文章编号：1000-8152(2003)03-0367-04

关于第二类 Fornasini-Marchesini 模糊的 2-D 动态规划

王为群[1]，殷明慧[2]，邹　云[2]

(1. 南京理工大学 理学院，江苏 南京 210094；2. 南京理工大学 自动化系，江苏 南京 210094)

摘要：为了求解用正常或奇异的第二类 Fornasini-Marchesini 模型(FMM II)描述的 2-D 线性离散系统的最优控制问题，首先将 2-D FMM II 用变结构 1-D 形式表示，再利用 1-D 动态规划的方法，给出使给定指标函数最小的2-D 控制序列、最优轨线及性能指标的最优值的计算方法.

关键词：2-D 系统；奇异系统；动态规划；最优控制

中图分类号：O231.3　　　**文献标识码**：A

Dynamic programming for 2-D discrete systems described by Fornasini-Marchesini second model

WANG Wei-qun[1], YIN Ming-hui[2], ZOU Yun[2]

(1. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Jiangsu Nanjing 210094, China;

2. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Jiangsu Nanjing 210094, China)

Abstract: In order to derive the optimal control of 2-D discrete linear systems described by regular or singular Fornasini-Marchesini Second Model (FMM II), 2-D FMM II is reduced to 1-D system with variable structure, then 2-D sequence of inputs minimizing the given performance criterion and corresponding sequence of optimal state space vectors are calculated.

Key words: 2-D system; singular system; dynamic programming; optimal control

1　引言(Introduction)

二维(2-D)线性离散系统的研究在最近几十年引起了人们极大的兴趣[1]，因为该类模型被广泛用于处理 2-D 采样数据，如地震检测数据，摄影测绘数据等.在不同的研究背景下提出了多种 2-D 状态空间模型，如 2-D Roesser 模型是在研究多维线性滤波网络时提出的，Fornasini-Marchesini 模型是在研究 2-D图像处理时引入的.由于 2-D 系统增加了在 1-D 系统中不存在的困难，除去可分 2-D Roesser 模型的情形，许多 1-D 的方法不能直接适用于相应的 2-D 情形.关于推广 1-D 系统的结论到 2-D 情形时遇到的困难在多篇论文中均被提到.

动态规划方法在 1-D 系统的最优控制中已经获得成功应用，1-D 奇异系统的最优控制问题也可通过合适的变换化为正常系统的最优控制问题用动态规划求解[2].动态规划方法在 2-D 线性离散系统的最优控制中的应用参见文献[3]：针对正常 2-D Roesser模型定义割线(cross-out)，将区域内的点分成现在、将来、过去点，改变代价函数的形式，化为 1-D 情形讨论.2-D Roesser 模型是 Fornasini-Marchesini 模型的特例，文献[3]的方法不能直接用于 Fornasini-Marchesini 模型，对 Fornasini-Marchesini 模型的研究(特别是奇异的情形)具有更普遍的意义.2-D 奇异线性离散系统的研究在近十几年受到广泛关注，取得了一系列的成果[4~8].但是与 2-D 正常系统或 1-D 奇异系统的研究相比，2-D 奇异系统由于其复杂性还有大量的问题需要解决.

本文讨论正常或奇异的第二类 Fornasini-Marchesini 模型(FMM II)表示的系统给定指标函数后的最优控制序列等计算问题.先将 2-D FMM II 用变结构的 1-D 形式表示，再利用动态规划方法[9]求解，给出使给定指标函数最小的 2-D 控制序列、最优轨线及性能指标的最优值的计算方法.

2　2-D FMM II 的变结构 1-D 形式(On the 1-D form with variable structure of 2-D FMM II)

考虑 FMM II 描述的 2-D 线性离散系统

收稿日期：2001-08-13；收修改稿日期：2002-04-20.

