

## 磁浮列车的非线性控制问题研究

龙志强, 洪华杰, 周晓兵

(国防科学技术大学 磁悬浮技术研究中心, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 建立了磁浮列车悬浮系统模型, 针对模型的非线性问题, 利用反馈线性化技术, 将系统的输入-状态线性化, 设计出一个 P 控制器和一个非线性补偿器, 得到了良好的仿真结果. 在此基础上, 进行了数字控制实验, 比较了仿真和实验结果. 实验表明反馈线性化技术可以解决磁浮列车非线性模型的控制问题.

**关键词:** 磁悬浮列车; 反馈线性化; 非线性控制

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Research of nonlinear control for maglev train

LONG Zhi-qiang, HONG Hua-jie, ZHOU Xiao-bing

(Engineering Research Center of Maglev, National University of Defence Technology, Hunan Changsha 410073, China)

**Abstract:** The model of maglev train suspension system is established. For the nonlinearization of the model, feedback linearization techniques are applied. A simple P-controller and a nonlinear compensator are designed after the input-status linearization of the system is achieved. The simulation result is derived, based on which, a digital experiment is performed. A comparison is made between the simulation results and experiment results, the latter of which shows the feedback linearization techniques can resolve the control problem of maglev train's nonlinear model.

**Key words:** maglev train; feedback linearization; nonlinear control

### 1 前言 (Introduction)

磁悬浮列车是利用电磁力将车体以给定间隙悬浮于轨道上无摩擦运行的新型交通工具, 是典型的非线性系统. 传统的磁悬浮控制器的设计是建立在将该非线性系统在平衡点附近进行局部线性化, 因此, 控制器设计与平衡点的选取有关. 当要求悬浮系统在一个大的间隙范围内稳定工作时, 由于系统中存在的非线性得不到适当的补偿, 使得线性控制器很可能性能低下或者产生不稳定, 给控制器设计带来了困难. 解决这个问题一个有效途径就是应用反馈线性化技术对磁悬浮系统进行线性化处理.

反馈线性化技术是近年来发展起来的一种方法, 它与通常的线性化方法不同, 它利用代数变换将一个非线性系统的动态特性变换成线性的动态特性, 是一种全局线性化的方法, 从而简化控制器的设计, 而且控制器可以保证全局稳定. 反馈线性化技术有两种主要方法, 即输入-输出线性化和输入-状态线性化. 本文主要讨论输入-状态线性化技术在磁浮列车悬浮控制系统设计上的应用.

### 2 磁悬浮动态特性的输入-状态线性化 (The input-state linearization of maglev dynamic characteristic)

#### 2.1 输入-状态线性化理论基础 (The theory foundation of input-state linearization)

考虑 SISO 系统中控制器的设计问题, 输入状态线性化方法的主要思想是首先找到一个状态变换  $z = z(x)$  与一个输入变换  $u = u(x, v)$ , 使非线性系统的动态方程化成一个等效的线性定常系统的动态方程, 并表示成  $\dot{z} = Az + bu$  形式; 其次, 再利用标准的线性控制方法设计控制输入.

首先给出两个数学定义<sup>[1,2]</sup>.

**定义 1** 令  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为一个平滑的标量函数,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $\mathbb{R}^n$  上的一个平滑的矢量场, 则  $h$  对  $f$  的李函数是一个定义为  $L_f h = \Delta h f$  的标量函数. 其中  $\Delta h$  为梯度.

**定义 2** 令  $f$  与  $g$  为  $\mathbb{R}^n$  上的两个矢量场,  $f$  与  $g$  的李括号是第 3 个矢量场, 定义为  $[f, g] = \Delta g f - \Delta f g$ , 李括号通常写为  $ad_f g$ , 并且可以递归的定义为  $ad_f^j g = [f, ad_f^{j-1} g]$ .

