

# 采样数据系统故障检测的 $H_\infty$ 方法

张 萍<sup>1</sup>, DING S X<sup>2</sup>, 王桂增<sup>1</sup>, 周东华<sup>1</sup>

(1. 清华大学 自动化系, 北京 100084; 2. 杜伊斯堡大学 自动控制和复杂系统研究所, 杜伊斯堡 47048, 德国)

**摘要:** 提出一种对采样数据系统进行故障检测的  $H_\infty$  方法. 首先构造离散时间故障检测系统, 分析残差产生器的动态特性. 然后从故障检测的角度引入算子, 定量考察连续时间未知输入信号和故障信号对离散时间残差信号的影响. 最后优化残差产生器的参数, 使得故障检测系统对未知输入具有较强的鲁棒性, 同时对故障具有较高的灵敏度.

**关键词:** 故障检测; 采样数据系统;  $H_\infty$  方法; 残差产生器; 鲁棒性; 灵敏度

**中图分类号:** TP277      **文献标识码:** A

## $H_\infty$ approach to fault detection in sampled-data systems

ZHANG Ping<sup>1</sup>, DING S X<sup>2</sup>, WANG Gui-zeng<sup>1</sup>, ZHOU Dong-hua<sup>1</sup>

(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Institute of Automatic Control and Complex Systems, University of Duisburg, 47048 Duisburg, Germany)

**Abstract:** An  $H_\infty$  approach to fault detection in sampled-data systems is presented. At first a discrete-time fault detection system is constructed and the dynamics of the residual generator is analyzed. Then an operator is introduced from the viewpoint of fault detection to describe quantitatively the influence of the continuous-time unknown inputs and faults on the discrete-time residuals. Finally the parameter of the residual generator is optimized, so that the fault detection system is robust to the unknown inputs and simultaneously sensitive to the faults.

**Key words:** fault detection; sampled-data system;  $H_\infty$  approach; residual generator; robustness; sensitivity

### 1 引言 (Introduction)

近年来, 大量文献研究了采样数据系统中数字控制器的直接设计方法<sup>[1,2]</sup>. 在故障诊断领域<sup>[3~10]</sup>, 采样数据系统也正成为继纯连续时间系统和纯离散时间系统之后的一类重要研究对象. 本文提出一种为采样数据系统直接设计最优的离散时间故障检测系统的  $H_\infty$  方法, 使得故障检测系统对于扰动、噪声、建模误差等未知输入具有较强的鲁棒性, 同时对于故障有较高的灵敏度. 本文的核心在于从故障检测的角度引入算子, 以定量描述连续时间未知输入信号及故障信号对离散时间残差信号的影响.

### 2 问题描述 (Problem formulation)

采样数据系统中各部分的模型分别为

1) 线性时不变连续时间过程

$$y(s) = G_u(s)u(s) + G_d(s)d(s) + G_f(s)f(s). \quad (1)$$

其中,  $G_u(s)$ ,  $G_d(s)$  和  $G_f(s)$  分别表示从控制输入

$u \in \mathbb{R}^{p_u}$ , 未知输入  $d \in \mathbb{R}^{p_d}$  和待检测故障  $f \in \mathbb{R}^{p_f}$  到过程输出  $y \in \mathbb{R}^m$  的传递函数矩阵. 未知输入  $d$  有界,  $\|d\|_2 \leq \delta_2$ .

2) 采样器<sup>[1]</sup>

$$\Psi(e^{j\omega h}) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(j\omega + jk\omega_s). \quad (2)$$

其中,  $\Psi$  为过程输出  $y$  经采样所得的离散时间采样输出信号,  $h$  表示采样时间,  $\omega_s = \frac{2\pi}{h}$  为采样频率.

3) 零阶保持器

$$u(j\omega) = h\phi(j\omega)v(e^{j\omega h}), \quad \phi(j\omega) = e^{j\omega h/2} \frac{\sin(\omega h/2)}{\omega h/2}. \quad (3)$$

其中,  $v$  是数字控制器产生的离散时间控制输入信号.

由于通常过程输出  $y$  在被采样之前先通过低通滤波器以减小测量噪声的影响<sup>[1]</sup>, 所以不失一般性, 假设连续时间过程模型(1)包括了低通滤波器的动

态特性,  $G_u(s)$ ,  $G_d(s)$  和  $G_f(s)$  为严格真的传递函数矩阵.

要求为式(1)~式(3)所描述的采样数据系统设计离散时间故障检测系统,利用已知的离散时间控制输入信号  $v$  和采样输出信号  $\Psi$ ,生成离散时间残差信号,且该故障检测系统对连续时间未知输入信号  $d$  具有较强的鲁棒性,同时对连续时间故障信号  $f$  有较高的灵敏度.