基金项目：国家自然科学基金(69474001)；教育部骨干教师基金(200011)资助项目.

$$\begin{aligned}&Ex(i+1,j+1)=\\&A_1x(i,j+1)+A_2x(i+1,j)+\\&B_1u(i,j+1)+B_2u(i+1,j).\end{aligned}\tag{1}$$

边界条件为

$$x(i,1)=x_{i1},x(1,j)=x_{1j}.\tag{2}$$

其中 $x(i,j)\in\Xi^n$ 为局部状态向量，$u(i,j)\in\Xi^m$ 为控制向量，$A_i(i=1,2)$ 和 $B_i(i=1,2)$ 为合适维数的常数矩阵，E 可能是正常的，也可能是奇异的矩阵. 系统(1) 定义在矩形域 $1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J$ 上. 不妨设 $I>J(I\leqslant J$ 的情形可类似讨论)，斜割支线为 $C_k=\{(i,j):(1,1)\leqslant(i,j)\leqslant(I,J),i+j=k+1\}$，且 C_k 上离散点的数目等于

$$\lambda(k)=\begin{cases}k, & k<J,\\ J, & J\leqslant k\leqslant I,\\ N-k+1, & I\leqslant k\leqslant N.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $N=I+J-1$. 下面分段给出 FMM II 的 1-D 变结构表示.

第1段　相应于第1至 J 条斜割支线. 若令

$$\begin{cases}x(i)=\begin{pmatrix}x(i-1,2)\\x(i-2,3)\\\vdots\\x(i-k,k+1)\\\vdots\\x(2,i-1)\end{pmatrix}_{(i-2)\times1},\\ u(i)=\begin{pmatrix}u(i,1)\\u(i-1,2)\\\vdots\\u(i-k,k+1)\\\vdots\\u(1,i)\end{pmatrix}_{i\times1},\\ 3\leqslant i\leqslant J,\end{cases}\tag{4}$$

(其中 $x(i)$ 表示第 i 条斜割支线上除边界外的点)，则当 $2\leqslant i\leqslant J-1$ 时将式(1)改写为如下的等价形式

$$E(i)x(i+1)=A(i)x(i)+B(i)u(i)+H(i).\tag{5}$$

其中

$$E(i)=\begin{bmatrix}E&0&\cdots&0\\0&E&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&E\end{bmatrix}_{(i-1)\times(i-1)},\tag{6a}$$

$$A(i)=\begin{bmatrix}A_1&&\\A_2&\ddots&\\&\ddots&A_1\\&&A_2\end{bmatrix}_{(i-1)\times(i-2)},\tag{6b}$$

$$B(i)=\begin{bmatrix}B_2&B_1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&B_2&B_1\end{bmatrix}_{(i-1)\times i},\tag{6c}$$

$$H(i)=\begin{pmatrix}A_2x(i,1)\\0\\\vdots\\0\\A_1x(1,i)\end{pmatrix}_{(i-1)\times1}\tag{6d}$$

初始条件为

$$x(2)=0.\tag{7}$$

式(5)即是第1段 FMM II 的变结构 1-D 形式，$x(i)$，$x(i,1)$ 和 $x(1,i)$ 具体给出了第 i 条割线上的所有点，式(5) 表示相邻两条斜割支线上的除去边界外的点的递推关系.

第2段　相应于第 $J+1$ 至 I 条斜割支线. 若令

$$\begin{cases}x(i)=\begin{pmatrix}x(i-1,2)\\x(i-2,3)\\\vdots\\x(i-k,k+1)\\\vdots\\x(i+1-J,J)\end{pmatrix}_{(J-1)\times1},\\ u(i)=\begin{pmatrix}u(i,1)\\u(i-1,2)\\\vdots\\u(i-k,k+1)\\\vdots\\u(i+1-J,J)\end{pmatrix}_{J\times1},\\ J+1\leqslant i\leqslant I,\end{cases}\tag{8}$$

当 $J\leqslant i\leqslant I-1$ 时将式(1)改写为如下的等价形式

$$E(i)x(i+1)=A(i)x(i)+B(i)u(i)+H(i).\tag{9}$$

其中

$$E(i)=\begin{bmatrix}E&0&\cdots&0\\0&E&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&E\end{bmatrix}_{(J-1)\times(J-1)},\tag{10a}$$

$$A(i)=\begin{bmatrix}A_1&&&\\A_2&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\&&A_2&A_1\end{bmatrix}_{(J-1)\times(J-1)},\tag{10b}$$

$$B(i)=\begin{bmatrix} B_2 & B_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_2 & B_1 \end{bmatrix}_{(J-1)\times J}, \quad (10c)$$

$$H(i)=\begin{pmatrix} A_2x(i,1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(J-1)\times 1}, \quad (10d)$$

