文章编号: 1000 - 8152(2003)03 - 0411 - 04

基于混合灵敏度优化的鲁棒特征结构配置

黄一敏[1], 高 正[1], 王 永[2]
(1. 南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016; 2. 中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 将 H_∞ 理论的混合灵敏度指标融入到特征结构配置中, 将混合灵敏度指标转换为特征结构设计参数的函数关系, 建立了特征结构配置的频率域指标约束. 这两种方法的结合各自利用了其在时域和频率域的设计优势. 通过优化算法所获得的鲁棒特征结构配置, 既保证了闭环特征值/特征向量, 又使反馈回路具有一定的频率域特性. 计算实例表明这种综合设计方法的有效性.

关键词: 特征结构配置; H_∞; 混合灵敏度; 优化
中图分类号: TP13, TP273　　**文献标识码**: A

Robust eigenstructure assignment combined with mixed-sensitivity optimization

HUANG Yi-min[1], GAO Zheng[1], WANG Yong[2]
(1. College of Automation, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Jiangsu Nanjing 210016, China;
2. Department of Automation, University of Science & Technology of China, Anhui Hefei 230027, China)

Abstract: A method is proposed to combine eigenstructure assignment (EA) with mixed-sensitivity H_∞. EA is a time domain technique while H-infinity is a frequency domain one. The mixed-sensitivity problem can be translated analytically into function of EA design parameters. The integrated method makes the best of individual advantage in time domain (EA) and frequency domain (H-infinity). By using optimization technique, the resulting robust EA can obtain both desired locations of closed-loop eigenvalues and loop shapes in frequency domain. The case study shows the effectiveness of the design method.

Key words: eigenstructure assignment; H_∞; mixed-sensitivity; optimization

1 引言(Introduction)

特征结构配置以特征值和特征向量为设计参数, 属于时域设计方法, 控制器阶次较低, 但通常不能从特征值和特征向量的简单选取上获得反馈系统的鲁棒性. H_∞ 控制理论主要在频率域进行设计, 对系统鲁棒性有较好的刻画, 但 H_∞ 控制器阶次过高, 且难以保证期望的时域特性. 将特征结构配置理论与 H_∞ 控制理论相结合, 以混合灵敏度作为特征结构配置的鲁棒性指标, 既能获得满足时域特性的低阶控制器, 又能保证闭环系统的鲁棒性.

图 1 是反馈控制系统的典型结构图, 定义灵敏度函数 $S = (I + GK)^{-1}$, 补灵敏度函数 $T = GK(1 + GK)^{-1}$. 鲁棒控制理论[1] 定义了加法不确定性和乘法不确定性, 为此得到两种混合灵敏度描述: 对于加法不确定性, 混合灵敏度为 $S\&KS$; 对于乘法不确定性, 混合灵敏度为 $S\&T$. 这样混合灵敏度的设计目标可描述为如下范数形式

$$\begin{cases} J(K) = \left\| \begin{bmatrix} S \\ KS \end{bmatrix} \right\|_\infty, & \text{对于加法不确定性;} \\ J(K) = \left\| \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right\|_\infty, & \text{对于乘法不确定性.} \end{cases} \tag{1}$$

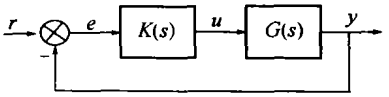

图 1 反馈控制系统结构图
Fig. 1 Structure of feedback control system

2 特征结构配置的参数化表示(Parameterization of eigenstructure assignment)

设线性时不变系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ u = Kx. \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2000 - 09 - 18; 收修改稿日期: 2002 - 04 - 08.