### 3 检测方法(Detection approach)

#### 3.1 故障检测系统的构造(Construction of fault detection system)

将式(1)写为

$$y(s) = y_u(s) + y_{df}(s). \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} y_u(s) &= G_u(s)u(s), \\ y_{df}(s) &= G_d(s)d(s) + G_f(s)f(s). \end{aligned} \quad (5)$$

假设  $(A_u, B_u, C_u, O)$  是  $G_u(s)$  的一个最小状态空间实现.在各采样时刻  $t = kh(k = 0, 1, 2, \dots)$ , 系统(1)~(3)的动态特性由下式描述

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{ud}x(k) + B_{ud}v(k), \\ \Psi(k) &= C_u x(k) + \Psi_{df}(k). \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$x(k) = x(t) |_{t=kh}, A_{ud} = e^{A_u h}, B_{ud} = \int_0^h e^{A_u t} B_u dt, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Psi_{df}(k) = y_{df}(t) |_{t=kh}, \\ y_{df}(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_d(s)d(s) + G_f(s)f(s)). \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $\mathcal{L}^{-1}$  表示拉普拉斯反变换.

一般地,基于解析模型的故障检测系统包括残差产生器和残差评价器两个部分,后者通常又由残差评价函数、检测阈值和决策逻辑构成<sup>[10-12]</sup>.

首先构造离散时间观测器

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_{ud}\hat{x}(k) + B_{ud}v(k) + L(\Psi(k) - \hat{\Psi}(k)), \\ \hat{\Psi}(k) = C_u \hat{x}(k). \end{cases} \quad (9)$$

其中  $L$  为观测器的增益矩阵.

令  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ ,  $\zeta(k) = \Psi(k) - \hat{\Psi}(k)$  分别表示状态估计误差和输出估计误差.观测器(9)的误差动态特性为

$$\begin{cases} e(k+1) = (A_{ud} - LC_u)e(k) - L\Psi_{df}(k), \\ \zeta(k) = C_u e(k) + \Psi_{df}(k). \end{cases} \quad (10)$$

只要适当地选取观测器的增益矩阵  $L$ , 使得  $A_{ud} -$

$LC_u$  的所有特征值均位于单位圆内,就可以保证观测器的内部稳定性.

然后采用后置滤波器  $R(z)$  对  $\zeta$  滤波,生成残差信号  $r \in \mathbb{R}^q$ , 即

$$r(z) = R(z)\zeta(z). \quad (11)$$

其中,  $R(z) \in \mathbb{H}_\infty$  是一个可以任意选取的  $q \times m$  维参数化传递函数矩阵.引入后置滤波器  $R(z)$  是为了增加设计自由度,提高故障检测系统的性能<sup>[10,11]</sup>.

观测器(9)和后置滤波器(11)共同构成了离散时间残差产生器.

以残差信号的 2-范数

$$\|r\|_2 = \left( \frac{h}{2\pi} \int_0^{\omega_s} r^*(e^{j\omega h}) r(e^{j\omega h}) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

作为残差评价函数.取检测阈值  $J_{th}$  为无故障时  $\|r\|_2$  的上确界,即

$$J_{th} = \sup_{f=0} \|r\|_2. \quad (13)$$

若  $\|r\|_2$  超过  $J_{th}$ , 则判定系统发生了故障.整个故障检测系统的结构如图 1 所示.

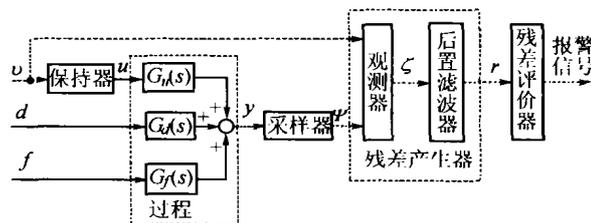


图 1 采样数据系统和故障检测系统的结构示意图  
Fig. 1 Structure diagram of sampled-data system and fault detection system

#### 3.2 残差产生器的动态特性(Dynamics of residual generator)

输出估计误差  $\zeta$  与控制输入  $v$  和采样输出  $\Psi$  之间的关系为

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \Psi(z) - \hat{\Psi}(z) = \\ & [1 - C_u(zI - A_{ud} + LC_u)^{-1}L] \Psi(z) - \\ & C_u(zI - A_{ud} + LC_u)^{-1}B_{ud}v(z). \end{aligned} \quad (14)$$

