

非线性 DEDS 的标准结构

陶跃钢, 陈文德

(中国科学院 数学与系统科学研究院 系统科学研究所, 北京 100080)

摘要: 非线性 DEDS 是指由极大极小函数描述的系统, 常见于计算机科学、控制论、运筹学等领域. 考虑非自治非线性 DEDS 的结构问题, 通过引入白色图和凝白色图, 得到了系统能达和能观的两个充要条件以及系统的标准结构, 同时还给出了它们的矩阵表示.

关键词: 非线性 DEDS; 白色图; 标准结构; 能达能观性

中图分类号: O231, N941 **文献标识码:** A

Canonical structure of nonlinear discrete event dynamic systems

TAO Yue-gang, CHEN Wen-de

(Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The nonlinear discrete event dynamic systems (DEDS) are the systems described by min-max functions, and commonly exist in computer science, control theory, operations research, etc. Structure problems of nonautonomous and nonlinear discrete event dynamic systems are considered, and some new results which lay some foundations of control theory of nonlinear discrete event dynamic systems are described. By constructing the white graph and white condensation, the canonical structure and two necessary and sufficient conditions for reachability and observability are obtained, and their matrix representations are given.

Key words: nonlinear discrete event dynamic systems; white graph; canonical structure; reachability and observability

1 引言(Introduction)

在 20 世纪 90 年代, 由极大极小函数描述的自治非线性 DEDS 引起了不少研究者的极大兴趣. Olsder 得到了一类自治非线性 DEDS 存在不动点的充要条件^[1], Gunawardena 给出了自治非线性 DEDS 的矩阵表示的对偶规范式^[2], 并与 Gaubert 证明了关于周期时间的存在性及算法的对偶定理^[3]. 文献[4]提出了非自治非线性 DEDS

$$\begin{aligned}x(k+1) &= F(x(k)) \vee Bu(k), \\y(k) &= Cx(k).\end{aligned}$$

其中极大极小函数 $F(x) = \bigwedge_{l \in I} A_l x$, $A_l \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{D}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{D}^{p \times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^q$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$. 此系统记为 (F, B, C) , 也简记为 S . 文献[4~8]研究了系统 (F, B, C) 的能达性、能观性和周期时间配置等问题. 本文考虑系统 (F, B, C) 的结构问题. 通过引入白色图和凝白色图概念, 得到了系统能达和能观的两个充要条件以及系统的标准结

构, 并给出了它们的矩阵表示.

2 全色强连通图(Totally colourful and strongly connected digraph)

定义 1^[7] 对于极大极小函数 $F(x) = \bigwedge_{l \in I} A_l x$, 记 A_l 的第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij}(l)$. $F(x)$ 唯一地对应一个图, 称为 $F(x)$ 的着色有向图, 记为 $G(F)$: 顶点集为 $\{1, 2, \dots, n\}$, 规定点 i 和点 j 之间的有向弧为: 当 $a_{ij}(l) \neq -\infty$ 时, j 到 i 有弧, 重为 $a_{ij}(l)$, 且着第 l 种颜色; 当 $a_{ij}(l) = -\infty$ 时, j 到 i 没有第 l 种颜色的弧.

设 i 和 j 是图 $G(F)$ 中的两点. 若从 i 到 j 的每一种颜色的路都存在, 则 j 称为从 i 全色可达的. 若 i 和 j 相互全色可达, 则称 i 和 j 之间是全色强连通的. 若再规定 i 与 i 是全色强连通的, 则易验证, 如此建立的全色强连通关系是图 $G(F)$ 的顶点集上的一个等价关系. 这个等价关系将顶点集划分为若干等价类: $U_1, U_2, \dots, U_w$.

值得注意的是,当 j 是从 i 全色可达的点时,从 i 到 j 的第 l 种颜色的路可能不止一条.为本文研究的目的,约定:当从 i 到 j 的第 l 种颜色的路有多条时,取一权重最大者.

定义2 以 $\{1, 2, \dots, n\}$ 为顶点集,规定:当 j 为 $G(F)$ 中从点 i 全色可达的点时, i 到 j 有白色弧,权重为各种颜色的路的权重之和;否则,无弧.这个赋权有向图称为 $F(x)$ 的白色图,记为 $G_0(F)$.

白色弧的权重可有多种定义方法.

定义3 在 $G_0(F)$ 中,点集 U_i 的导出子图按单色图的强连通关系构成 $G_0(F)$ 的一个极大强连通子图,称为 $G_0(F)$ 的一个强连分支,记为 X_i .视 $\{X_1, X_2, \dots, X_\omega\}$ 为 ω 个顶点集,规定: X_i 中某点到 X_j 中某点有一条白色弧时, X_i 到 X_j 有一条白色弧,权重为原白色弧的权重;否则,无弧.此图称为 $F(x)$ 的凝白色(有向)图,记为 $G_0^*(F)$.