式中,状态 $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,输入 $u \in \mathbb{R}^{m\times 1}$;矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, K \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 设闭环系统的特征值为 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,特征向量为 $\Phi = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$,那么有

$$(A + BK)r_i = \lambda_i r_i,\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

经变换后可得到如下形式

$$\begin{cases} r_i = (\lambda_i I - A)^{-1}Bw_i, \\ w_i = Kr_i, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

令 $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$,就有如下反馈矩阵的一种表示[2]:

$$K = W\Phi^{-1}. \tag{5}$$

上述简要的推导表明:给定闭环特征值,反馈矩阵就可以表示为参数向量 W 的函数. 为了将 H_∞ 控制与特征结构配置相结合,需要将混合灵敏度指标改写为特征结构配置的设计参数,即将 $J(K)$ 改写为 $J(\Lambda, W)$,这就是鲁棒特征结构配置的参数化描述.

3 混合灵敏度指标的数学分析(Analysis of mixed sensitivity)

引理 对于一般复矩阵 H, rank $(H) = m$, H 的奇异值为 $\sigma_i (i = 1,2,\cdots,m)$,那么奇异值 σ_i 对实参数 p 的偏导数为[3]

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial p} = \mathrm{Re}\left(u_i \frac{\partial H}{\partial p} v_i\right). \tag{6}$$

式中,Re 表示取实部, u_i, v_i 为奇异值 σ_i 的左、右奇异向量.

3.1 实特征值情形(Case of real eigenvalue)

注意到范数定义 $\|H\|_\infty = \sup\limits_{\omega \in F_\omega} \bar{\sigma}(H(\mathrm{j}\omega))$,式中 F_ω 是系统关心的频率范围. 根据此引理,以加法不确定性的混合灵敏度为例,可以将混合灵敏度指标进一步按如下展开.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial \lambda_i} = \mathrm{Re}\left(u^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial \lambda_i} \\ \dfrac{\partial (KS)}{\partial \lambda_i} \end{bmatrix} v\right), \\ \dfrac{\partial J}{\partial w_{ij}} = \mathrm{Re}\left(u^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial w_{ij}} \\ \dfrac{\partial (KS)}{\partial w_{ij}} \end{bmatrix} v\right). \end{cases} \tag{7}$$

式中, u, v 为矩阵 $[S^{\mathrm{T}} \quad (KS)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 最大奇异值的左、右奇异向量,Re 表示取实部. 注意到灵敏度函数 $S = (I + GK)^{-1}$,并利用关系式

$$\frac{\partial H^{-1}}{\partial p} = -H^{-1}\frac{\partial H}{\partial p}H^{-1}, \tag{8}$$

可将式(7)展开如下:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial \lambda_i} \\ \dfrac{\partial (KS)}{\partial \lambda_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -SG\dfrac{\partial K}{\partial \lambda_i}S \\ \dfrac{\partial K}{\partial \lambda_i}S - KSG\dfrac{\partial K}{\partial \lambda_i}S \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial w_{ij}} \\ \dfrac{\partial (KS)}{\partial w_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -SG\dfrac{\partial K}{\partial w_{ij}}S \\ \dfrac{\partial K}{\partial w_{ij}}S - KSG\dfrac{\partial K}{\partial w_{ij}}S \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{9}$$

这样,就将混合灵敏度指标转换为反馈阵 K 对参数 (λ_i, w_i) 的偏微分. 再次利用式(8),对式(5)进行偏微分,得到反馈阵 K 对参数 (λ_i, w_i) 的偏微分为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial \lambda_i} = -K\dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}\Phi^{-1}, \\ \dfrac{\partial K}{\partial w_{ij}} = \left(\dfrac{\partial K}{\partial w_{ij}} - K\dfrac{\partial \Phi}{\partial w_{ij}}\right)\Phi^{-1}. \end{cases} \tag{10}$$

式中

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = \left[\frac{\partial r_1}{\partial \lambda_i}, \frac{\partial r_2}{\partial \lambda_i}, \cdots, \frac{\partial r_n}{\partial \lambda_i}\right],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_{ij}} = \left[\frac{\partial r_1}{\partial w_{ij}}, \frac{\partial r_2}{\partial w_{ij}}, \cdots, \frac{\partial r_n}{\partial w_{ij}}\right],$$

