

具有任意形状隶属函数的分层模糊系统逼近性能研究

孙多青, 霍 伟

(北京航空航天大学 第七研究室, 北京 100083)

摘要: 首先证明了对任意给定的矩阵 A 和正数 c , 一定存在向量 b , 使得方程 $Ax = b$ 有非负解, 且 b 和解的范数均小于 c . 在此基础上证明了具有任意形状隶属函数的分层模糊系统对紧集上连续函数的逼近性质, 为使用分层模糊系统进行辨识或控制以避免模糊规则数目随系统变量个数呈指数增长提供了理论依据.

关键词: 分层模糊系统; 逼近; 隶属函数

中图分类号: TP273, O174.41

文献标识码: A

Study on universal approximation of hierarchical fuzzy systems with arbitrary membership functions

SUN Duo-qing, HUO Wei

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: It is first shown that for any given matrix A and constant $c > 0$ there exists a vector b such that $Ax = b$ has a non-negative solution, and both the norms of b and this solution are less than c . Based on this fact it is proved that the hierarchical fuzzy systems with arbitrary membership functions are capable of approximating any continuous function on a compact set. Thus, the theoretical foundation is established for applying hierarchical fuzzy systems to identification and control such that the problem that the number of fuzzy rules increases exponentially with the number of system variables can be avoided.

Key words: hierarchical fuzzy system; approximation; membership function

1 引言 (Introduction)

近年来模糊控制器得到越来越广泛的应用, 文献[1,2]中提出的模糊自适应控制方案, 为研究未知非线性系统的控制问题提供了有力工具. 然而, 当处理含有多个输入变量的系统时, 存在一个普遍的困难, 即模糊控制器中规则数目随系统变量呈指数增长, 使得许多理论方法难以实施. 文献[3]提出了分层模糊系统(hierarchical fuzzy systems), 这种模糊系统具有一个良好的特性: 规则数目随输入变量的个数呈线性增长, 因而为解决上述困难提供了一个有效途径. 1998年和1999年文献[4]和文献[5]研究了3个输入变量且隶属函数为三角形的分层模糊系统对定义在紧集上三元连续可微函数的逼近性能, 并在文献[5]中给出了有3个输入变量的分层模糊系统参数训练算法; 2000年文献[6]证明了对于定义在紧集上的 n 元连续可微函数也可用隶属函数为三角形的分层模糊系统来逼近. 这为具有三角形隶

属函数分层模糊系统的应用提供了理论基础.

本文将证明取任意形状的隶属函数时, 分层模糊系统也具有文献[6]所述的逼近性质, 并将其结果推广到连续函数的情形, 为更一般的分层模糊系统的广泛应用提供理论依据.

2 分层模糊系统简介 (Brief introduction to hierarchical fuzzy systems)

图1给出了一个具有 n 个输入变量的特殊分层模糊系统的结构. 将变量 x_1, x_2 输入第一层模糊系统, 将其输出 y_1 和另一个变量 x_3 输入第二层模糊系统, 如此下去. 虽然它是一个特殊的分层模糊系统, 但在规则数目最少的意义下是最优的^[3], 称其为具有最优结构的分层模糊系统.

第1层模糊系统的规则如下:

如果 x_1 为 A_1^l 且 x_2 为 A_2^l , 则 $y_1 = h_1^l(x_1, x_2)$.

其中 A_1^l, A_2^l 是模糊集, $l = 1, 2, \dots, M_1, M_1$ 为第1层模糊规则库中所含模糊规则的个数. 若采用乘积推

理规则,模糊单值产生器,加权平均去模糊化方法,则该层模糊系统输出为

$$y_1 = \frac{\sum_{l=1}^{M_1} h_1^l(x_1, x_2) \mu_{A_1^l}(x_1) \mu_{A_2^l}(x_2)}{\sum_{l=1}^{M_1} \mu_{A_1^l}(x_1) \mu_{A_2^l}(x_2)}. \quad (1)$$

式中 $\mu_{A_1^l}(x_1), \mu_{A_2^l}(x_2)$ 为 A_1^l, A_2^l 相应的隶属函数.

