文章编号：1000-8152(2003)03-0345-06

一般非线性系统的构造性逆系统方法

吴热冰，李春文
（清华大学 自动化系 控制理论与控制工程研究所，北京 100084）

摘要：针对由于逆系统方法之求逆算法中求解隐函数方程的困难，通过消元法避开对隐函数方法的求解，提出了一般非线性多变量系统的构造性求逆算法．在此基础上讨论对逆系统方法的相应改进，通过动态补偿进一步提出了构造性逆系统方法．这种改进使得逆系统方法原则上可以构造性地适用于任意足够光滑的非线性系统．

关键词：非线性系统；右可逆性；逆系统方法
中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

Constructive inverse system method for general nonlinear systems

WU Re-bing, LI Chun-wen
(Institute of Control Theory and Engineering, Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The unsolvability of implicit equations existing in the inversion algorithm in the inverse system method (ISM) is considered, and a constructive inversion algorithm is presented for general nonlinear systems so as to avoid solving implicit equations via elimination method. Based on the algorithm, the corresponding modification of ISM is discussed, and the constructive ISM is proposed through dynamical compensation. These improvements enable ISM to be constructively applicable in principle to arbitrary nonlinear system that is smooth enough.

Key words: nonlinear systems; right invertibility; inverse system method

1 引言(Introduction)

逆系统方法[1]是在逆系统理论的基础上形成的一种反馈线性化方法．它的基本思想是对给定的控制系统，用对象模型生成一种可用反馈方法实现的积分逆系统，将对象补偿成为具有线性传递关系的解耦的规范化系统，然后用线性系统的各种设计理论完成系统的综合．它的优点是概念直观，使用简单明了，尤其是系统形式可以不受仿射非线性的限制，因此自提出以来得到了广泛的应用．

应用逆系统方法的前提是所考察的控制系统是必须是右可逆的（也称函数可重构的）．右可逆性[2]是逆系统理论中的基本概念之一，描述了系统通过给定输入获得期望输出的能力，其一般性研究最初始于 Brockett 和 Mesarvic[3]，更深入的研究见于 Silverman[4]，李春文[2]和 Respondek[5]等人．其中李春文等人[2]对一般非线性系统的研究给出了系统右可逆性的充分必要条件及右逆系统的构造方法．这个结果将以往大多局限于仿射非线性系统的研究推广到了一般多变量非线性系统，同时也为逆系统方法奠定了理论基础．

但是文献[4]的求逆算法存在一个比较大的问题，即算法的可行性依赖于分析学中的“隐函数定理”，而该定理仅仅保证了算法的存在性而非显式的构造性，因此应用这个算法实际上并不能对任意非线性系统的右可逆性进行直接判别；而逆系统方法由于需要通过求逆获得控制器的具体形式，因此又导致了逆系统方法的不可行．对这个缺陷，戴先中等人[6]利用人工神经网络可以逼近任意非线性函数的性质，提出了用神经网络实现控制器的方法，这种方法适于各种较一般的非线性连续系统，并且易于工程实现，但从理论上讲它仍然不是最终的解决途径．本文对李春文等人[1,2]的求逆算法进行了改进，以避开在求逆算法的中间过程中对隐函数方程的求解，并进一步提出用动态补偿精确实现逆系统的构造性方法，从而根本上解决了原算法的形式化缺陷，使得求逆算法在原则上适用于任意足够光滑的连续系统；进一步，基于这个构造性求逆算法，本文对逆系统方法进行相应的改进，并讨论了相关的系统综

收稿日期：2001-03-21；收修改稿日期：2002-06-21.

合问题,从而使逆系统方法成为在理论上完全可以实现的控制设计方法,为逆系统方法在非线性系统控制中的应用建立了一个更坚实的基础.