令

$$\begin{aligned} M_u(z) &= I - C_u(zI - A_{ud} + LC_u)^{-1}L, \\ N_u(z) &= C_u(zI - A_{ud} + LC_u)^{-1}B_{ud}. \end{aligned} \quad (15)$$

由于  $M_u(z), N_u(z)$  恰好是  $G_{ud}(z) = C_u(zI - A_{ud})^{-1}B_{ud}$  的左互质分解, 即  $G_{ud}(z) = M_u^{-1}(z)N_u(z)$ , 再由式(6)可知

$$\zeta(z) = M_u(z)(\Psi(z) - G_{ud}(z)v(z)) = M_u(z)\Psi_{df}(z). \quad (16)$$

式中  $\Psi_{df}(z) = Z(\Psi_{df}(k))$ ,  $Z$  表示  $z$  变换. 将上式代入式(11), 得

$$r(z) = R(z)\zeta(z) = R(z)M_u(z)\Psi_{df}(z). \quad (17)$$

由式(8), 有<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} \Psi_{df}(e^{j\omega h}) &= \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{df}(j\omega + jk\omega_s) = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{G_d(j\omega + jk\omega_s)d(j\omega + jk\omega_s) + \\ &G_f(j\omega + jk\omega_s)f(j\omega + jk\omega_s)\}, \end{aligned} \quad (18)$$

所以残差产生器的频域动态特性为

$$\begin{aligned} r(e^{j\omega h}) &= R(e^{j\omega h})M_u(e^{j\omega h})\Psi_{df}(e^{j\omega h}) = \\ &= \frac{1}{h}R(e^{j\omega h})M_u(e^{j\omega h}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{G_d(j\omega + jk\omega_s)d(j\omega + jk\omega_s) + \\ &G_f(j\omega + jk\omega_s)f(j\omega + jk\omega_s)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

上式表明, 虽然残差产生器的实现形式是离散的, 但是其动态特性是由分别与连续时间未知输入信号  $d$  和故障信号  $f$  有关的两项所决定的.

为便于分析问题, 引入算子  $\Gamma_{G,Q}$ , 将它定义为

$$\begin{aligned} \Gamma_{G,Q}: L_2(j\mathbb{R}, C^p) &\mapsto L_2(\Omega, C^q), \\ \beta(e^{j\omega h}) &= (\Gamma_{G,Q}\alpha)(e^{j\omega h}) = \\ &= \frac{1}{h}Q(e^{j\omega h}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jk\omega_s)\alpha(j\omega + jk\omega_s). \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $G(s)$  为严格真的连续时间系统的传递函数矩阵,  $Q(z)$  为真的离散时间系统的传递函数矩阵,  $\Omega$  表示复平面上的单位圆. 空间  $L_2(j\mathbb{R}, C^p)$  和  $L_2(\Omega, C^q)$  上的内积分别定义为

$$\begin{cases} \langle \alpha(j\omega), \gamma(j\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^*(j\omega)\gamma(j\omega)d\omega, \\ \langle \beta(e^{j\omega h}), \eta(e^{j\omega h}) \rangle = \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta^*(e^{j\omega h})\eta(e^{j\omega h})d\omega. \end{cases} \quad (21)$$

算子  $\Gamma_{G,Q}$  表示从连续时间信号  $\alpha(t)$  的傅里叶变换  $\alpha(j\omega) \in L_2(j\mathbb{R}, C^p)$  到某离散时间信号的傅里叶变换  $\beta(e^{j\omega h}) \in L_2(\Omega, C^q)$  的映射关系.

显然, 如果令  $Q(z) = R(z)M_u(z)$ ,  $G(s) = G_d(s)$ , 可以定义算子  $\Gamma_{G_d, RM_u}$  为

$$\begin{aligned} \Gamma_{G_d, RM_u}: L_2(j\mathbb{R}, C^{pd}) &\mapsto L_2(\Omega, C^q), \\ (\Gamma_{G_d, RM_u}d)(e^{j\omega h}) &= \\ &= \frac{1}{h}R(e^{j\omega h})M_u(e^{j\omega h}) \cdot \end{aligned}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_d(j\omega + jk\omega_s)d(j\omega + jk\omega_s). \quad (22)$$

令  $Q(z) = R(z)M_u(z)$ ,  $G(s) = G_f(s)$ , 则算子  $\Gamma_{G_f, RM_u}$  定义为

$$\begin{aligned} \Gamma_{G_f, RM_u}: L_2(j\mathbb{R}, C^{pf}) &\mapsto L_2(\Omega, C^q), \\ (\Gamma_{G_f, RM_u}f)(e^{j\omega h}) &= \\ &= \frac{1}{h}R(e^{j\omega h})M_u(e^{j\omega h}) \cdot \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_f(j\omega + jk\omega_s)f(j\omega + jk\omega_s). \end{aligned} \quad (23)$$