式(9)即是第 2 段 FMM Ⅱ 的变结构 1-D 形式, $x(i)$ 和 $x(i,1)$ 具体给出了第 i 条割线上的所有点,式(9)表示相邻两条斜割支线上的除去边界外的点的递推关系.

第 3 段　相应于第 $I+1$ 至 $I+J-1$ 条斜割支线.若令

$$\begin{cases} x(i)=\begin{pmatrix} x(J,i-J+1) \\ x(J-1,i-J+2) \\ \vdots \\ x(J-k+1,i-J+k) \\ \vdots \\ x(i+1-I,I) \end{pmatrix}_{(I+J-i)\times 1}, \\ u(i)=\begin{pmatrix} u(J,i-J+1) \\ u(J-1,i-J+2) \\ \vdots \\ u(J-k+1,i-J+k) \\ \vdots \\ u(i+1-I,I) \end{pmatrix}_{(I+J-i)\times 1}, \\ I+1\leqslant i\leqslant I+J-1, \end{cases} \quad (11)$$

则当 $I\leqslant i\leqslant I+J-2$ 时将式(1)改写如下的等价形式

$$E(i)x(i+1)=A(i)x(i)+B(i)u(i). \quad (12)$$

其中

$$E(i)=\begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E \end{bmatrix}_{(I+J-i-1)\times(I+J-i-1)}, \quad (13a)$$

$$A(i)=\begin{bmatrix} A_2 & A_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & A_2 & A_1 \end{bmatrix}_{(I+J-i-1)\times(I+J-i)}, \quad (13b)$$

$$B(i)=\begin{bmatrix} B_2 & B_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_2 & B_1 \end{bmatrix}_{(I+J-i-1)\times(I+J-i)}, \quad (13c)$$

式(12)即是第 3 段 FMM Ⅱ 的变结构 1-D 形式, $x(i)$ 具体给出了第 i 条割线上的所有点,式(12)表示相邻两条斜割支线上的点的递推关系.

式(5),(9),(12)即为 2-D FMM Ⅱ 的分段表示的变结构 1-D 形式.

3　2-D FMM Ⅱ 的动态规划(The dynamic programming of 2-D FMM Ⅱ)

利用上一节的结果,下面讨论用动态规划方法求解用 2-D FMM Ⅱ 描述的正常或奇异系统的最优控制问题.假定 2-D FMM Ⅱ 由式(1)表示,定义在矩形域 $1\leqslant i\leqslant I, 1\leqslant j\leqslant J$ 上.边界条件 $x(i,1)=x_{i1}, x(1,j)=x_{1j}$ 为已知.另外,状态向量和控制向量的分量所受的限制为

$$\alpha_p^-\leqslant x_p(i,j)\leqslant \alpha_p^+,\ \beta_q^-\leqslant u_q(i,j)\leqslant \beta_q^+.$$

其中 $p=1,2,\cdots,n, q=1,2,\cdots,m$. 数量 $\alpha_p^-, \alpha_p^+, \beta_q^-, \beta_q^+$ 随指标 i,j, 向量 $x(i,j), u(i,j)$ 变动.