2 改进递归算法(Modified recursive algorithm)

首先回顾一下文献[1,2]中的求逆算法.考虑如下方程描述的一般非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u),\\ y = h(x,u).\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^r$,分别为状态、输入和输出,$u(t)$ 属于某个允许控制集 U;函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 足够光滑并满足 $f(0,0)=0$ 和 $h(0,0)=0$.算法从方程(1)中递归地得出系统序列 S_k,

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u),\\ h_k(x,u,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}) = [\bar{h}_k^{\mathrm{T}}(\cdot),\hat{h}_k^{\mathrm{T}}(\cdot)]^{\mathrm{T}} = 0.\end{cases}\tag{2}$$

其中 $h_0(x,u,y) = y - h(x,u)$,$(x,u,y,\cdots,y^{(k)}) \in \Omega_k$($\Omega_k$ 的定义见文献[1]).$\bar{h}_k(\cdot)$ 是 $h_k(\cdot)$ 中关于 u 的最大函数独立组,即在 Ω_k 中的一个开集中 $\operatorname{rank}[\partial \bar{h}_k/\partial u] = \operatorname{rank}[\partial \bar{h}_k/\partial u] = \mu_k$.

根据"隐函数定理",存在方程 $\bar{h}_k(\cdot)=0$ 的解

$$u = \Phi_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}).\tag{3}$$

令

$$\tilde{h}_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}) = \hat{h}_k(x,\Phi_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}),y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}),\tag{4}$$

$$h_{k+1}(\cdot) = \begin{bmatrix}\bar{h}_k\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{h}_k(\cdot)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{h}_k(\cdot)\\ \dfrac{\partial \tilde{h}_k}{\partial x}f(x,u) + \sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{\partial \tilde{h}_k}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)}\end{bmatrix},\tag{5}$$

则第 $(k+1)$ 个系统 S_{k+1} 定义如下

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u),\\ h_{k+1}(x,u,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k+1)}) = 0.\end{cases}\tag{6}$$

如果指标 μ_k 在某个有限整数 $k=\alpha$(即右相对阶数)时等于 r,则系统是右可逆的.至此得到 r 个对 u 相互独立的方程

$$h_\alpha(x,u,y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha)}) = 0.\tag{7}$$

记式(7)关于输入 u 的解为 $u = h_\alpha^{-1}(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha)})$,构造系统 $\hat{\Sigma}_0$ 如下:

$$\begin{cases}\dot{z} = f(z,h_\alpha^{-1}(z,v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)})),\\ w = h_\alpha^{-1}(z,v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}).\end{cases}\tag{8}$$

其中 $z \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^r$ 和 $w \in \mathbb{R}^m$ 分别为状态、输入和输出.

可以证明上述系统是(1)的一个逆系统.但是从以上过程可看到算法的进行依赖于隐函数解式(3),而该隐函数解仅是存在性的,一般情况下当无显式解时算法将无法进行下去.事实上,算法中除了最后逆系统的构造,中间隐函数的求解步骤是可以通过一定处理避开的.

考察函数 $\tilde{h}_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)})$,有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{h}_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}) =\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{h}_k(x,\Phi_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}),y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}) =\\ &\frac{\partial \hat{h}_k}{\partial x}f(x,u) + \frac{\partial \hat{h}_k}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_k(\cdot) + \sum_{i=0}^{k}\frac{\partial \hat{h}_k}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)}.\end{aligned}\tag{9}$$

注意到 $\bar{h}_k(\cdot)$ 是 $h_k(\cdot)$ 的最大独立函数组,则一定存在 $(r-\mu_k)\times\mu_k$ 维矩阵 $E_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)})$,使得在 Ω_{k+1} 中有

$$\frac{\partial}{\partial u}\hat{h}_k(\cdot) = E_k(\cdot)\frac{\partial}{\partial u}\bar{h}_k(\cdot).\tag{10}$$

另一方面,对 $\bar{h}_k(x,\Phi_k(\cdot),y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}) = 0$ 求导得到

$$\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial x}f(x,u) + \frac{\partial \bar{h}_k}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}\Phi_k(\cdot)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=0}^{k}\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)} = 0.\tag{11}$$

综合式(9)~式(11)有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{h}_k(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k)}) =\\ &\frac{\partial \hat{h}_k}{\partial x}f(x,u) - E_k(\cdot)\Big[\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial x}f(x,u) +\\ &\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)}\Big] + \sum_{i=0}^{k}\frac{\partial \hat{h}_k}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)} =\\ &\Big[\frac{\partial \hat{h}_k}{\partial x} - E_k(\cdot)\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial x}\Big]f(x,u) +\\ &\sum_{i=0}^{k}\Big[\frac{\partial \hat{h}_k}{\partial y^{(i)}} - E_k(\cdot)\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial y^{(i)}}\Big]y^{(i+1)}.\end{aligned}\tag{12}$$