第 i ($i = 2, \dots, n-1$) 层模糊系统的规则如下:

如果 x_{i+1} 为 A_{i+1}^l 且 y_{i-1} 为 B_{i-1}^l ,

则 $y_i = h_i^l(x_{i+1}, y_{i-1})$.

其中 A_{i+1}^l, B_{i-1}^l 是模糊集, $l = 1, 2, \dots, M_i, M_i$ 为第 i 层模糊规则库中所含模糊规则的个数,若采用乘积推理规则,模糊单值产生器,加权平均去模糊化方法,则第 i 层模糊系统输出为

$$y_i = \frac{\sum_{l=1}^{M_i} h_i^l(x_{i+1}, y_{i-1}) \mu_{A_{i+1}^l}(x_{i+1}) \mu_{B_{i-1}^l}(y_{i-1})}{\sum_{l=1}^{M_i} \mu_{A_{i+1}^l}(x_{i+1}) \mu_{B_{i-1}^l}(y_{i-1})}. \quad (2)$$

式中 $\mu_{A_{i+1}^l}(x_{i+1}), \mu_{B_{i-1}^l}(y_{i-1})$ 分别为 A_{i+1}^l, B_{i-1}^l 相应的隶属函数.

分层模糊系统最适合应用于具有自然分层结构的系统.在这种情况下, $y_1, y_2, \dots$ 对应于系统的物理变量,如果不是这种情况, $y_1, y_2, \dots$ 可以解释成系统的“内部状态变量”.

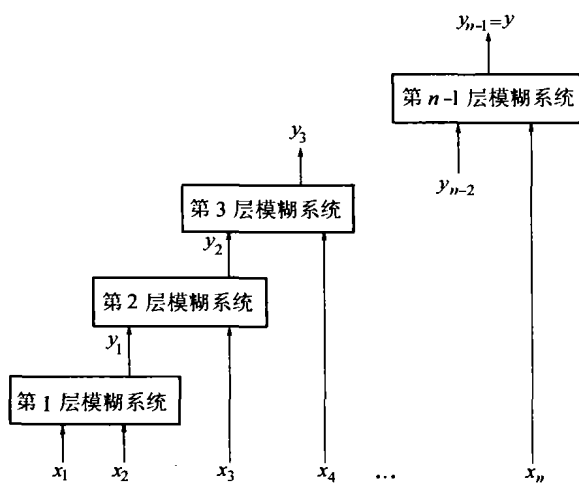


图1 一种 n 个输入变量的分层模糊系统的结构图

Fig. 1 The structure of a kind of n -input hierarchical fuzzy systems

3 理论准备(Theoretical preliminaries)

定义1^[7] 以 X 表示一个任意维数的实线性空间.设有线性不等式系统

$$g_i(x) \geq c_i \quad (1 \leq i \leq p). \quad (3)$$

其中 $x \in X, g_1(x), \dots, g_p(x)$ 为给定的线性齐次函数, $c_1, \dots, c_p$ 为给定的实数.若存在 $x \in X$ 满足式(3),则系统(3)称为相容的,否则称为不相容的.

对于向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n, a \geq b$ ($a > b$) 系指 $a_i \geq b_i$ ($a_i > b_i$), $i = 1, 2, \dots, n$;对于矩阵 A (向量 a),若其各元素均非负,则称 A 为非负矩阵(a 为非负向量),记作 $A \geq 0$ ($a \geq 0$).

引理1 给定任意可逆矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 线性不等式系统

$$Ax > 0 \quad (4)$$

是相容的.

证 因为 A 可逆,所以 $\forall b \in \mathbb{R}^n, Ax = b$ 有唯一解.特别地,任取 $b \in \mathbb{R}^n$ 且 $b > 0$,则 $Ax = b$ 有唯一解 x_0 ,从而 $Ax_0 > 0$,故结论成立.

由上述引理可证.

引理2 对任意给定的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 及常数 $c > 0$,则存在 $b \in \mathbb{R}^m$ 且 $\|b\| \leq c$,使得

$$Ax = b \quad (5)$$

有解 $x_1 \geq 0$ 且 $0 < \|x_1\| \leq c$.特别地,若 A 为非负矩阵,则上述 b 为非负向量.