而 $\dfrac{\partial W}{\partial w_{ij}}$ 中除了第 (i,j) 个元素为 1 外,其余元素均为 0. 注意到关系式(4),得到如下关系式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_k}{\partial \lambda_i} = \begin{cases} -(\lambda_i I - A)^{-2}Bw_i, & k = i, \\ 0_{n\times 1}, & k \neq i, \end{cases} \\ \dfrac{\partial r_k}{\partial w_{ij}} = \begin{cases} (\lambda_i I - A)^{-1}Be_j, & k = i, \\ 0_{n\times 1}, & k \neq i. \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

式中 $e_j \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ 为单位向量.

3.2 复特征值情形(Case of complex eigenvalue)

设 $\lambda_i = \lambda_i^R + \mathrm{j}\lambda_i^I$ 为复特征值,相应的参数向量为 $w_i = w_i^R + \mathrm{j}w_i^I$;那么混合灵敏度对复特征值的分析需扩展为计算 $\partial J/\partial \lambda_i^R, \partial J/\partial \lambda_i^I, \partial J/\partial w_{ij}^R$ 和 $\partial J/\partial w_{ij}^I$. 这些计算的形式与式(7)、式(9)完全相似. 将式(4)按实部、虚部分开,并定义

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_i^R I - A & -\lambda_i^I I \\ \lambda_i^I I & \lambda_i^R I - A \end{bmatrix}, \ \bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \tag{12}$$

于是复特征向量可改写为

$$\begin{bmatrix} r_i^R \\ r_i^I \end{bmatrix} = \bar{A}^{-1}\bar{B}\begin{bmatrix} w_i^R \\ w_i^I \end{bmatrix}. \tag{13}$$

最终获得特征向量对特征值实部/虚部的偏微分为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\begin{bmatrix} r_k^R \\ r_k^I \end{bmatrix}}{\partial \lambda_i^R} = \begin{cases} -\bar{A}^{-2}\bar{B}\begin{bmatrix} w_i^R \\ w_i^I \end{bmatrix}, & k = i, \\ 0_{2n\times 1}, & k \neq i, \end{cases} \\ \dfrac{\partial\begin{bmatrix} r_k^R \\ r_k^I \end{bmatrix}}{\partial \lambda_i^I} = \begin{cases} \bar{A}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}\bar{A}^{-1}\bar{B}\begin{bmatrix} w_i^R \\ w_i^I \end{bmatrix}, & k = i, \\ 0_{2n\times 1}, & k \neq i, \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

以及特征向量对参数向量实部/虚部的偏微分为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\begin{bmatrix} r_k^R \\ r_k^I \end{bmatrix}}{\partial w_{ij}^R} = \begin{cases} \bar{A}^{-1}\bar{B}e_j, & k = i, \\ 0_{2n\times 1}, & k \neq i, \end{cases} \\ \dfrac{\partial\begin{bmatrix} r_k^R \\ r_k^I \end{bmatrix}}{\partial w_{ij}^I} = \begin{cases} \bar{A}^{-1}\bar{B}e_{j+m}, & k = i, \\ 0_{2n\times 1}, & k \neq i. \end{cases} \end{cases} \tag{15}$$

式中 $e_j \in \Xi^{2m\times 1}$ 为单位向量.

4 优化算法实现的若干问题(Consideration of optimal algorithm)

4.1 复特征值(Complex eigenvalue)

复特征值还有一种常用表示,即阻尼比/自然频率关系.设 $\lambda_i = \lambda_i^R + j\lambda_i^I$,相应的阻尼比为 ζ,自然频率为 ω_n,利用关系式 $\lambda_i^I = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 和 $\lambda_i^R = \zeta\omega_n$,就能将对特征值实部/虚部的偏微分转化为对阻尼比/自然频率的偏微分.