记式(12)右边为 $\widehat{h}_k(x,u,y,y^{(1)},\cdots,y^{(k+1)})$,则

$$h_{k+1}(\cdot) = \begin{bmatrix}\bar{h}_k(\cdot)\\ \mathrm{d}\tilde{h}_k(\cdot)/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{h}_k(\cdot)\\ \widehat{h}_k(\cdot)\end{bmatrix}.\tag{13}$$

容易看出,改进算法实际上就是对关于输入导数 $\dot{u}$ 的线性方程

$$\frac{\partial h_k}{\partial x}f(x,u) + \frac{\partial h_k}{\partial u}\dot{u} + \sum_{i=0}^{\alpha}\frac{\partial h_k}{\partial y^{(i)}}y^{(i+1)} = 0\tag{14}$$

进行消元的过程,这是常规的线性代数运算.故可得

到形如式(6)的显式系统 S_{k+1},从而求逆算法可以继续进行下去.显然,由上述改进算法递归得到的系统与原算法是相同的.并且容易看出,当函数组 $\bar{h}_k(\cdot)$ 选定后,隐函数解(3)的不唯一性并不影响下一个系统 S_{k+1} 的唯一性,而这是原算法没有指出的.

3 逆系统构造的改进算法(Modified inversion construction algorithm)

上述改进保证了递归算法的进行,因此对于形如式(1)的控制系统,右可逆性的判别在原则上已不存在困难.然而对当需要构造逆系统时,又会遇到同样的问题,即要从隐函数方程(7)显式地解出 u. 与算法的递归过程不同,这一步是无法通过类似上述操作避免的.但是以下的讨论指出,通过引入动态反馈,以提高系统动态阶数为代价,可以精确地实现逆系统.

设系统是右可逆的,右相对阶为 α .对式(7)求导得

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial x} f(x,u) + \frac{\partial h_\alpha}{\partial u}\dot{u} + \sum_{i=0}^{\alpha}\frac{\partial h_\alpha}{\partial y^{(i)}} y^{(i+1)} = 0. \tag{15}$$

假设输入函数 u 是可微的,则根据上述算法,矩阵 $\partial h_\alpha/\partial u$ 在开集 $\Omega_{\alpha+1}$ 上行满秩.若将式(15)看作是关于 $\dot{u}$ 的线性方程,则必存在(不唯一)显式解

$$\dot{u} = g(x,u,y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha+1)}). \tag{16}$$

根据式(16)引入动态补偿,可构造系统 $\hat{\Sigma}_1$ 如下(后面将证明 $\hat{\Sigma}_1$ 也是 Σ 的一个逆系统):

$$\begin{cases}\dot{z} = f(z,p),\\ \dot{p} = g(z,p,v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha+1)}),\\ w = p.\end{cases} \tag{17}$$

其中 $(z,p)\in\mathbb{R}^{n+m}$, $v\in\mathbb{R}^r$ 和 $w\in\mathbb{R}^m$ 分别为状态、输入和输出.

这种实现的优点显而易见,即它总是可构造的,适用于任何形式的解析非线性系统,同时带来的不利因素是逆系统增加了 m 阶动态.尽管如此,当控制系统的逆系统需要得到精确实现时,这种方法还是有价值的.

进一步注意到,在很多情况下方程(7)部分可解,即部分输入可以显式地由状态和其它输入表示出来,这样对应该部分输入的补偿动态便可以简化为静态的,因而可以得到降阶的补偿器.具体地,假设可解输入为 $\bar{u}$,个数为 m_1,从式(7)选择 m_1 个可显式解出 $\bar{u}$ 的对 $\bar{u}$ 独立的方程组 $\bar{h}_\alpha = 0$,并表 $h_\alpha(\cdot) = [\bar{h}_\alpha^{\mathrm{T}}(\cdot),\hat{h}_\alpha^{\mathrm{T}}(\cdot)]^{\mathrm{T}}$, $u = [\bar{u}^{\mathrm{T}},\hat{u}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,记方程 $\bar{h}_\alpha(\cdot) = 0$ 的解为

$$\bar{u} = \bar{h}_\alpha^{-1}(x,\hat{u},y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha)}). \tag{18}$$