证 当 $\text{rank}(A) = 0$ 时,取 $b = 0 \in \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n$ 且 $x_0 > 0$,则 $Ax = b$ 有解 x_0 ,且 $\|x_0\| > 0$.当 $\text{rank}(A) = r > 0$ 时,设 A_r 为 A 的一个不为零的 r 阶非零子式,不妨设 A_r 位于 A 的左上角.将 A 的前 r 行 $A(1, 2, \dots, r)$ 写成分块阵的形式

$$A(1, 2, \dots, r) = (A_r \quad A_{n-r}).$$

以 x_r 和 b_r 分别表示 x 和 b 的前 r 个分量构成的列向量, x_{n-r} 表示 x 的后 $n-r$ 个分量构成的列向量.熟知,方程组

$$A_r x_r + A_{n-r} x_{n-r} = b_r$$

与方程组(5)同解,且有

$$x_r = A_r^{-1}(b_r - A_{n-r} x_{n-r}). \quad (6)$$

由引理1知, $A_r^{-1}y > 0$ 有解 $y_0 \in \mathbb{R}^r$,即 $A_r^{-1}y_0 > 0$,且显然有 $y_0 \neq 0$.

令 $b_r - A_{n-r} x_{n-r} = y_0$,则 $b_r = y_0 + A_{n-r} x_{n-r}$.取 $x_{n-r} = 0$,则 $b_r = y_0$;取 $x_r = A_r^{-1}y_0$,令 $x_0 = (x_r^T, x_{n-r}^T)^T \in \mathbb{R}^n$;取 $b_{m-r} = 0 \in \mathbb{R}^{m-r}$,令 $b_0 = (b_r^T, b_{m-r}^T)^T$.于是 $Ax = b_0$ 有解 $x_0 \geq 0$,且 $\|x_0\| > 0, \|b_0\| > 0$.取

$$x_1 = \frac{cx_0}{\max\{\|x_0\|, \|b_0\|\}}, \quad b = \frac{cb_0}{\max\{\|x_0\|, \|b_0\|\}}, \quad (7)$$

则因

$$Ax_1 = \frac{cAx_0}{\max \{ \|x_0\|, \|b_0\| \}} = \frac{cb_0}{\max \{ \|x_0\|, \|b_0\| \}} = b,$$

故式(5)有解 $x_1 \geq 0$ 且 $0 < \|x_1\| \leq c, \|b\| \leq c$. 特别地,若 $A \geq 0$,则因 $x_1 \geq 0$,故 $b = Ax_1 \geq 0$.

4 分层模糊系统的构造与逼近性能 (Construction and approximation of hierarchical fuzzy systems)

本节讨论以下问题:设 $g(x)$ 为紧集 $U = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n] \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数,其解析式未知,但任取 $x \in U$,可获取 $g(x)$ 的值.试构造一个分层模糊系统来逼近 $g(x)$.

为明了起见,设欲构造的分层模糊系统具有最优结构,构造方法如下:

步骤1 设计系统的结构.

令 x_i 的论域为 $[\alpha_i, \beta_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$. 在 $[\alpha_i, \beta_i]$ 上定义 m 个模糊集合: $A_i^1, \cdots, A_i^m$; A_i^j 的中心为 e_i^j ,且有 $\alpha_i = e_i^1 < e_i^2 < \cdots < e_i^m = \beta_i$; A_i^j 的隶属函数为 $\mu_{A_i^j}(x_i)$ 且满足 $\mu_{A_i^j}(e_i^j) \neq 0, j = 1, 2, \cdots, m; i = 1, 2, \cdots, n$.

类似地,对每个 y_i 在其论域上也定义 m 个模糊集合: $C_i^1, \cdots, C_i^m$, 其隶属函数为 $\mu_{C_i^j}(y_i), j = 1, 2, \cdots, m$. y_i 的论域的确定将在下一步予以说明.