设性能函数为

$$V=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}L[x(i,j),u(i,j),i,j]. \quad (14)$$

利用 FMM Ⅱ 的变结构 1-D 形式,将式(14)改写为

$$V=\sum_{k=1}^{N}f_k\{L[x(i,j),u(i,j),i,j]\}. \quad (15)$$

其中 $N=I+J-1$, 而 $f_k\{L[x(i,j),u(i,j),i,j]\}=\sum_{\substack{(i,j)\\ i+j=k+1}}L[x(i,j),u(i,j),i,j]$ 表示割线 $C_k(k=1,2,\cdots,N)$ 上的所有点的性能函数.每条割线上离散点的数目等于

$$\lambda(k)=\begin{cases} k, & k<s_{\min}, \\ s_{\min}, & s_{\min}\leqslant k\leqslant s_{\max}, \\ N-k+1, & s_{\max}\leqslant k\leqslant N. \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$s_{\min}=\min\{I,J\},\ s_{\max}=\max\{I,J\}. \quad (17)$$

由于任意 k 级 $(1\leqslant k\leqslant N)$ 处指标函数的极小值可表示为

$$G(x,k)=\min_{u(k)\in U_c}\Big(\sum_{s=k}^{N}f_s(x(i,j),u(i,j),i,j):k\leqslant s\leqslant N\Big). \quad (18)$$

其中 U_c 表示控制输入的容许集,它满足递推关系

$$G(x,k)=\min_{u(k)\in U_c}\{f_k[L(\cdot)]+G(x,k+1)\}. \tag{19}$$

边界条件为

$$G(x,N)=\min_{u(I,J)}L[x(I,J),u(I,J),I,J]. \tag{20}$$

从而,利用 1-D 动态规划方法,为了求出使指标函数(15)极小化的最优控制和最优状态轨线,可利用指定的能达的终态从 $k=I+J-1$ 到 $k=1$ 逆向递推求解方程(19),(20),再从给定的初态(与边界条件)从 $k=1$ 到 $k=I+J-1$ 迭代求出所需的最优控制及相应的最优轨线.

4 算法算例(Algorithm and example)

下面给出 2-D FMM II 的动态规划的算法及算例.

算法 1

第 1 步 确定所有 $(1,1)\leqslant(i,j)\leqslant(I,J)$ 的量化集.

第 2 步 由式(5),(9),(12)求出 2-D FMM II 的变结构 1-D 形式.

第 3 步 利用所给终态和逆向递推的 Bellman 方程(19),(20),按 $k=N,N-1,\cdots,1$ 求解第 k 级最优值 $G(x(k),x(k,1),x(1,k),k)$ 和最优控制.

第 4 步 利用给定的初态从 $k=1,2,\cdots,N$ 迭代求解最优控制 $u^*(k)$ 和最优轨线 $x^*(k)$ 及最优性能函数值 $V_{\min}$.

算例 1 考虑 $n=2,m=1,I=J=4$ 的奇异 2-D FMM II 方程(1)

$$\begin{aligned}&Ex(i+1,j+1)=\\&A_1x(i,j+1)+A_2x(i+1,j)+\\&B_1u(i,j+1)+B_2u(i+1,j).\end{aligned}$$

其中 $x(i,j)=\begin{pmatrix}x_1(i,j)\\x_2(i,j)\end{pmatrix}$,而

$$\begin{cases}E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\\ B_1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{21}$$

边界条件为

$$\begin{cases}x(1,1)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ x(1,2)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ x(1,3)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\\ x(1,4)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ x(2,1)=\begin{pmatrix}-0.5\\0\end{pmatrix},\\ x(3,1)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ x(4,1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{22}$$

终态要求为

$$x(4,4)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{23}$$

性能函数为

$$\begin{cases}L[x(i,j),u(i,j),i,j]=\\ x^{\mathrm T}(i,j)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}x(i,j)+u^2(i,j),\\ (1,1)\leqslant(i,j)\leqslant(I,J).\end{cases} \tag{24}$$

当 $i=I=4,j=J=4$ 时,

$$L[x(i,j),u(i,j),i,j]=x^{\mathrm T}(i,j)x(i,j). \tag{25}$$

假定 $x_1(i,j),x_2(i,j)$ 和 $u(i,j)$ 的量化集分别为 $\{-1.5,-1,-0.5,0,0.5\}$,$\{-1,-0.5,0,0.5,1\}$ 以及 $\{-0.5,0,0.5\}$,则由算法 1 可得计算结果如表 1 所示.