对方程 $\hat{h}_\alpha(\cdot) = 0$ 求导

$$\Big(\frac{\partial\hat{h}_\alpha}{\partial\hat{u}} + \frac{\partial\hat{h}_\alpha}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\bar{h}_\alpha^{-1}}{\partial\hat{u}}\Big)\dot{\hat{u}} + \Big(\frac{\partial\hat{h}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\hat{h}_\alpha}{\partial\bar{u}} + \frac{\partial\bar{h}_\alpha^{-1}}{\partial x}\Big)f(x,u) + \sum_{i=0}^{\alpha}\Big(\frac{\partial\hat{h}_\alpha}{\partial y^{(i)}} + \frac{\partial\hat{h}_\alpha}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\bar{h}_\alpha^{-1}}{\partial y^{(i)}}\Big)y^{(i+1)} = 0. \tag{19}$$

易证上式中 $\dot{\hat{u}}$ 的系数矩阵必是行满秩的,故方程(19)存在关于 $\dot{\hat{u}}$ 的解

$$\dot{\hat{u}} = \hat{g}(x,\hat{u},y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha+1)}). \tag{20}$$

容易得到带 $m_2 = m - m_1$ 阶动态补偿的逆系统 $\hat{\Sigma}_2$ 如下:

$$\begin{cases}\dot{z} = f(z,\bar{h}_\alpha^{-1}(z,\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}),\hat{p}),\\ \dot{\hat{p}} = \hat{g}(z,\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha+1)}),\\ w = [\bar{h}_\alpha^{-1}(z,\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}),\hat{p}]^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{21}$$

其中 $(z,\hat{p})\in\mathbb{R}^{n+m_2}$, $v\in\mathbb{R}^r$ 和 $w\in\mathbb{R}^m$ 分别为状态、输入和输出.

此外,由于系统是右可逆的,输入量的个数必然不少于输出量的个数,这就是说,用 m 个输入控制 r 个输出,将会有 $l = m - r$ 个可以自由设定的冗余输入.这样,动态补偿的阶数在上述基础上就可以进一步降低,本文分两种情况:

1) 若 $m_2 \leqslant l$, 可将所有的 $\hat{u}$ 设定为适当的时间函数 $\hat{u}_0(t)$,而不必引入动态补偿,逆系统 $\hat{\Sigma}_3$ 形式如下:

$$\begin{cases}\dot{z} = f(z,\bar{h}_\alpha^{-1}(z,\hat{u}_0(t),v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}),\hat{u}_0(t)),\\ w = [\bar{h}_\alpha^{-1}(z,\hat{u}_0(t),v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}),\hat{u}_0(t)]^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{22}$$

其中 $z\in\mathbb{R}^n$, $v\in\mathbb{R}^r$ 和 $w\in\mathbb{R}^m$ 分别为状态、输入和输出.

2) 若 $m_2 > l$,从 $\hat{u}$ 中选择 l 个输入 u_0 并设定为适当的时间函数 $u_0(t)$,记 $\tilde{u}$ 为 $\hat{u}$ 中余下的 $m_2 - l$ 个输入,与式(18) ~ 式(21)的步骤类似,逆系统 $\hat{\Sigma}_4$ 构造如下:

$$\begin{cases}\dot{z} = f(z,\bar{h}_\alpha^{-1}(z,u_0,\tilde{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}),\tilde{p},u_0(t)),\\ \dot{\tilde{p}} = \tilde{g}(z,u_0(t),u_0^{(1)}(t),\tilde{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha+1)}),\\ w = [\bar{h}_\alpha^{-1}(z,u_0(t),\tilde{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}),u_0(t),\tilde{p}]^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{23}$$

其中 $(z,\tilde{p})\in\mathbb{R}^{n+r-m_1}$, $v\in\mathbb{R}^r$ 和 $w\in\mathbb{R}^m$ 分别为状态、输入和输出.