4.2 约束特征值(Constrained eigenvalue)

在实际控制问题中,有时需要对特征值范围进行限制,这时就成为具有约束条件的优化问题.设特征值 $\lambda_i \in [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$,通过如下变换可以将约束优化化为无约束优化:

$$\xi = \frac{1}{2}(\bar{\lambda} + \underline{\lambda}) + \frac{1}{2}(\bar{\lambda} + \underline{\lambda})\sin(\eta),$$
$$\eta \in (-\infty, +\infty). \tag{16}$$

上述约束优化和无约束优化问题,均可以通过 MATALB 环境的优化工具包[4]获得解决.

4.3 频率加权(Frequency weighting)

加权后的混合灵敏度为 $W_1S\&W_2KS$,W_1 使 W_1S 强调指令跟踪性能和抗干扰能力,W_2 使 W_2KS 强调对高频不确定性的鲁棒性.考虑权矩阵后,原先的推导不变.

4.4 乘法不确定性的混合灵敏度(Mixed sensitivity of multiplicative uncertaity)

由于 $S + T = I$,得 $\partial T/\partial p = -\partial S/\partial p$,此种情形下只要计算 $\partial S/\partial p$ 即可.

5 算例研究(Case study)

以多变量模型为对象,其状态空间描述为式(17),该模型开环特征值为 $-1.4811 \pm 0.6239j$, -2.0127, -0.1051.以 $S\&KS$ 作为考察对象,为了分析闭环特征值影响混合灵敏度指标的程度,这里考虑了 3 种不同的闭环特征值设计,如式(18)所示.这 3 种情形的差异在于两个实根,情形② 表明开环/闭环系统中有一个特征值重合,情形③ 表明开环/闭环系统中有两个特征值重合.表 1 列出了 3 种情形的设计结果,表中 cond(Φ) 表示闭环特征向量的条件数.图 2 分别是这 3 种设计情形的 $\bar{\sigma}(S)$ 和 $\bar{\sigma}(KS)$ 曲线.

表中结果有一个有趣的现象:不管这 3 种情形的两个实特征值如何,复特征值最后都基本相同.从反馈阵的范数可以看出,采用这种综合设计方法,控制增益很小,表明所需执行机构的能量很小,这对于实际控制问题是十分重要的.但这 3 种情形明显的差异在于闭环特征向量的条件数,随着闭环特征值与开环特征值的重合,闭环特征向量的条件数变化显著,而且向奇异的方向发展,尽管如此,3 种情形的混合灵敏度指标均令人满意.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8900 & 0.3900 & -5.5550 \\ 0 & -0.0340 & -2.9800 & 2.4300 \\ 0.0350 & -0.0011 & -0.9900 & -0.2100 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.7600 & -1.6000 \\ -0.9500 & -0.0320 \\ 0.0300 & 0 \end{bmatrix} u, \tag{17}$$

$$\begin{cases} ① \begin{cases} -5 \leqslant \lambda_{1,2}^R \leqslant -2, \\ 0.5 \leqslant \lambda_{1,2}^I \leqslant 4, \\ -2.5 \leqslant \lambda_3 \leqslant -0.5, \\ -1.0 \leqslant \lambda_4 \leqslant -0.1, \end{cases} \quad ② \begin{cases} -5 \leqslant \lambda_{1,2}^R \leqslant -2, \\ 0.5 \leqslant \lambda_{1,2}^I \leqslant 4, \\ -2.5 \leqslant \lambda_3 \leqslant -0.5, \\ \lambda_4 = -0.1051, \end{cases} \\ ③ \begin{cases} -5 \leqslant \lambda_{1,2}^R \leqslant -2, \\ 0.5 \leqslant \lambda_{1,2}^I \leqslant 4, \\ \lambda_3 = -2.0127, \\ \lambda_4 = -0.1051. \end{cases} \end{cases} \tag{18}$$