凝白色图与文献[8]的凝着色图有所不同.特别地, $G(F)$ 中任何两点都是全色强连通时, $G_0(F)$ 的强连分支只有一个,因而 $G_0^*(F)$ 只含一个点.一般情况下, $G_0(F)$ 的强连分支不止一个,利用有向图的DFS算法和组合优化方法可以找出 $G_0(F)$ 的全部强连分支.

3 能达能观与标准结构(Reachability-observability and canonical structure)

假设 $U = \{u_r: 1 \leq r \leq q\}$ 和 $Y = \{y_s: 1 \leq s \leq p\}$ 分别是系统 (F, B, C) 的输入和输出分量的集合.在极大极小函数 $F(x)$ 的着色图 $G(F)$ 中添加 $q + p$ 个点 $u_1, \dots, u_q, y_1, \dots, y_p$.当 B 的第 i 行第 j 列元 $b_{ij} \neq -\infty$ 时,规定点 u_j 到点 i 有弧,重为 b_{ij} ;否则,无弧.当 C 的第 i 行第 j 列元 $c_{ij} \neq -\infty$ 时,规定 j 到 y_i 有弧,重为 c_{ij} ;否则,无弧.这些弧均着白色.此图称为系统 S 的图,简记为 $G(S)$.在考虑系统的输入和输出分量对子系统的作用时, $G(S)$ 的白色弧可看作任何颜色的弧.

定义4 视 U 和 Y 为点添加于 $G_0^*(F)$.规定:当集 U 的点到 X_i 的点在 $G(S)$ 中有各种颜色的路时,点 U 到点 X_i 有白色弧,否则,无弧;当 X_i 的点到集 Y 的点在 $G(S)$ 中有各种颜色的路时,点 X_i 到点 Y 有白色弧,否则,无弧.此图称为系统 (F, B, C) 的强凝白色图,记为 $G_0^*(S)$.

对于系统 (F, B, C) ,文献[4]提出的能达性和

能观性是相对于 (F, B, C) 的全部子系统而言,即 x_i 是 (F, B, C) 的能达(能观)状态分量当且仅当 x_i 是系统 (F, B, C) 的每个子系统 (A_i, B, C) 的能达(能观)状态分量.系统 (A_i, B, C) 是线性的,其能达性和能观性基于系统的连通性.于是在着色图 $G(S)$ 上看, x_i 是能达状态分量当且仅当 U 的点到点 x_i 的各种颜色的路存在, x_i 是能观状态分量当且仅当点 x_i 到 Y 的点的各种颜色的路存在.系统 (F, B, C) 能达(能观)是指每个状态分量能达(能观).如果 X_i 有除自回路上以外的进或出白色弧,则称点 X_i 有进或出白色弧.

定理1 在 $\{X_1, X_2, \dots, X_\omega\}$ 中,无进白色弧的点记为 X_r ,无出白色弧的点记为 X_s .

i) 系统 (F, B, C) 能达的充分必要条件是对于所有 X_r 有白色弧 UX_r .

ii) 系统 (F, B, C) 能观的充分必要条件是对于所有 X_s 有白色弧 X_sY .

证 i) 和 ii) 的证法是类似的,以下仅证后者.

充分性. 如果所有 X_i 全部无出白色弧,那么依条件知对所有 X_i 有白色弧 X_iY .如果 X_i 有出白色弧,则由强凝白色图 $G_0^*(S)$ 无回路知必有白色路 $X_iX_{j_1} \dots X_{j_t}$ 存在,而 X_{j_t} 无出白色弧.由条件知有白色弧 $X_{j_t}Y$,从而有白色路 $X_iX_{j_1} \dots X_{j_t}Y$.无论哪种情况,对每个 X_i ,在 $G(S)$ 中都有从 X_i 的点到 Y 的点的各种颜色的路,所以系统 (F, B, C) 能观.

必要性. 对任意无出白色弧的点 X_{s_0} ,必有白色弧 $X_{s_0}Y$.否则,至少存在一种颜色 l_0 , X_i 的任何点到 Y 的点没有 l_0 种颜色的路.从而 X_{s_0} 不能观.矛盾.

引理1 在 $G_0^*(F)$ 中,存在 X_i 的下标 t 的一个编号次序,使得不存在白色弧 X_tX_s ,其中 $1 \leq s < t \leq \omega$.

证 因为 $G_0(F)$ 的强连分支之间无回路,所以适合条件的编号次序存在.