注 1 以上的讨论提供了实现逆系统的构造性方法,并讨论了降低逆系统动态阶数的几种途径.事实上,通过对

原系统直接增加动态,可以将式(1)变换为仿射型

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ \dot{u} = \varphi, \\ y = h(x,u). \end{cases} \tag{24}$$

这样利用文献[1]或文献[5]中的算法也可以得到显式的逆系统,并且易知它的动态阶数同 $\hat{\Sigma}$ 一样.但是,这与本文所讨论的实际上并不相同.这表现在:第一,从式(24)得到逆系统的前提是必须在原系统前加上 m 阶动态并重新定义输入,这样系统的映射关系,即由 $\varphi = \dot{u}$ 到 $y = h(x,u)$,以及可逆性与原系统已经不同了;而本文得到的是映射关系由 $y = h(x,u)$ 到 u 的逆系统.第二,由于式(7)在许多情况下部分可解,本文提出的降低动态补偿阶数的方法还是有意义的,而这种降阶在前面提到的各种算法中是无法实现的.

注 2 对于冗余输入,本文将它们设定为独立的时间函数.实际上,若将它们设定为关于 $\hat{u}$ 的函数,则式(7)变为新的 r 输入 r 输出方程,此时如果恰当选择函数形式,则有可能得到一些新的结果.本文在此不做深入的讨论.

最后证明系统 $\hat{\Sigma}_1,\hat{\Sigma}_2,\hat{\Sigma}_3$ 和 $\hat{\Sigma}_4$ 是 Σ 的逆系统.

由于引入新的动态,首先需要对右可逆性和右逆系统的定义作一些适当的推广.

定义 1 记容许输出集为

$$Y = \{y(t) \mid y(t) = y[t;x_0;u(t)], \quad x_0 \in \Xi^n,\ u(t) \in U\}. \tag{25}$$

假设 $x_0 \in \Xi^n$,若存在整数 N 使得对任意与给定输出 $y(t) \in Y$ 有相同初始条件的函数 $\bar{y}(t) \in C^N(\Xi)$,即

$$\bar{y}^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_0),\ i = 0,1,\cdots,N. \tag{26}$$

$\exists\, u(t)$ 和 $t_1 > t_0$,系统 Σ 的输出满足

$$y(t,x,u) = h(x(t,x_0,u),u(t)) = \bar{y}(t), \quad \forall\, t \in [t_0,t_1], \tag{27}$$

则称 Σ 是右可逆的.

定义 2 系统 $\hat{\Sigma}: v \to w$ 称为 $\Sigma: u \to y$ 的一个右逆系统,如果在适当的初始条件下,存在整数 N 使得对满足式(26)的任意函数 $\bar{y}(t) \in C^N(\Xi)$,当指定 $v(t) = \bar{y}(t)$ 和 $u(t) = w(t)$ 时,Σ 的输出等于 $\bar{y}(t)$.

定理 1 系统 $\hat{\Sigma}_1,\hat{\Sigma}_2,\hat{\Sigma}_3$ 和 $\hat{\Sigma}_4$ 是 Σ 的逆系统.

证 由于上述几种补偿方法都可以归结为部分补偿的特殊形式,故只需对 $\hat{\Sigma}_2$ 给出证明.设 $v(t)$ 为满足如下性质的函数:存在 $y(t) \in Y$ 和 $u(t) \in U$,

$$v^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_0;x_0;u(t_0)),\ i = 0,1,\cdots,\alpha. \tag{28}$$

由式(21)得到

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\hat{h}_\alpha(z,\bar{p},\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}) = 0, \\ \bar{h}_\alpha = (z,\bar{p},\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

其中 $\bar{p} = \bar{h}_\alpha^{-1}(z,\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)})$,即

$$\begin{cases} \hat{h}_\alpha(z,\bar{p},\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}) = \text{const}, \\ \bar{h}_\alpha(z,\bar{p},\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

设定 $\hat{\Sigma}_2$ 的初值为 $\hat{p}(t_0) = \hat{u}(t_0), z(t_0) = x(t_0)$,则有

$$\begin{aligned} &\hat{h}_\alpha(z,\bar{p},\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)})(t_0) = \\ &\hat{h}_\alpha(z,\bar{h}_\alpha^{-1}(z,\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}),\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)})(t_0) = \\ &\hat{h}_\alpha(x,\bar{h}_\alpha^{-1}(z,\hat{u},y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha)}),\hat{u},y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha)})(t_0) = \\ &\hat{h}_\alpha(x,\bar{u},\hat{u},y,y^{(1)},\cdots,y^{(\alpha)})(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