在 $[0, 1]$ 上随机选取 m^2 个常数 $\bar{y}^{j_1 j_2}, j_1, j_2 = 1, 2, \cdots, m$. 将第1层模糊系统输出设计为

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = \frac{\sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \bar{y}^{j_1 j_2} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2)}{\sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2)} \quad (8)$$

因 $0 \leq \bar{y}^{j_1 j_2} \leq 1$, 故 $y_1 \in [0, 1]$. 记

$$f_1(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}) = z^{j_1 j_2}. \quad (9)$$

将第 $i (2 \leq i \leq n-1)$ 层模糊系统输出设计为

$$y_i = f_i(y_{i-1}, x_{i+1}) = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{j_{i+1}=1}^m h_{i+1}^{j_{i+1}, k}(y_{i-1}) \mu_{A_{i+1}^{j_{i+1}}}(x_{i+1}) \mu_{C_{i-1}^k}(y_{i-1})}{\sum_{k=1}^m \sum_{j_{i+1}=1}^m \mu_{A_{i+1}^{j_{i+1}}}(x_{i+1}) \mu_{C_{i-1}^k}(y_{i-1})} \quad (10)$$

其中 $h_{i+1}^{j_{i+1}, k}(y_{i-1}) = d_i^{0, j_{i+1}, k} + d_i^{1, j_{i+1}, k} y_{i-1} + \cdots + d_i^{m^{i-1}-1, j_{i+1}, k} y_{i-1}^{m^{i-1}-1}$.

步骤2 确定系统的参数.

对于 $i = 2, \cdots, n-2$, 由引理2知,存在 m^{i+1} 个非负数 $\bar{y}^{j_1 j_2 \cdots j_{i+1}}$ 使得由

$$\begin{cases} f_i(\bar{y}^{j_1 j_2 \cdots j_{i+1}}, e_{i+1}^{j_{i+1}}) = \bar{y}^{j_1 j_2 \cdots j_{i+1}}, \bar{y}^{j_1 j_2} \triangleq z^{j_1 j_2}, \\ j_1, j_2, \cdots, j_{i+1} = 1, 2, \cdots, m. \end{cases} \quad (11)$$

可确定出非负参数 $d_i^{s, j_{i+1}, k}, s = 0, 1, 2, \cdots, m^{i-1}-1; j_{i+1}, k = 1, 2, \cdots, m$, 且可使 $0 < \|d\| \leq \frac{1}{m^{i-1}}$, 其中 d 表示所有 $d_i^{s, j_{i+1}, k}$ 构成的列向量.

可以用数学归纳法证明:如上构造的分层模糊系统中间各层的输出 $y_i \in [0, 1], i = 1, 2, \cdots, n-2$. 事实上,由步骤1知, $k = 1$ 时结论成立,即 $y_1 \in [0, 1]$. 假设 $i = p-1 (3 \leq p \leq n-2)$ 时结论成立,即 $y_{p-1} \in [0, 1]$. 当 $i = p$ 时,由于

$$\begin{aligned} |h_{p+1}^{j_{p+1}, k}(y_{p-1})| &= \\ | (1, y_{p-1}, y_{p-1}^2, \cdots, y_{p-1}^{m^{p-1}-1}) \cdot \\ (d_p^{0, j_{p+1}, k}, d_p^{1, j_{p+1}, k}, \cdots, d_p^{(m^{p-1}-1), j_{p+1}, k})^T | &\leq \\ \| (1, y_{p-1}, y_{p-1}^2, \cdots, y_{p-1}^{m^{p-1}-1}) \| \cdot \\ \| (d_p^{0, j_{p+1}, k}, d_p^{1, j_{p+1}, k}, \cdots, d_p^{(m^{p-1}-1), j_{p+1}, k})^T \| &\leq \\ m^{p-1} \|d\| &\leq 1, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} |y_p| &\leq \\ \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{j_{p+1}=1}^m |h_{p+1}^{j_{p+1}, k}(y_{p-1})| \mu_{A_{p+1}^{j_{p+1}}}(x_{p+1}) \mu_{C_{p-1}^k}(y_{p-1})}{\sum_{k=1}^m \sum_{j_{p+1}=1}^m \mu_{A_{p+1}^{j_{p+1}}}(x_{p+1}) \mu_{C_{p-1}^k}(y_{p-1})} &\leq 1. \end{aligned}$$

注意到 $h_{p+1}^{j_{p+1}, k}(y_{p-1}) \geq 0$, 故 $y_p \in [0, 1]$. 根据数学归纳法,上述结论成立.