残差产生器的频域动态特性式(19)可以利用算子  $\Gamma_{G_d, RM_u}$  和  $\Gamma_{G_f, RM_u}$  表示为

$$r(e^{j\omega h}) = (\Gamma_{G_d, RM_u}d)(e^{j\omega h}) + (\Gamma_{G_f, RM_u}f)(e^{j\omega h}). \quad (24)$$

### 3.3 算子 $\Gamma_{G,Q}$ 的性质 (Characteristics of the operator $\Gamma_{G,Q}$ )

要定量研究  $d$  和  $f$  对  $r$  的影响, 首先需要讨论算子  $\Gamma_{G,Q}$  的性质.

**引理 1** 由式(20)定义的算子  $\Gamma_{G,Q}$  的伴随算子  $\Gamma_{G,Q}^*$  为

$$\begin{aligned} \Gamma_{G,Q}^*: L_2(\Omega, C^q) &\mapsto L_2(j\mathbb{R}, C^p), \\ (\Gamma_{G,Q}^*\beta)(j\omega) &= G^*(j\omega)Q^*(e^{j\omega h})\beta(e^{j\omega h}), \end{aligned} \quad (25)$$

且

$$(\Gamma_{G,Q}\Gamma_{G,Q}^*\beta)(e^{j\omega h}) = Q(e^{j\omega h})\Theta_G(e^{j\omega h})Q^*(e^{j\omega h})\beta(e^{j\omega h}). \quad (26)$$

其中

$$\Theta_G(e^{j\omega h}) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jk\omega_s)G^*(j\omega + jk\omega_s). \quad (27)$$

式中, 上标  $*$  表示伴随算子或共轭转置矩阵. 设  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$  分别是  $G(s)$  的  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$  重极点,  $\sum_{i=1}^l \delta_i = n$ , 则  $\Theta_G(e^{j\omega h})$  可以进一步表示为

$$\begin{aligned} \Theta_G(e^{j\omega h}) &= \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{q=1}^{\delta_i} \frac{j^{q-1}}{(q-1)!} \left[ P_{iq} \frac{\partial^{q-1}}{\partial \omega^{q-1}} \left( \frac{1}{1 - e^{(\lambda_i - j\omega)h}} \right) + \right. \\ &\left. (-1)^{q-1} P_{iq}^T \frac{\partial^{q-1}}{\partial \omega^{q-1}} \left( \frac{e^{(\lambda_i + j\omega)h}}{1 - e^{(\lambda_i + j\omega)h}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

式中,  $j$  表示虚数单位, 上标  $T$  表示转置矩阵,  $\lambda_i$  和系数阵  $P_{iq} (i = 1, 2, \dots, l, q = 1, 2, \dots, \delta_i)$  由下式确定

$$\begin{cases} G(j\omega)G^*(j\omega) = \sum_{i=1}^l \sum_{q=1}^{\delta_i} \left[ \frac{P_{iq}}{(j\omega - \lambda_i)^q} + \frac{(-1)^q P_{iq}^T}{(j\omega + \lambda_i)^q} \right], \\ \lambda_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{若 } \operatorname{Re}[\sigma_i] < 0, \\ -\sigma_i & \text{若 } \operatorname{Re}[\sigma_i] \geq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (29)$$

引理1的证明类似于文[13],在此略去.

引理2 设 \$(A, B, C, o)\$ 是 \$G(s)\$ 的一个最小状态空间实现, 则

$$\Theta_C(e^{j\omega h}) = \bar{G}(e^{j\omega h})\bar{G}^*(e^{j\omega h}). \quad (30)$$

其中

$$\bar{G}(z) = C(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B}, \quad (31)$$

$$\bar{A} = e^{Ah}, \quad \bar{B}\bar{B}^T = \int_0^h e^{At}BB^Te^{A^T t}dt. \quad (32)$$

证 为简明起见, 假设 \$G(s)\$ 的极点均为位于左半复平面的单重极点, 即 \$\lambda\_i = \sigma\_i, i = 1, \dots, n\$. 这时 \$G(j\omega)G^\*(j\omega)\$ 的部分分式分解为

$$G(j\omega)G^*(j\omega) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{P_i}{j\omega - \lambda_i} - \frac{P_i^T}{j\omega + \lambda_i} \right), \quad (33)$$

且

$$\Theta_C(e^{j\omega h}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{P_i}{1 - e^{(\lambda_i - j\omega)h}} + \frac{P_i^T e^{(\lambda_i + j\omega)h}}{1 - e^{(\lambda_i + j\omega)h}} \right). \quad (34)$$