表 1 算例 1 计算结果

Table 1 The calculating result of Example 1

k	i	j	x_1	x_2	u	i	j	x_1	x_2	u	i	j	x_1	x_2	u	i	j	x_1	x_2	u
1	1	1	1	2																
2	1	2	0	0	0.5	2	1	-0.5	0	0.5										
3	1	3	-1	-1	0	2	2	0.5	0.5	0	3	1	0	-1	0.5					
4	1	4	0	5	0.5	2	3	-0.5	0	-0.5	3	2	0.5	-1	0.5	4	1	1	0	0
5						2	4	0.5	0	0	3	3	0	0	0	4	2	-0.5	0.5	0
6											3	4	0.5	0.5	0	4	3	-0.5	0	0
7																4	4	1	2	

由上表得最优性能值为 6.5.

为提高计算速度,还可以考虑该算法在并行分布式计算机上的实现问题.

参考文献(References):

[1] 杨成梧,邹云.2-D线性离散系统[M].北京:国防工业出版社,1995.

(下转第 376 页)

(Probability Group, Institute of Mathematics Research, Chinese Academy of Sciences. *Mathematical Methods of Discrete Time System Filtering* [M]. Beijing: National Defense and Industry Press, 1975.)

[7] 徐宁寿.随机信号估计与系统控制[M].北京:北京工业大学出版社,2001.

(XU Ningshou. *Stochastic Signal Estimate and System Control* [M]. Beijing: Beijing Industry University Press, 2001.)

作者简介:

孙书利 (1971 —),男,1996年毕业于黑龙江大学数学系,1999年获该校控制理论与控制工程专业硕士学位,现为哈尔滨工业大学在职博士生.研究方向为状态估计,信息融合等. E-mail: sunsl@hlju.edu.cn;

崔平远 (1961 —),男,哈尔滨工业大学博士生导师.研究方向为深空探测,机器人控制,智能控制等.

(上接第370页)

(YANG Chengwu, ZOU Yun. *2-D Linear Discrete Systems* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995.)

[2] DAI Liyi. *Singular Control Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989: 275 – 283.

[3] MARSZAYEK W L, SADECKI J. Dynamic programming for 2-D discrete linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(2): 181 – 184.

[4] ZOU Yun, CAMPBELL S L. The jump behavior and stability analysis for 2-D singular systems [J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2000, 11(2): 321 – 338.

[5] 邹云,杜春玲,杨成梧.2-D奇异系统的正则观测器设计[J].应用数学学报,1998,21(4):497 – 504.

(ZOU Yun, DU Chunling, YANG Chengwu. Design of regular observers for 2-D singular systems [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1998, 21(4): 497 – 504.)

[6] KACZOREK T, SWIERKOSZ M. General model of n-D system with variable coefficients and its reduction to 1-D system with variable structure [J]. *Int J Control*, 1988, 48(5): 609 – 623.

[7] KACZOREK T. General response formula and minimum energy control for the general singular model of 2-D system [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(4): 433 – 436.

[8] 赵胜民,唐万生,李光泉.2-D正线性系统的实现问题[J].控制理论与应用,2000,17(5):647 – 650.

(ZHAO Shengmin, TANG Wansheng, LI Guangquan. The realization problem of 2-D positive linear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(5): 647 – 650.)

[9] LARSON R E, CARSTEA J L.动态规划原理[M].陈伟基,王永县,杨家本,译.北京:清华大学出版社,1984.

(LARSON R E, CARSTEA J L. *The Principle of Dynamic Programming* [M]. CHEN Weiji, WANG Yongxian, YANG Jiaben, translated. Beijing: Tsinghua University Press, 1984.)

作者简介:

王为群 (1964 —),女,1988年在西北工业大学获得硕士学位,现为南京理工大学副教授.主要研究兴趣为离散系统和奇异系统. E-mail: swangyix@mail.njust.edu.cn;

殷明慧 (1978 —),男,2002年在南京理工大学获硕士学位.主要研究兴趣为电力系统分析;

邹 云 (1962 —),男,1990年在南京理工大学获博士学位,现为南京理工大学教授,博士生导师.主要研究兴趣为广义系统和电力系统的稳定性分析.