而对于 $i = n-1$, 考虑如下方程

$$f_{n-1}(\bar{y}^{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}, e_n^{j_n}) = g(e_1^{j_1}, \cdots, e_n^{j_n}). \quad (12)$$

对于 $j_1, j_2, \cdots, j_n = 1, 2, \cdots, m$, 式(12)构成 m^n 个线性方程,将它们写成矩阵方程

$$Ad = b. \quad (13)$$

若 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, b)$, 则可解得 d . 否则, $\text{rank}(A) < \text{rank}(A, b)$, 设 $\text{rank}(A) = r$, 则 $\text{rank}(A, b) = r+1$, 不妨设 A 的 r 阶非零子式 A_r 位于 A 的左上角, (A, b) 的 $r+1$ 阶非零子式位于 (A, b) 的前 $r+1$ 行, 对 A 作如下分块:

$$A = \begin{pmatrix} A_r & A_1 \\ a_r & a_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}.$$

其中 $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (m-r)}$, $a_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$, $a_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (m-r)}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{(m-r-1) \times r}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(m-r-1) \times (m-r)}$.

对于 b 的第 $r+1$ 个元 $g(e_1^{j_1}, \dots, e_n^{j_n})$, 存在 k_s , 使得 $\mu_{C_{n-2}}^{j_{n-2}}(\bar{y}_{n-2}^{j_1, \dots, j_{n-1}}) \neq 0$, 于是

$$C \triangleq \mu_{A_n}^{j_n}(e_n^{j_n}) \mu_{C_{n-2}}^{j_{n-2}}(\bar{y}_{n-2}^{j_1, \dots, j_{n-1}}) \neq 0.$$

以

$$\begin{cases} p(\bar{y}_{n-2}^{j_1, \dots, j_{n-1}}, e_n^{j_n}) = 0, & \text{当某一 } j_k \neq j_{k_s} (k=1, 2, \\ & \dots, n-1) \text{ 或 } j_n \neq j_{n_s} \text{ 时,} \\ p(\bar{y}_{n-2}^{j_1, \dots, j_{n-1}}, e_n^{j_n}) = 1, & \text{否则} \end{cases}$$

为插值条件, 作 Lagrange 插值多项式 $p(y_{n-2}, x_n)$, 将 $h_{n-1}^{j_{n-1}, k}(y_{n-2})$ 修正为

$$\begin{aligned} H_{n-1}^{j_{n-1}, k}(y_{n-2}, x_n) = \\ h_{n-1}^{j_{n-1}, k}(y_{n-2}) + d_{n-1}^{m-2, j_{n-1}, k} p(y_{n-2}, x_n). \end{aligned}$$

其中 $j_n \neq j_{n_s}$ 或 $k \neq k_s$ 时, $d_{n-1}^{m-2, j_{n-1}, k} = 0$. 记

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_r & A_1 & 0 \\ a_r & a_1 & C \\ A_2 & A_3 & 0 \end{pmatrix},$$

于是方程(13)成为

$$\bar{A} \bar{d} = b. \quad (14)$$

取 $\bar{A}$ 的子阵

$$B = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ a_r & C \end{pmatrix},$$

则 $|B| = C|A_r| \neq 0$, 因 $\text{rank}(A) = r$, 故 $\text{rank}(\bar{A}) = \text{rank}(B) = \text{rank}(\bar{A}, b)$, 于是方程(14)有解, 解之便得诸 $d_{n-1}^{j_{n-1}, k}$.

如上构造的分层模糊系统总的输出为

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = \\ f_{n-1}(f_{n-2}(\dots f_2(f_1(x_1, x_2), x_3), \dots), x_n). \end{aligned} \quad (15)$$

定理 1 设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为分层模糊系统(15), 其隶属函数均连续且(分段)光滑, $g(x_1, \dots, x_n)$ 为紧集 $U = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ 上的连续可微函数且其偏导数连续, 记 $b_i = \max_{1 \leq j \leq m-1} \{e_i^{j+1} - e_i^j\}$, 则

$$\|g - f\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \left(\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right) b_i. \quad (16)$$

其中 U 上的函数 $d(x)$ 的无穷范数 $\|d(x)\|_{\infty} \triangleq \sup_{x \in U} |d(x)|$.