从式(31)得到

$$\hat{h}_\alpha(z,\bar{p},\hat{p},v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}) = 0, \tag{32}$$

故方程 $h_\alpha(z,w,v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}) = 0$,并存在解

$$w = h_\alpha^{-1}(z,v,v^{(1)},\cdots,v^{(\alpha)}). \tag{33}$$

由此得到结论,对于系统 $\hat{\Sigma}_1$,必存在形如 $\hat{\Sigma}_0$ 的系统,它们对同一输入产生相同输出,由于 $\hat{\Sigma}_0$ 是逆系统,则 $v(t)$ 可由 $\hat{\Sigma}_0$ 重构,从而亦可由 $\hat{\Sigma}_2$ 重构,由定义 2,$\hat{\Sigma}_2$ 是逆系统.

4 构造性逆系统方法(Constructive inverse system method)

假设本文已经得到逆系统的具体形式 $\hat{\Sigma}_0$,那么将它串联在原系统之前,则复合系统的传递关系便成为从输入到输出的单位映射;进一步,由于原系统和逆系统的状态结构相同,如果可以得到原系统的状态信息,并用原系统的状态 x 替代逆系统的状态 z 构成反馈,就会大大简化了系统结构,并可消除开环结构下原系统与逆系统状态初值偏差产生的不稳定因素.经过这两个步骤,就形成了反馈线性化的伪线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,h_\alpha^{-1}(x,v,\cdots,v^{(\alpha)})), \\ y = h(x,h_\alpha^{-1}(x,v,\cdots,v^{(\alpha)})). \end{cases} \tag{34}$$

其中 $x \in \Xi^n, v \in \Xi^r, y \in \Xi^r$ 为状态、输入和输出.可以证明系统(34)具有简明的线性传递关系 $y = v$.但是上述反馈控制器中含有物理不可实现的输入纯微分项.通过输入重定义和串联积分动态补偿,可以将系统补偿成为如下可实现的 α 阶积分型解耦系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,h_\alpha^{-1}(x,\xi,\varphi)), \\ \dot{\xi} = A_{c0}\xi + B_{c0}\varphi, \\ y = h(x,h_\alpha^{-1}(x,\xi,\varphi)). \end{cases} \tag{35}$$

其中 A_{c0}, B_{c0} 是能控标准形系统矩阵,向量

$$\varphi = [\varphi_1, \cdots, \varphi_r]^{\mathrm{T}} = [v_1^{(\alpha_1)}, \cdots, v_r^{(\alpha_r)}]^{\mathrm{T}}, \tag{36}$$

$$\xi = [\xi_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \xi_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \\ [v_1^{(\beta_1)}, \cdots, v_1^{(\alpha_1 - 1)}, \cdots; v_r^{(\beta_r)}, \cdots, v_r^{(\alpha_r - 1)}]^{\mathrm{T}}. \tag{37}$$

α_i, β_i 是方程 $h_\alpha(\cdot) = 0$ 中含输出导数 y_i 的最低和最高阶次(实际上 β_i 代表输出变量 y_i 的相对阶). 可以证明,系统(35)具有线性的传递关系 $y_i^{(\alpha_i)} = \varphi_i, i = 1, \cdots, r$. 最后,利用线性系统的理论可以对该系统进行进一步综合.

基于上一章给出的动态补偿实现逆系统的方法,可以相应地对逆系统方法进行改进,从而使之成为构造性的逆系统方法. 具体地,由文献[7]的讨论,方程组 $\hat{h}_\alpha(\cdot) = 0$ 有如下形式

$$\hat{h}_\alpha(\cdot) = \begin{bmatrix} y_{i_1}^{(\beta_{i_1})} + \Phi_{i_1}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{i_{m_2}}^{(\beta_{i_{m2}})} + \Phi_{i_{m_2}}(\cdot) \end{bmatrix}, \ \hat{I} = \{i_1, \cdots, i_{m_2}\}. \tag{38}$$

反馈后的伪线性系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \bar{h}_\alpha^{-1}(x, \hat{u}, \xi), \hat{u}), \\ \dot{\hat{u}} = \hat{g}(x, \hat{u}, \xi, \varphi), \\ \dot{\xi} = A_{c0}\xi + B_{c0}\varphi, \\ y = h(x, \bar{h}_\alpha^{-1}(x, \hat{u}, \xi), \hat{u}). \end{cases} \tag{39}$$