由于 \$\lambda\_1, \lambda\_2, \dots, \lambda\_n\$ 是矩阵的特征值, 故存在可逆阵 \$P\$, 使得

$$A_{st} = P^{-1}AP = \operatorname{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}, \quad (35)$$

从而有

$$\begin{cases} e^{A_{st}t} = P^{-1}e^{At}P, \\ e^{A_{st}h} = P^{-1}e^{Ah}P = \operatorname{diag} \{ e^{\lambda_1 h}, e^{\lambda_2 h}, \dots, e^{\lambda_n h} \}. \end{cases} \quad (36)$$

令 \$B\_{st} = P^{-1}B, C\_{st} = CP\$, 以 \$b\_{ij}\$ 表示矩阵 \$B\_{st}\$ 中位于第 \$i\$ 行第 \$j\$ 列的元素.

由式(36)可知, \$e^{\lambda\_1 h}, e^{\lambda\_2 h}, \dots, e^{\lambda\_n h}\$ 是 \$\bar{A} = e^{Ah}\$ 的特征值, 所以 \$\frac{\bar{G}(e^{j\omega h})\bar{G}^\*(e^{j\omega h})}{e^{j\omega h}}\$ 的部分分式分解可以表示为

$$\frac{\bar{G}(e^{j\omega h})\bar{G}^*(e^{j\omega h})}{e^{j\omega h}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{Q_i}{e^{j\omega h} - e^{\lambda_i h}} - \frac{Q_i^T}{e^{j\omega h} - e^{\lambda_i h}} \right). \quad (37)$$

式(37)的左右两侧同乘 \$e^{j\omega h}\$, 可得

$$\bar{G}(e^{j\omega h})\bar{G}^*(e^{j\omega h}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{Q_i}{1 - e^{(\lambda_i - j\omega)h}} + \frac{Q_i^T e^{(\lambda_i + j\omega)h}}{1 - e^{(\lambda_i + j\omega)h}} \right). \quad (38)$$

比较式(34)和式(38), 显然如果能证明 \$P\_i = Q\_i\$, 则

式(30)成立.

由于 \$G(j\omega)G^\*(j\omega) = G(s)G^T(-s)|\_{s=j\omega}\$, 所以将 \$G(s)G^T(-s)\$ 作部分分式分解, 再令 \$s = j\omega\$, 可以得到 \$G(j\omega)G^\*(j\omega)\$ 的形如式(33)的部分分式分解. 系数阵 \$P\_i\$ 可以利用留数定理求得

$$P_i =$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s(G(s)G^T(-s); \lambda_i) &= \{(s - \lambda_i)G(s)G^T(-s)\}_{s=\lambda_i} = \\ &= \{(s - \lambda_i)C(sI - A)^{-1}BB^T((-sI - A)^{-1})^T C^T\}_{s=\lambda_i} = \\ &= \{(s - \lambda_i)C_{st}(sI - A_{st})^{-1}B_{st}B_{st}^T((-sI - A_{st})^{-1})^T C_{st}^T\}_{s=\lambda_i} = \end{aligned}$$

$$C_{st} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum_{j=1}^p b_{ij}b_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^p b_{ij}^2 & \cdots & \sum_{j=1}^p b_{ij}b_{nj} \\ -\lambda_i - \lambda_1 & \cdots & -2\lambda_i & \cdots & -\lambda_i - \lambda_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} C_{st}^T. \quad (39)$$

同理, 由于 \$\frac{\bar{G}(e^{j\omega h})\bar{G}^\*(e^{j\omega h})}{e^{j\omega h}} = \frac{\bar{G}(z)\bar{G}^T(z^{-1})}{z} \Big|\_{z=e^{j\omega h}}\$, 先

求得 \$\frac{\bar{G}(z)\bar{G}^T(z^{-1})}{z}\$ 的部分分式分解, 再将 \$z = e^{j\omega h}\$

代入, 可以得到 \$\frac{\bar{G}(e^{j\omega h})\bar{G}^\*(e^{j\omega h})}{e^{j\omega h}}\$ 的形如式(37)的部分分式分解. 利用留数定理求得系数阵 \$Q\_i\$ 为