输入-状态线性化的严格定义如下<sup>[1]</sup>:

对于一类仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1)$$

其中  $g(x)$  与  $f(x)$  为  $\mathbb{R}^n$  上的平滑矢量场, 如果在  $\mathbb{R}^n$  中存在一个区域  $\Omega$ , 一个微分同胚  $\Phi$ , 以及一个反馈控制律

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

得新的状态变量  $z = \Phi(x)$  和新的输入  $v$  满足线性定常关系

$$\dot{z} = Az + bv.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

则该系统是输入状态线性化的。

对于式(1)表示的状态方程能否进行输入-状态线性化问题, 反馈线性化理论给出了一个定理, 即必须满足两个条件: 条件 1 就是非线性系统的能控性条件, 条件 2 称为对合性条件. 若两个条件都满足, 则从下述方程求出第一个状态  $z_1$ :

$$\Delta z_1 ad_f^i g = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad \Delta z_1 ad_f^{n-1} g \neq 0.$$

然后进行状态变换  $z(x) = [z_1 \quad L_f z_1 \quad \cdots \quad L_f^{n-1} z_1]^T$  与输入变换  $u = \alpha(x) + \beta(x) \cdot v$ . 其中

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1}, \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1}.$$

### 2.2 磁悬浮系统的动态模型(The dynamic model of maglev system)

本文以小型磁浮列车的一个电磁铁为例建立其非线性的动力学模型, 其单电磁铁结构示意图如图 1 所示<sup>[3]</sup>.

首先可以由图得到力学方程

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F(i, s) + M_g + f_d(t). \quad (3)$$

其中电磁吸力

$$F(i, s) = -\frac{dW}{dt} = -\frac{\mu_0 N^2 A}{4} \left[ \frac{i(t)}{s(t)} \right]^2. \quad (4)$$

其次, 可以得到电学方程

$$u(t) = Ri(t) + \frac{d}{dt} [L(i, s)i(t)] = Ri(t) + \frac{\mu_0 N^2 A}{2s(t)} i(t) - \frac{\mu_0 N^2 A i(t)}{2s^2(t)} s(t). \quad (5)$$

所以其动力学模型可用以下方程表示:

$$\begin{cases} -\frac{\mu_0 N^2 A}{4} \left[ \frac{i(t)}{s(t)} \right]^2 + M_g + f_d(t) = Ms(t), \\ u(t) = Ri(t) + \frac{\mu_0 N^2 A}{4} \frac{d}{dt} \left[ \frac{i(t)}{s(t)} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  为空气中的磁导率;  $i$  为线圈电流;  $f_d$  为干扰力,  $M$  为悬浮体质量;  $N$  为线圈匝数;  $A$  为一个气隙的面积;  $R$  为线圈的电阻;  $s$  为气隙.

取状态变量

$$x_1(t) = s(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad x_3(t) = i(t),$$

则可用状态方程表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{C}{M} \left[ \frac{x_3}{x_1} \right]^2 + g - \frac{f_d}{M}, \\ \dot{x}_3 = \frac{x_3 x_2}{x_1} - \frac{R x_1 x_3}{2C} + \frac{x_1 u}{2C}. \end{cases} \quad (7)$$

其中  $C = \frac{\mu_0 N^2 A}{4}$ .

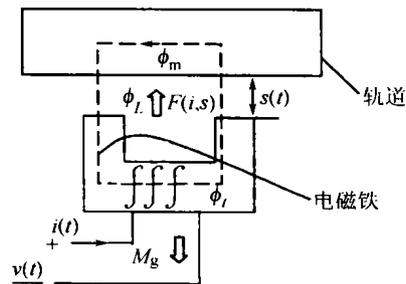


图 1 单电磁铁结构

Fig. 1 The structure of single electric magnet

### 2.3 磁悬浮列车的输入状态线性化(The input-state linearization of maglev train)

令

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{C}{M} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 + g - \frac{f_d}{M} \\ \frac{x_3 x_2}{x_1} - \frac{R x_1 x_3}{2C} \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x_1}{2C} \end{bmatrix},$$

其能控阵

$$C = [g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{x_3}{M x_1} \\ 0 & \frac{x_3}{M x_1} & 0 \\ \frac{x_1}{2C} & \frac{x_1^2 R}{4C^2} & -\frac{x_3^2}{M x_1} + \frac{x_1^3 R^2}{8C^3} + \frac{x_1 x_2 R}{4C^2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$M, C$  为系统参数, 满足  $0 < M, C < \infty$ , 当  $x_1, x_3$  不为零的时候, 其秩为 3, 系统可控, 满足条件 1; 同时  $\{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$  构成一个对合集, 满足条件 2, 所以在工作状态下, 系统是可输入状态线性化的. 由对合性条件, 可以找到一组新状态向量  $z, z_1$  满足两个条件

$$\Delta z_1 ad_f^i g = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad \Delta z_1 ad_f^{n-1} g \neq 0.$$