其中

$$\varphi = [\varphi_1, \cdots, \varphi_r]^{\mathrm{T}} = [v_1^{(\alpha_1')}, \cdots, v_r^{(\alpha_1')}]^{\mathrm{T}}, \tag{40}$$

$$\xi = [\xi_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \xi_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \\ [v_1^{(\beta_1')}, \cdots, v_1^{(\alpha_1' - 1)}; \cdots; v_r^{(\beta_r')}, \cdots, v_r^{(\alpha_r' - 1)}]^{\mathrm{T}}, \tag{41}$$

$$\alpha_k' = \begin{cases} \alpha_k + 1, & \hat{h}_\alpha(\cdot) \text{ 中显含 } v_k^{(\alpha_k)}, \\ \alpha_k, & \hat{h}_\alpha(\cdot) \text{ 中不显含 } v_k^{(\alpha_k)}, \end{cases} \\ \beta_k' = \begin{cases} \beta_k + 1, & k \in \hat{I}, \\ \beta_k, & k \notin \hat{I}. \end{cases} \tag{42}$$

注 3　如果首先将原系统进行如式(24)的仿射线性化,则利用原有逆系统方法就可以得到显式的结果,并且易见得到的综合系统实际上和式(39)中 $m_2 = m$ 时得到综合系统是一样的. 但这种方法不能实现 $m_2 < m$ 的降阶补偿.

下面分别就逆系统方法得到的综合系统与原方法中相应系统的关系,及其在系统综合中涉及的一些问题进行说明(详细讨论见文献[7]):

第一,非构造性逆系统方法和构造性逆系统方法之间有着紧密的联系. 当控制对象的输入个数等于输出个数时,若系统是右可逆的,则其右逆系统唯一. 在这种情况下,下面的定理指出,分别由这两种逆系统方法综合得到的控制系统(35)和(39)具有相同的传递关系.

第二,解耦系统的补偿动态的初值需要进行合适的选取,以使解耦系统保持期望的线性传递关系. 李春文等人在文献[1]中指出,逆系统方法的补偿动态的初值可以在一定范围内任意选取. 对于构造性逆系统方法,本文同样可以证明,所有补偿状态的初值的选取可以在一定程度上也是自由的.

第三,前面利用逆系统方法,经过反馈补偿初步得到了积分解耦型伪线性系统. 这个系统是不稳定的,需要引入状态 $y_i, \cdots, y_i^{(\alpha_i' - 1)}, i = 1, \cdots, r$ 的反馈以进行进一步综合,配置闭环极点. 这其中,输出的各阶导数不能直接由输出进行微分获得,但它们可以由综合系统的状态构造出来,进而构成反馈. 具体构造见文献[7]. 这进一步体现了构造性逆系统方法的优点,即基于此种算法引入动态补偿的反馈(39)在形式上是显式的,而原方法中相应的反馈则是隐式的.

5 举例(Example)

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 \mathrm{e}^{u_1}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = x_1 + u_2, \\ y = [x_1 + u_1^5 + u_1, x_2]^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{43}$$

应用构造性求逆算法可以得到带一阶补偿 p_1 的右逆系统如下:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3 + p_1 \mathrm{e}^{p_1}, \\ \dot{z}_3 = z_4, \\ \dot{z}_4 = \dddot{v}_2 - [G(p_1)(\ddot{v}_1 - z_3 - p_1 \mathrm{e}^{p_1}) + \\ \qquad G'(p_1)H(p_1)(\dot{v} - z_2)^2], \\ \dot{p}_1 = H(p_1)(\dot{v}_1 - z_2), \\ w = [p_1, \dddot{v}_2 - z_1 - \{G(p_1)(\ddot{v}_1 - z_3 - p_1 \mathrm{e}^{p_1}) + \\ \qquad G'(p_1)H(p_1)(\dot{v} - z_2)^2\}]^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{44}$$

其中 $G(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x+1)}{5x^4+1}, H(x) = \dfrac{1}{5x^4+1}$. $(z_1, z_2, z_3, z_4, p_1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^5$, $(v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $w \in \mathbb{R}^2$ 分别为状态、输入和输出.