$$\begin{aligned} Q_i &= \operatorname{Re} s \left( \frac{\bar{G}(z)\bar{G}^T(z^{-1})}{z}; e^{\lambda_i h} \right) = \\ &= \left\{ (z - e^{\lambda_i h}) \frac{\bar{G}(z)\bar{G}^T(z^{-1})}{z} \right\}_{z=e^{\lambda_i h}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{z} (z - e^{\lambda_i h}) C(zI - \bar{A})^{-1} \bar{B}\bar{B}^T ((z^{-1}I - \bar{A})^{-1})^T C^T \right\}_{z=e^{\lambda_i h}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{z} (z - e^{\lambda_i h}) C_{st} (zI - A_{st})^{-1} \Lambda ((z^{-1}I - e^{A_{st}h})^{-1})^T C_{st}^T \right\}_{z=e^{\lambda_i h}}. \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\Lambda = P^{-1}\bar{B}\bar{B}^T(P^{-1})^T =$$

$$P^{-1} \left( \int_0^h e^{At}BB^Te^{A^T t}dt \right) (P^{-1})^T = \int_0^h e^{A_{st}t}B_{st}B_{st}^Te^{A_{st}^T t}dt.$$

将上式展开并与式(39)相比较, 可知 \$P\_i = Q\_i\$, 因此式(30)成立.

以上推导很容易推广到 \$G(s)\$ 有多重极点以及不稳定极点的情况. 证毕.

定理1 由式(20)定义的算子 \$\Gamma\_{G,Q}\$ 的范数为

$$\|\Gamma_{G,Q}\| = \sup_{\alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|_2}{\|\alpha\|_2} = \|Q(z)\bar{G}(z)\|_\infty. \quad (41)$$

其中  $\bar{G}(z)$  由式(31)和式(32)确定.

证 根据算子范数的定义, 有

$$\|\Gamma_{G,Q}\| = \sup_{\alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|_2}{\|\alpha\|_2}. \quad (42)$$

由于  $\Gamma_{G,Q}$  是有界线性算子, 因此

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{G,Q}\|^2 &= \|\Gamma_{G,Q}\Gamma_{G,Q}^*\| = \\ &= \sup_{\beta \neq 0} \frac{\|\Gamma_{G,Q}\Gamma_{G,Q}^*\beta\|_2}{\|\beta\|_2} = \\ &= \sup_{\beta \neq 0} \frac{\|Q(e^{j\omega h})\Theta_G(e^{j\omega h})Q^*(e^{j\omega h})\beta(e^{j\omega h})\|_2}{\|\beta(e^{j\omega h})\|_2} = \\ &= \sup_{\beta \neq 0} \frac{\|Q(e^{j\omega h})\bar{G}(e^{j\omega h})\bar{G}^*(e^{j\omega h})Q^*(e^{j\omega h})\beta(e^{j\omega h})\|_2}{\|\beta(e^{j\omega h})\|_2} = \\ &= \|Q(z)\bar{G}(z)\bar{G}^*(z)Q^*(z)\|_\infty = \|Q(z)\bar{G}(z)\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (43)$$

所以式(41)成立. 证毕.

定理1表明, 算子  $\Gamma_{G,Q}$  的范数  $\|\Gamma_{G,Q}\|$  为离散时间输出信号  $\beta$  的2-范数与连续时间输入信号  $\alpha$  的2-范数之比的最大值, 因此  $\|\Gamma_{G,Q}\|$  反映了  $\alpha$  对  $\beta$  的最大影响. 类比于纯连续时间系统和纯离散时间系统, 作者称  $\|\Gamma_{G,Q}\|$  为分别以  $\alpha$  和  $\beta$  作为输入和输出信号, 由  $G(s)$ 、采样器和  $Q(z)$  所构成的动态系统的无穷范数.

### 3.4 优化设计(Optimal design)

根据集成设计故障检测系统的思想<sup>[11,12]</sup>, 可以将最优后置滤波器  $R(z)$  的选择描述为优化问题

$$\min_{R(z)} J = \min_{R(z)} \frac{\|\Gamma_{G_d, RM_u}\|}{\|\Gamma_{G_f, RM_u}\|}. \quad (44)$$

式中,  $\|\Gamma_{G_d, RM_u}\|$  和  $\|\Gamma_{G_f, RM_u}\|$  分别反映了连续时间未知输入信号  $d$  和故障信号  $f$  对离散时间残差信号  $r$  的最大影响. 最小化  $J$ , 意味着通过选取  $R(z)$ , 尽量减小未知输入  $d$  的影响, 增大故障  $f$  的影响, 从而增强故障检测系统对未知输入  $d$  的鲁棒性, 同时提高它对故障  $f$  的灵敏度.