取  $z_1(x) = x_1$  (一个最简单解) 满足上述条件, 然后进行状态变换  $z(x) = [z_1 \quad L_f z_1 \quad \dots \quad L_f^{n-1} z_1]^T$  与输入变换  $u = \alpha(x) + \beta(x) \cdot v$ , 则依次可以求出

$$z_2(x) = L_f z_1 = x_2,$$

$$z_3(x) = L_f z_2 = -\frac{C}{M} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 + g.$$

同时可以求出

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^3 z_1}{L_g L_f^2 z_1} = Ri,$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^2 z_1} = -\frac{Mx_1}{x_3},$$

则 
$$u = -\frac{Mx_1}{x_3} v + x_3 \cdot R.$$

在新的状态向量  $z$  和新的输入  $v$  的作用下, 系统可由下面一组线性微分方程表示

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = v. \end{cases} \quad (9)$$

其中  $z_1$  表示位移,  $z_2$  表示速度,  $z_3$  表示加速度,  $v$  是状态  $z_3$  的微分, 可以认为  $v$  是加速度斜率的设定值. 这个系统传递函数为  $1/s^3$ , 其线性控制器不易设计, 再引入一个新的输入  $v_0$ , 令  $v = -\beta_1 z_3 - \beta_2 z_2 - \beta_3 z_1 + v_0$ , 则在  $v_0$  的作用下, 系统变换为一个典型的三阶系统.

### 3 控制系统的设计及实现 (The design and realize of control system)

#### 3.1 线性补偿器的设计 (The design of linear compensator)

控制系统的结构框图如图 2, 其中

$$v = -\beta_1 z_3 - \beta_2 z_2 - \beta_3 z_1 + v_0.$$

在新的输入  $v_0$  的作用下, 通过非线性补偿器的作用使系统变换为 3 阶线性系统  $\frac{1}{s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + 1}$ , 非线性补偿器并不能使系统稳定, 因此在非线性补偿器之前加了线性补偿器. 补偿器包含了两个部分: 线性补偿器和非线性补偿器. 非线性补偿器使得驱动电压  $u$  是  $x_1, x_2, x_3, v_0$  和  $x_3$  的函数, 线性补偿器使得

$v$  是位移误差的线性函数, 保证系统具有良好的稳定性和抗干扰能力. 补偿器线性部分和非线性部分通过信号  $v$  连接.

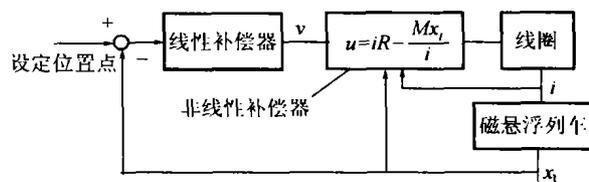


图 2 控制系统原理框图

Fig. 2 The theory chart of control system

通过补偿器两个部分的共同作用, 使得稳定的闭环系统的动态特性与平衡点无关, 这也是采用非线性补偿的主要优点.

线性补偿器考虑采用  $P$  控制器, 则控制电压 (假设干扰力为零)

$$u = R x_3 + \frac{Mx_1}{x_3} (\beta_1 \dot{x}_2 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 - k(x_r - x_1)).$$

其中  $x_r$  为给定间隙值.

适当选取  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, k$ , 使系统满足要求的动态性能.

#### 3.2 控制系统的仿真 (The simulation of control system)

国防科学技术大学 KD 系列小型磁悬浮样车有以下参数:  $R = 6.32 \Omega, N = 700, A = 0.0014 \text{ m}^2, M = 100 \text{ kg}$ . 将上述参数代入非线性模型, 为使系统无超调, 选择  $\beta_1 = 60, \beta_2 = 1200, \beta_3 = 0, k = 8000$ . 系统闭环极点在  $-20 \pm 0j$ , 进行非线性仿真, 仿真中采用 1 kHz 的采样频率, 平衡点设定在 4 mm, 初始位移设定在 12 mm, 仿真结果如图 3 所示. 可见系统的动态性能良好, 上升时间快, 而且无超调.