证 由式(9), (11), (12), (15)易见

$$f(e_1^{j_1}, \dots, e_n^{j_n}) = g(e_1^{j_1}, \dots, e_n^{j_n}). \quad (17)$$

令 $U^{j_1, j_2, \dots, j_n} = [e_1^{j_1}, e_1^{j_1+1}] \times \dots \times [e_n^{j_n}, e_n^{j_n+1}]$, $j_1, \dots, j_n = 1, 2, \dots, m-1$, 则

$$U = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n] = \bigcup_{j_1=1}^{m-1} \dots \bigcup_{j_n=1}^{m-1} U^{j_1, \dots, j_n}.$$

于是对任意的 $x \in U$, 存在 $j_{1x}, \dots, j_{nx} \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, 使得 $x \in U^{j_{1x}, \dots, j_{nx}}$. 令 $e^x = (e_1^{j_{1x}}, \dots, e_n^{j_{nx}})$, 由多元函数的微分中值定理得

$$|g(x) - f(x)| \leq$$

$$|g(x) - g(e^x)| + |f(x) - f(e^x)| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{\infty} |x_i - e_i^{j_{ix}}| + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} |x_i - e_i^{j_{ix}}| \right).$$

由假设知 $\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$ 为有限数, 且不难知 $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$

也为有限数. 因 $x \in U^{j_{1x}, \dots, j_{nx}}$, 故 $|x_i - e_i^{j_{ix}}| \leq b_i$, 于是

$$|g - f| \leq \sum_{i=1}^n \left(\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right) b_i,$$

所以式(16)成立.

注 上述定理中要求分层模糊系统所采用的隶属函数均连续且(分段)光滑, 这个条件并非苛刻, 常用的隶属函数均满足此条件. 例如: 三角形、梯形、Gauss 型、三次样条形隶属函数均满足此条件.

由式(16)可知, 任取 $\epsilon > 0$, 当 $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 充分小时, 便有

$$\|f - g\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

于是有如下结论:

定理 2 (逼近定理) 设 $g(x_1, \dots, x_n)$ 为紧集 $U = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ 上的连续可微函数且其偏导数连续, 则任取 $\epsilon > 0$, 存在形如式(15)的分层模糊系统 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得

$$\|f - g\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

其中模糊系统的隶属函数均连续且(分段)光滑.

定理 3 (逼近定理) 设 $g(x_1, \dots, x_n)$ 为紧集 $U = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ 上的连续函数, 则任取 $\epsilon > 0$, 存在形如式(15)的分层模糊系统 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使

$$\|f - g\|_{\infty} < \epsilon.$$

证 由 Weierstrass 逼近定理知, 任取 $\epsilon > 0$, 存在 U 上的 n 元多项式函数 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得

$$\|P(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)\| < \epsilon/2.$$

显然多项式函数 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足定理 2 的条件, 故由定理 2 知, 存在形如式(15)的分层模糊系统 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得

$$\|f - P\|_{\infty} \leq \epsilon/2,$$

于是

$$\|f - g\|_{\infty} \leq \|f - P + P - g\|_{\infty} \leq$$

$$\|f - P\|_{\infty} + \|P - g\|_{\infty} < \epsilon,$$

故结论成立.

5 仿真(Simulation)

考虑如下的三阶系统^[2]

$$y(k+1) = g(y(k), y(k-1), y(k-2)) + u(k).$$

其中 $u(k) = \sin(2\pi k/25)$, 非线性项

$$g(y(k), y(k-1), y(k-2)) = \frac{y(k)y(k-1)[y(k)+2.5]}{1+y^2(k)+y^2(k-1)+y^2(k-2)}.$$