将逆系统串联在原系统前面并进行反馈替代,有

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2, \\
\dot{x}_2 = x_3 + u_1 e^{u_1}, \\
\dot{x}_3 = x_4, \\
\dot{x}_4 = \dddot{v}_2 - [G(u_1)(\ddot{v}_1 - x_3 - u_1 e^{u_1}) + \\
\qquad G'(u_1)H(u_1)(\dot{v} - x_2)^2], \\
\dot{u}_1 = H(u_1)(\dot{v}_1 - x_2).
\end{cases} \tag{45}
$$

定义新的输入 $\varphi_1 = \ddot{v}_1, \varphi_2 = \dddot{v}_2$. 并引入补偿动态 $\xi = \dot{v}$,

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2, \\
\dot{x}_2 = x_3 + u_1 e^{u_1}, \\
\dot{x}_3 = x_4, \\
\dot{x}_4 = \varphi_2 - [G(u_1)(\varphi_1 - x_3 - u_1 e^{u_1}) + \\
\qquad G'(u_1)H(u_1)(\xi - x_2)^2], \\
\dot{u} = H(u_1)(\xi - x_2), \\
\dot{\xi} = \varphi_1.
\end{cases} \tag{46}
$$

这样便得到解耦的伪线性系统 $\ddot{y} = \varphi_1, \dddot{y} = \varphi_2$, 进一步的状态反馈取自

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^{(1)} \\ y_2 \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + u_1^5 + u_1 \\ \xi \\ x_2 \\ x_3 + u_1 e^{u_1} \\ x_4 + G(u_1)(\xi - x_2 - u_1) \end{bmatrix}. \tag{47}
$$

6 结论(Conclusion)

本文基于一般非线性系统的构造性求逆算法,对逆系统方法进行了重新阐述.分析表明,这种改进使得逆系统方法完全成为构造性的,因此适用于任意足够光滑的右可逆非线性系统,这是对原有逆系统方法的完善和重大改进.但是从示例中也可以看到,由于非线性系统本身的复杂性,从逆系统方法得到的控制器一般会非常复杂,这是应用中仍然需要解决的问题.

参考文献(References):

[1] 李春文,冯元琨.多变量非线性控制的逆系统方法[M].北京:清华大学出版社,1991.
(LI Chunwen, FENG Yuankun. *Inverse System Method for Multivariable Control Systems* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1991.)

[2] LI Chunwen, FENG Yuankun. Functional reproducibility of general multivariable nonlinear systems [J]. *Int J Control*, 1987,45(1):255 - 268.

[3] BROCKETT R W, MESARVIC M D. The reproducibility of multivariable systems [J]. *J of Mathematical Analysis and Its Applications*, 1965,11(2):548 - 563.

[4] SILVERMAN L M. Inversion of multivariable linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1979,14(3):270 - 276.

[5] RESPONDEK W, NIJMEUER H. On local right-invertibility of nonlinear control systems [J]. *Control Theory and Advanced Technology*, 1988,4(3):325 - 348.

[6] 戴先中,刘军,冯纯伯.连续非线性系统的神经网络 α 阶逆系统控制方法[J].自动化学报,1998,24(4):463 - 468.
(DAI Xianzhong, LIU Jun, FENG Chunbo. Neural network αth-order inverse-system control method for nonlinear continuous systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998,24(4):463 - 468.)

[7] 吴热冰.一般非线性系统的构造性逆系统方法[D].北京:清华大学,2001.
(WU Rebing. *Constructive inverse system method for general nonlinear control systems* [D]. Beijing: Tsinghua University, 2001.)

作者简介:

吴热冰 (1976 —),男,1998 年于清华大学获得学士学位,现为清华大学博士研究生.主要研究兴趣为自动控制理论及应用等等. E-mail: wurebing98@mails.tsinghua.edu.cn;

李春文 (1958 —),男,1982 年、1989 年于清华大学获得学士、博士学位,现为清华大学教授、博士生导师.主要研究兴趣为:自动控制理论及应用,非线性控制的逆系统方法,非线性系统仿真及符号CAD,稳定性的正则判别函数法. E-mail: lcw@mail.tsinghua.edu.cn.