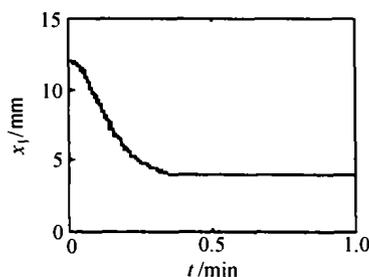


图 3 仿真位移响应曲线

Fig. 3 The displacement respond curve of simulation

#### 3.3 控制系统的实现 (The realization of control system)

控制系统采用数字控制系统, 整个闭环系统包括一台 PC 机, 一块 A/D, D/A 接口板和功率放大器. 接口板主要用于数据采集和控制量的输出, 计算

机用于算法实现和结果显示,功放采用 PWN 功率放大器,开关管采用功率 MOSFET 管,开关频率为 20 kHz.此外,还包括一个涡流位移传感器,其增益  $k_p = 1000 \text{ V/m}$ ,一个 10 A 的电流互感器.数据采集采用中断方式,利用机内硬件定时器定时,采样频率 1 kHz,系统初始位移 12 mm.线性补偿器参数设置为  $\beta_1 = 60, \beta_2 = 1200, \beta_3 = 0$ ,P 调节器的系数  $k$  经过在线调试,取 7.由结果可知系统上升时间快,有 10%左右的超调.实验结果如图 4 所示.

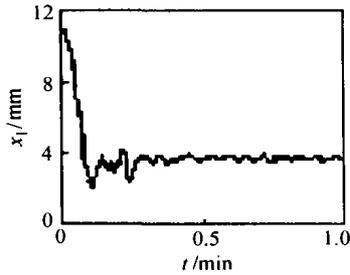


图 4 位移实验响应曲线

Fig. 4 The displacement respond curve of experiment

#### 4 结论(Conclusion)

非线性补偿器的引入使得控制器设计简单,控制系统从设计到调试非常清晰,通过在线闭环实验,证明这种方法是成功的.说明反馈线性化技术可以应用于磁悬浮列车系统,能够比较简单地设计出保证大范围稳定的控制器.

但是这种方法纯粹是基于模型的非线性控制方法,其控制律是根据物理系统的标称模型来进行设计的,不是一种鲁棒控制器.尽管磁悬浮系统可以建立

数学模型,但仍然可能是不太准确的.特别是当全状态不能测量的情况下,应用仍有局限,由于本实验只有位置传感器,速度和加速度通过微分得到,尽管采用了滤波,但仍然引进了噪声干扰.由结果可以看到,系统位移响应存在微小的抖动,可以考虑采用加速度计反馈解决这个问题.

#### 参考文献(References):

- [1] SLOTTING J J E, 李卫平.应用非线性控制[M].北京:国防工业出版社,1992.  
(SLOTTING J J E, LI Weiping. *Applied Non-linear Control* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1992.)
- [2] SONTAG E D, WANG Y. On characterization of input-to-state stability [J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 24(5): 351 - 359.
- [3] 龙志强,周晓兵.永磁式磁悬浮列车系统研究[J].机车电传动, 1996, 36(3): 8 - 11.  
(LONG Zhiqiang, ZHOU Xiaobing. The research of maglev train system of permanent magnet [J]. *Electric Drive for Locomotives*, 1996, 36 (3): 8 - 11.)

#### 作者简介:

龙志强 (1967—),男,国防科技大学磁悬浮技术研究中心副教授.主要研究方向:磁悬浮控制,计算机控制,列车运行控制等.  
E-mail: zhqiong@263.net;

洪华杰 (1976—),男,国防科技大学在读博士生.课题的主要研究方向是磁悬浮列车技术. E-mail: hong1976\_cn@sina.com;

周晓兵 (1970—),男,国防科技大学在读硕士.课题研究方向为磁悬浮列车技术. E-mail: xbzhou@sina.com.