定义5 在 $G_0^*(F)$ 中,若点列 $X_1, X_2, \dots, X_\omega$ 满足条件:当 $1 \leq s < t \leq \omega$ 时,不存在白色弧 X_tX_s ,则此点列称为 $F(x)$ 的一个标准序.同时对 u_r, y_s 分别做次序变动并对下标重新编号,由此而得的 X_i, u_r, y_s 的一个序列称为系统 (F, B, C) 的一个标准序.

定理2 标准序 $X_1, X_2, \dots, X_\omega$ 可以经有限次置换分为4部分: $X_I, X_{II}, X_{III}, X_{IV}$,它们依次是能观不能达、能观能达、不能观不能达、不能观能达的点

集,且按此次序合并后所得点列仍为 $F(x)$ 的一个标准序.

证 首先,在点列 $X_1, X_2, \dots, X_\omega$ 中,把能观点从左至右依次往左置换,但能观点之间不做置换,直到能观点与不能观点分为两部分;接着,在能观点中,把不能达点从左至右依次置换至左边,但不能达点之间不做置换,形成 X_I ,余下的点即为 X_{II} ;最后,在不能观点的点列中,把不能达点从左至右依次置换至左边,但不能达点之间不做置换,形成 X_{III} ,右边为 X_{IV} .

从上面的论证过程,并注意到不能观点到能观点无白色弧,能达点到不能达点无白色弧,可知每个部分内以及部分与部分之间,始终没有出现点之间从右至左的白色弧,因此 $X_I, X_{II}, X_{III}, X_{IV}$ 按此次序合并在一起所得的点列仍是 $F(x)$ 的一个标准序.

在定理2的证明中,对 $X_1, X_2, \dots, X_\omega$ 做置换的同时,对 u_r, y_s 也做相应的次序变动即得系统 (F, B, C) 相应于能达能观性的一个标准序.于是,有下面的

定义6 标准序 $X_I, X_{II}, X_{III}, X_{IV}$ 称为系统 (F, B, C) 的标准结构.

4 矩阵描述(Matrix description)

本节给出定理1和定理2的矩阵描述.白色图 $G_0(F)$ 的关联矩阵记为 A_0 .

引理2 在系统 (F, B, C) 的一个标准序下,系统 (F, B, C) 有关于全色连通性的下列矩阵形式

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \phi & \cdots & \phi \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_2 & \cdots & \phi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{\omega 1} & \tilde{A}_{\omega 2} & \cdots & \tilde{A}_\omega \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \vdots \\ \tilde{B}_\omega \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad \cdots \quad \tilde{C}_\omega].$$

其中 ϕ 是极大代数上的零矩阵.

证 由引理1的证明、图 $G_0(S)$ 的构造,并对状态、输入和输出向量做坐标变换即得.

相应于引理2所述的系统 (F, B, C) 的矩阵形式 $(\tilde{A}_0, \tilde{B}, \tilde{C})$,假定每个子系统的矩阵形式为 $(\tilde{A}_l, \tilde{B}_l, \tilde{C}_l)$. 设 $\tilde{A}_0$ 的子块 $\tilde{A}_l$ 对应的强连通支是 X_l ,记 $G(\tilde{A}_l)$ 中含 X_l 的点的强连通支为 $X_{r(l)}$, $\tilde{A}_l$ 中与之对应的子块为 $(\tilde{A}_l)_r$.

定理3 i) 系统 (F, B, C) 能达的充要条件:当存在 $l_0 \in I$ 使 $(\tilde{A}_{l_0})_r$ 是单块行时, $\tilde{B}_{r(l_0)} \neq \phi$.

ii) 系统 (F, B, C) 能观的充要条件:当存在 $l_0 \in I$ 使 $(\tilde{A}_{l_0})_s$ 是单块列时, $\tilde{C}_{s(l_0)} \neq \phi$.

证 ii)的证明类似于i),故略去ii)的证明而给出i)的证明.

$(\tilde{A}_l)_r$ 是单块行,当且仅当 $X_{r(l)}$ 无 l 色进弧. $\tilde{B}_{r(l)} \neq \phi$ 当且仅当有 U 的点到 $X_{r(l)}$ 的点的白色弧.由上述两点即知i)成立.

定理4 系统 (F, B, C) 的标准结构有如下的矩阵形式

$$\hat{A}_0 = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \phi & \phi & \phi \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \phi & \phi \\ \hat{A}_{31} & \phi & \hat{A}_{33} & \phi \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \phi \\ \hat{B}_2 \\ \phi \\ \hat{B}_4 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2 \quad \phi \quad \phi].$$

其中 ϕ 是极大代数上的零矩阵.