设  $(A_d, B_d, C_d, O)$  和  $(A_f, B_f, C_f, O)$  分别为  $G_d(s)$  和  $G_f(s)$  的最小状态空间实现. 由定理1可知

$$\|\Gamma_{G_d, RM_u}\| = \|R(z)M_u(z)\bar{G}_d(z)\|_\infty, \quad (45)$$

$$\|\Gamma_{G_f, RM_u}\| = \|R(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty. \quad (46)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{G}_d(z) = C_d(zI - \bar{A}_d)^{-1}\bar{B}_d, \bar{A}_d = e^{A_d h}, \\ \bar{B}_d\bar{B}_d^T = \int_0^h e^{A_d t} B_d B_d^T e^{A_d^T t} dt, \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} \bar{G}_f(z) = C_f(zI - \bar{A}_f)^{-1}\bar{B}_f, \bar{A}_f = e^{A_f h}, \\ \bar{B}_f\bar{B}_f^T = \int_0^h e^{A_f t} B_f B_f^T e^{A_f^T t} dt. \end{cases} \quad (48)$$

因此, 优化问题(44)等价于

$$\min_{R(z)} J = \min_{R(z)} \frac{\|R(z)M_u(z)\bar{G}_d(z)\|_\infty}{\|R(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty}. \quad (49)$$

优化问题(49)可以采用类似于文[12]的方法求解. 设  $\bar{G}_d(z)$  无单位圆上的零点,  $M_u(z)\bar{G}_d(z)$  的互内外分解(co-inner-outer factorization)为

$$M_u(z)\bar{G}_d(z) = \bar{G}_{do}(z)\bar{G}_{di}(z). \quad (50)$$

其中,  $\bar{G}_{di}(z)$  是互内因子(co-inner), 满足  $\bar{G}_{di}(z)\bar{G}_{di}^*(z) = I$ ,  $\bar{G}_{do}(z)$  是互外因子(co-outer), 具有左逆  $\bar{G}_{do}^{-1}(z) \in \exists H_\infty$ <sup>[14]</sup>. 令  $R(z) = R_o(z)\bar{G}_{do}^{-1}(z)$ , 有

$$\begin{aligned} J &= \frac{\|R(z)\bar{G}_{do}(z)\bar{G}_{di}(z)\|_\infty}{\|R(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty} = \\ &= \frac{\|R(z)\bar{G}_{do}(z)\|_\infty}{\|R(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty} = \\ &= \frac{\|R_o(z)\bar{G}_{do}^{-1}(z)\bar{G}_{do}(z)\|_\infty}{\|R_o(z)\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty} = \\ &= \frac{\|R_o(z)\|_\infty}{\|R_o(z)\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty}. \end{aligned} \quad (51)$$

因为

$$\begin{aligned} \|R_o(z)\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty &\leq \\ \|R_o(z)\|_\infty \|\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty, \end{aligned} \quad (52)$$

所以

$$J \geq \frac{\|R_o(z)\|_\infty}{\|R_o(z)\|_\infty \|\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty} = \frac{1}{\|\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty}. \quad (53)$$

上式中不等号取为等号, 当且仅当

$$\begin{aligned} \|R_o(z)\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty &= \\ \|R_o(z)\|_\infty \|\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty. \end{aligned} \quad (54)$$

若取  $R_o(z) = I$ , 显然式(54)成立. 注意到式(53)中不等号右侧的值与  $R_o(z)$  的具体选取无关. 故  $R(z) = \bar{G}_{do}^{-1}(z)$  就是优化问题(49)的最优解.

所以原优化问题(44)的最优解为

$$R_{opt}(z) = \bar{G}_{do}^{-1}(z). \quad (55)$$

最优性能指标为

$$J_{opt} = \frac{1}{\|\bar{G}_{do}^{-1}(z)M_u(z)\bar{G}_f(z)\|_\infty}. \quad (56)$$

相应地, 检测阈值  $J_{th}$  应取为

$$\begin{aligned} J_{th} &= \sup_d \|(\Gamma_{G_d, RM_u} d)(e^{j\omega h})\|_2 = \\ &= \|\Gamma_{G_d, RM_u}\| \sup_d \|d\|_2 = \\ &= \|R_{opt}(z)M_u(z)\bar{G}_d(z)\|_\infty \sup_d \|d\|_2 = \delta_d \end{aligned} \quad (57)$$

综上所述,对由式(1)~式(3)描述的采样数据系统直接设计最优的离散时间故障检测系统的步骤为

第1步 确定  $G_u(s)$  的一个最小状态空间实现  $(A_u, B_u, C_u, O)$ , 根据式(7) 计算  $A_{ud}$  和  $B_{ud}$ .

第2步 确定  $L$ , 使得  $A_{ud} - LC_u$  的所有特征值均位于单位圆内.

