_XM_X^{\perp\mathrm{T}}(M_X^{\perp}Q_XM_X^{\perp\mathrm{T}})^{-1}\cdot M_X^{\perp}Q_X)(M_X^{+})^{\mathrm{T}}],$$

$$\delta_Y > \lambda_{\max}[M_Y^{+}(Q_Y - Q_YM_Y^{\perp\mathrm{T}}(M_Y^{\perp\mathrm{T}}Q_YM_Y^{\perp\mathrm{T}})^{-1}\cdot M_Y^{\perp}Q_Y)(M_Y^{+})^{\mathrm{T}}],$$

A^{+} 表示矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆.

注 3　如果 $\check{X}$ 和 $\check{Y}$ 为奇异的,可加上 $\mathrm{diag}\{0_{r\times r}, \alpha I_{n-r}\}$,得到非奇异的 $\check{X}'$ 和 $\check{Y}'$,且满足式(25),其中 $|\alpha|$ 为任意小.

定理 4 的证明　参见文献[2,7].

4 数值例子(Numerical example)

为阐明上述结果的应用,考虑如下具有时滞的奇异系统

$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix}4.5 & 22 & 3.7\\ 6.3 & -5.9 & 9.2\\ -7.3 & 8.6 & -16\end{bmatrix},$$

$$A_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix}2.8 & 1.3 & 2\\ 4.1 & -4.3 & 1.4\\ 5.97 & 2.1 & 10.23\end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 8 & 2\\ 9 & 4\end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix}-21 & 2.5\\ -1.2 & 9\\ 15 & 42\end{bmatrix},\ C_1 = \begin{bmatrix}2 & 0.8 & 3.2\\ 4.1 & 5 & 6.7\end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix}25 & 15 & 19\\ 14.1 & 25 & 25\end{bmatrix},\ \gamma = 1.$$

取 $Q = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 和利用 Matlab 中 LMI-toolbox,线性矩阵不等式组(25)有可行解

$$P_X = \begin{bmatrix}1.6862 & 0.4023\\ 0.4023 & 2.6112\end{bmatrix},$$

$$P_Y = \begin{bmatrix}1.5441 & -0.1975\\ -0.1975 & 1.0794\end{bmatrix}.$$

根据推论 2,可得

$$X = \begin{bmatrix}0.6157 & -0.0948 & 0\\ 0.0948 & 0.3976 & 0\\ 0.4680 & 0.1682 & 0.6764\end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.6631 & 0.1214 & 0.0367 \\ 0.1214 & 0.9487 & 1.2383 \\ 0 & 0 & 5.8862 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 3.5236 & -1.3244 & -3.0435 \\ -9.3711 & -4.3693 & -11.7477 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -2.6285 & -1.5054 \\ -3.8460 & -10.1558 \\ -10.8539 & -25.9968 \end{bmatrix}$$

根据推论1和式(22),可得

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -59.8485 & 146.7413 & 230.9727 \\ 95.9523 & -79.6178 & 152.9371 \\ 226.7444 & 239.5091 & 329.0544 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2.2123 & -2.6832 \\ -0.0388 & 1.5872 \\ -3.6406 & -8.7198 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 3.5236 & -1.3244 & -3.0435 \\ -9.3711 & -4.3693 & -11.7477 \end{bmatrix}.$$

5 总结(Conclusion)

含有时滞的奇异系统控制问题是一个非常困难的研究课题,目前有关这方面的研究结果还不多见.本文讨论了含有时滞的奇异系统的 H_∞ 控制问题.基于含等式约束的线性矩阵不等式,给出了动态控制器存在的充分条件,利用3个线性矩阵不等式存在的可行解,得到了控制器的参数化表示.每一对可行解得到一动态输出反馈控制器,增加了控制器的设计余度.如何考虑有关含时滞的奇异系统的可控性、可观测性、脉冲可控等问题,还有待进一步研究.

参考文献(References):

[1] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P, et al. State pace solutions to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. *IEEE Trans on Autmatic Control*, 1989,34(8):831-837.

[2] SAMPEI M, MITA T, NAKAMICHI M. An algebraic approach to H_∞ output feedback control problems [J]. *Systems & Control Letters*, 1990,14(1):13-24.

[3] GREEN M, LIMEBEER D J N. *Linear Robust Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.

[4] LEE J H, KIM S W, KWON W H. Memoryless H_∞ controllers for state delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994,39(1):971-976.

[5] CHOI H H, CHUNG M J. An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-delay systems [J]. *Automatica*, 1996,33(4):737-739.

[6] MORIHIRA H, TAKABA K, KATAYAMA T. On the H_∞ control for descriptor systems—a *J*-spectral factorization approach [A]. *Proc of the 16th SICE Symp on Dynamical System Theory* [C]. [s.l.]:[s.n.],1993:261-262.

[7] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997,33(4):669-673.

[8] IWASAKI T, SKELTON R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994,30(8):1307-1317.

[9] 蒋威.退化、时滞微分系统[M].合肥:安徽大学出版社,1998. (JIANG Wei. *Degenerate Differential Systems with Delay* [M]. Hefei: Anhui University Press, 1998.)

作者简介:

夏元清 (1971—),男,2001年于北京航空航天大学获博士学位,现在中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所作博士后研究工作.目前主要从事鲁棒控制方面的研究. E-mail: xia_yuanqing@163.net;

贾英民 (1958—),男,北京航空航天大学第七研究室教授,博士生导师.目前的研究兴趣为鲁棒控制,智能控制和优化计算及其在车辆系统和工业过程中的应用.