证 由定理2、图 $G_0(S)$ 的构造,并对状态、输入和输出向量做坐标变换即得.

用文献[6]的极小元矩阵 $A_{\min}$ 也可得到本节的部分结果,如文献[8]曾得到了与本文引理2对应的三角形矩阵.

参考文献(References):

- [1] OLSDER G J. Eigenvalues of dynamic max-min systems [J]. *Discrete Event Dynamic Systems*, 1991, 1(2): 177-207.
- [2] GUNAWARDENA J. Min-max functions [J]. *Discrete Event Dynamic Systems*, 1994, 4(3): 377-406.
- [3] GAUBERT S, GUNAWARDENA J. The duality theorem for min-max functions [J]. *Comptes Rendus Academy of Science*, 1998, 326(1): 43-48.
- [4] CHEN Wende. Cycle time assignment of nonlinear discrete event dynamic systems [J]. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 2000, 13(2): 213-218.
- [5] 陈文德. 非线性DEDS的能达性[J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(Suppl.): 67-72.
(CHENG Wende. Reachability of the nonlinear DEDS [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(Suppl.): 67-72.)
- [6] 陶跃钢, 陈文德. 非线性DEDS的能观性与极小元矩阵[J]. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(10): 53-57.
(TAO Yuegang, CHEN Wende. Minimal element matrix and observabilities of nonlinear DEDS [J]. *Systems Engineering-Theory and Practice*, 2000, 20(10): 53-57.)
- [7] CHEN Wende, TAO Yuegang. Observabilities and reachabilities of nonlinear DEDS and coloring graphs [J]. *Chinese Science Bulletin*,

2001,46(1):642-644.

- [8] 陈文德.非线性 DEDS 的周期时间配置与凝着色图[A].张嗣瀛主编.2001 中国控制与决策学术年会论文集[C].沈阳:东北大学出版社,2001:699-705.

(CHEN Wende. Cycle time assignment of nonlinear discrete event dynamic systems and coloring condensation graph [A]. ZHANG Siying. Proc of China Conference on Decision and Control '2001 [C]. Shenyang: Northeastern University Press, 2001: 699-705.)

作者简介:

陶跃钢 (1958—),男,中国科学院数学与系统科学研究院理学博士.研究领域:离散事件系统与编码. E-mail: yuegangtao@yahoo.com.cn;

陈文德 (1941—),男,中国科学院数学与系统科学研究院研究员,博士生导师.研究领域:离散事件系统,编码理论,离散数学. E-mail: xinmei@public3.bta.net.cn.

“何潘清漪优秀论文奖”征文启事

“何潘清漪优秀论文奖”征文活动自 1991 年开展以来,得到各方面的支持,现已进行了四届,共评选出获奖论文九篇.

第五届“何潘清漪优秀论文奖”评选活动即将开始,征文 2003 年继续由本刊办理,只要是在世界各地用中文发表的关于 DEDS 方面的论文都有资格参加.请应征作者注意:

1. 文章必须是用中文正式发表过的,因此,寄来的文章应是该文在所发表的刊物的抽印页或复印页.
2. 文章需一式五份.
3. 请在应征稿的首页左上方注明“何潘清漪优秀论文奖征文”字样.

4. 截稿日期为 2004 年 3 月 31 日,授奖仪式将于 2004 年 6 月在第五届全球智能控制与自动化大会上举行.申请者可将论文寄到《控制理论与应用》编辑部(地址:广州市 五山 华南理工大学 邮政编码:510640).

《控制理论与应用》编辑部

美国哈佛大学教授何毓琦(Y.C.Ho)先生为了庆贺其母亲何潘清漪老太太九十岁生日特设此奖,借以纪念她的母爱,以及她为了支持何先生的事业所付出的辛劳.

授奖对象:

离散事件动态系统(DEDS)方面优秀中文论文的作者.

目的:

选拔、奖励、促进和宣扬中国在 DEDS 领域内得到国际承认的重大成果.

条例与机构:

1. 由何毓琦先生提供的何潘清漪奖金总额为 5000 美元,每次授奖金额 1000 美元,连续颁发 5 次(每两次之间间隔至少为一年).5 次之后,有可能追加基金继续颁发.

2. 世界各地用中文发表的关于 DEDS 方面的论文都有资格申请奖金.

3. 论文由国际专家小组甄别和最终评定.

专家小组成员:曹希仁、陈翰馥、谈自忠(组长)、饶大维、郑应平.

4. 如果某年度无合适的论文,该奖可以不颁发,但至少会颁发 5 次.

5. 鼓励获奖者将其论文译成英文,为其发表提供帮助,借此促进在 DEDS 领域内工作的中国研究人员的国际合作.