假设 $g(y(k), y(k-1), y(k-2))$ 是未知的, 现在的任务是设计一个两层模糊系统 $f(y(k), y(k-1), y(k-2))$ 来逼近 $g(y(k), y(k-1), y(k-2))$. 为此采用串行-并行模型

$$\hat{y}(k+1) = f(y(k), y(k-1), y(k-2)) + u(k)$$

和 BP 算法调节分层模糊系统的参数, 使得跟踪误差 $y(k+1) - \hat{y}(k+1)$ 最小. 将第 1 层的输入取为 $y(k), y(k-1)$, 设其输出为 y_1 , 第 2 层的输入则为 $y_1, y(k-2)$. 在 $y(k), y(k-1), y(k-2)$ 的论域 $[-1, 3]$ 上均定义 11 个模糊集合, 其隶属函数分别为

$$\mu_{A_i}^k(x_i) = \exp[-6(x_i - 1 + 0.4j)^2],$$

$$j = 0, 1, \dots, 10, i = 1, 2, 3.$$

由上节可知 y_1 的论域可取为 $[0, 1]$, 在其上定义 6 个模糊集合, 其隶属函数分别为

$$\mu_B^i(y_1) = \exp[-20(y_1 - 0.2(i-1))^2],$$

$$i = 1, 2, \dots, 6.$$

调参率均取为 0.1, 仿真结果见图 2(实线为系统 $y(k)$ 的输出, 虚线为辨识模型 $\hat{y}(k)$ 的输出).

由图 2 知, 分层模糊系统确实具有较好的逼近特性, 这里, 两层模糊系统中总的模糊规则数目为 187, 若采用传统模糊系统则需 1331 条模糊规则.

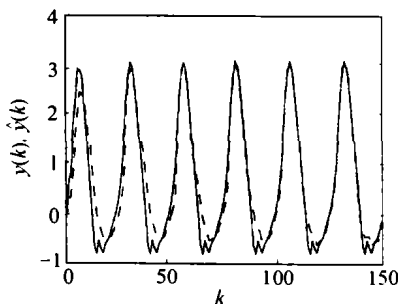


图 2 仿真结果

Fig. 2 The simulation result

6 结论(Conclusion)

首先证明了对给定的矩阵可以此为系数矩阵构造一个具有非负解的线性方程组, 使其常数项和其解均位于预先指定的原点的邻域内. 在此基础上构造性地证明了任意形式隶属函数的分层模糊系统对紧集上连续可微函数的逼近性质, 进而借助 Weierstrass 逼近定理证明了分层模糊系统对紧集上连续函数的逼近性能, 仿真结果验证了理论的正确性.

本文的结果为一般分层模糊系统的应用提供了理论依据. 对一类非线性不确定系统, 本文已利用具有 Gauss 型隶属函数的分层模糊系统设计了直接与间接自适应模糊控制器, 有关结果将另文发表.

参考文献(References):

- [1] WANG Lixin. Stable adaptive control of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1993, 1(2): 146 - 155.
- [2] 王立新. 自适应模糊系统与控制——设计与稳定性分析 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995: 120 - 180.
(WANG Lixin. *Adaptive Fuzzy Systems and Control - Design and Stability Analysis* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1995: 120 - 180.)
- [3] RAJU G V S, ZHOU Jun, KISNER R A. Hierarchical fuzzy control [J]. *Int J Control*, 1991, 54(5): 1201 - 1216.
- [4] WANG Lixin. Universal approximator by hierarchical fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 93(2): 223 - 230.
- [5] WANG Lixin. Analysis and design of hierarchical fuzzy systems [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1999, 7(5): 617 - 624.
- [6] WEI Chen, WANG Lixin. A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems [J]. *Information Sciences*, 2000, 123(3/4): 241 - 248.
- [7] FAN Ky. On systems of linear inequalities [A]. *Linear Inequalities and Related Systems* [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1956: 100 - 101.

作者简介:

孙多青 (1962—), 男, 1984年毕业于河北师范学院数学系并获学士学位, 1998年毕业于北京航空航天大学应用数学系并获硕士学位, 现为北京航空航天大学博士研究生, 河北职业技术师范学院副教授. 主要研究方向: 智能控制, 数学规划等. E-mail: sun_dq@163.com;

霍伟 (1951—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性动力学系统控制, 智能控制等方面的研究. E-mail: whuo@163.net.