第3步 分别由式(15) 和式(47) 计算  $M_u(z)$  和  $\bar{G}_d(z)$ , 作  $M_u(z)\bar{G}_d(z)$  的互内外分解.

第4步 根据式(55) 确定最优后置滤波器  $R_{opt}(z)$ .

第5步 按照式(9)和式(11)构造残差产生器.

第6步 由式(57)确定检测阈值.

#### 4 结论(Conclusion)

本文提出了为采样数据系统直接设计最优的离散时间故障检测系统的  $H_\infty$  方法. 首先构造由离散时间观测器和后置滤波器组成的残差产生器. 分析表明, 残差产生器的动态特性实际上是由连续时间未知输入信号和故障信号所决定的. 然后引入形如  $\Gamma_{C,Q}$  的算子来精确描述残差产生器的频域动态特性, 度量连续时间未知输入信号和故障信号对离散时间残差信号的影响. 最后通过求解优化问题, 增强故障检测系统对未知输入的鲁棒性, 同时提高它对故障的灵敏度. 本文提出的方法属于直接设计方法, 在设计过程中不存在任何近似, 因此与通常采用的间接设计方法(从连续时间过程模型到离散时间过程模型的近似或从连续时间残差产生器到离散时间残差产生器的近似)相比, 可以显著地提高故障检测系统的性能.

#### 参考文献(References):

- [1] CHEN T W, FRANCIS B. *Optimal Sampled-Data Control Systems* [M]. London: Springer-Verlag, 1995.
- [2] ROSENWASSER E N, LAMPE B P. *Computer Controlled Systems - Analysis and Design with Process-Orientated Models* [M]. London: Springer-Verlag, 2000.
- [3] 叶银忠, 潘日芳, 蒋蔚荪. 动态系统的故障检测和诊断方法[J]. 信息与控制, 1986, 15(6): 27-34.  
(YE Yinzong, PAN Rifang, JIANG Weisun. Fault detection and diagnosis approaches for dynamic systems [J]. *Information and Control*, 1986, 15(6): 27-34.)
- [4] PATTON R J, FRANK P M, CLARK R N. *Fault Diagnosis in Dynamic Systems. Theory and Application* [M]. London: Prentice Hall,

1989.

- [5] 周东华, 孙优贤. 控制系统的故障检测和诊断技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.  
(ZHOU Donghua, SUN Youxian. *Fault Detection and Diagnosis Technique for Control Systems* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994.)
- [6] 张育林, 李东旭. 动态系统故障诊断的理论及应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.  
(ZHANG Yulin, LI Dongxu. *Theory and Application of Fault Diagnosis for Dynamic Systems* [M]. Changsha: National University of Defence Technology Press, 1997.)
- [7] 闻新, 张洪铨, 周露. 控制系统的故障诊断和容错控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.  
(WEN Xin, ZHANG Hongyue, ZHOU Lu. *Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control for Control Systems* [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1998.)
- [8] GERTLER J J. *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems* [M]. New York: Marcel Dekker, 1998.
- [9] CHEN J, PATTON R. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [10] FRANK P M, DING X. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems [J]. *J of Process Control*, 1997, 7(6): 403-424.
- [11] DING X, GUO L. On observer based fault detection [A]. *Proc of the IFAC Symposium SafeProcess '97* [C]. Hull: the University of Hull Press, 1997: 112-120.
- [12] DING S X, JEINSCH T, FRANK P M, et al. A unified approach to the optimization of fault detection systems [J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 2000, 14(7): 725-745.
- [13] ZHANG Ping, DING S X, WANG Guizeng, ZHOU Donghua. A frequency domain approach to fault detection in sampled-data systems [J]. *Automatica*, 2003, 39(7): 1303-1307.
- [14] IONESCU V, OARA C. Spectral and inner-outer factorizations for discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(12): 1840-1845.

#### 作者简介:

张萍 (1977—), 女, 1997年在华中科技大学自动控制工程系获学士学位, 现为清华大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为故障诊断;

DING S X (1958—), 男, 1992年获工学博士学位, 现为德国 University of Duisburg 教授. 主要研究方向为故障诊断, 容错控制;

王桂增 (1941—), 男, 清华大学自动化系教授, 博士生导师, 中国自动化学会技术过程的故障诊断与安全性专业委员会主任. 主要研究方向为故障诊断, 先进过程控制. E-mail: wgz@tsinghua.edu.cn;

周东华 (1963—), 男, 1990年获工学博士学位, 现为清华大学自动化系教授, 博士生导师, 中国自动化学会副秘书长, 技术过程的故障诊断与安全性专业委员会秘书长. 主要研究方向为故障诊断, 容错控制.