表 1 不同情形的反馈阵、闭环特征值和混合灵敏度指标

Table 1 Feedback matrix, closed loop eigenvalues and mixed sensitivity

	K	$\|K\|_2$	Λ	cond (Φ)	$J(K)$
①	$\begin{bmatrix} -0.1059 & -0.1378 & 0.0758 & -0.0105 \\ 0.2146 & 0.1005 & -0.0037 & -0.0109 \end{bmatrix}$	0.29	$-2.000\pm0.693j, -1.176, -0.242$	134	1.10
②	$\begin{bmatrix} -0.0107 & -0.0948 & 0.0494 & -0.0226 \\ 0.0074 & 0.0645 & -0.0334 & 0.0132 \end{bmatrix}$	0.13	$-2.001\pm0.620j, -1.195, -0.105$	4.45×10^4	1.05
③	$\begin{bmatrix} 0.0308 & 0.0295 & 1.0989 & -1.7366 \\ -0.0102 & -0.0087 & -0.6838 & 0.8603 \end{bmatrix}$	2.33	$-2.000\pm0.500j, -2.013, -0.105$	2.99×10^5	2.53

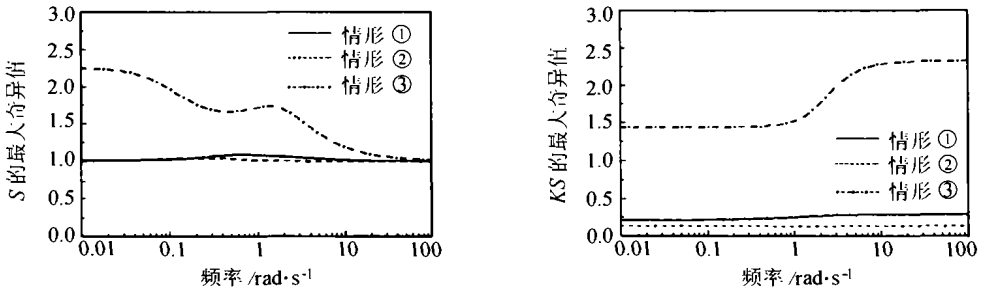

图 2 混合灵敏度优化的 S & KS 奇异值曲线

Fig. 2 Singular values of mixed sensitivity S & KS

为了更清楚地理解混合灵敏度优化方法的鲁棒性,本文还与文献[5]进行对比研究,文献[5]是一种基于闭环特征向量条件数优化的特征结构设计.以表 1 所示闭环特征值作为文献[5]的设计参数,相应的反馈阵等一些特征参数列于表 2.表中可见,闭环特征向量的条件数比表一有很大改善,但在反馈增益阵和混合灵敏度指标上差异十分明显,文献[2]指出,特征向量的条件数不能真实反映系统的鲁棒性,系统的鲁棒性取决于混合灵敏度指标.

表 2 按文献[5]设计的反馈阵和混合灵敏度指标

Table 2 Feedback matrix and mixed sensitivity according to Reference [5]

	K	$\|K\|_2$	cond (Φ)	$J(K)$
①	$\begin{bmatrix} -0.7034 & -0.0928 & -0.7031 & 1.8681 \\ 1.5742 & 0.6087 & 0.5447 & -3.2333 \end{bmatrix}$	4.01	5.70	29.78
②	$\begin{bmatrix} -0.1231 & -0.0307 & -0.7855 & -1.0537 \\ 0.0179 & -0.3764 & 0.7159 & -4.4561 \end{bmatrix}$	4.68	8.06	48.76
③	$\begin{bmatrix} 1.3072 & 0.5868 & -0.7378 & 2.1079 \\ 2.8460 & 1.3983 & 0.3359 & -3.3397 \end{bmatrix}$	4.67	10.07	77.81

6 结束语(Conclusions)

本文将频率域的 H_∞ 控制理论与特征结构配置相结合,获得了一种规范的鲁棒特征结构配置设计技术,并将两种混合灵敏度有机地融合在一起.计算实例表明,这种方法能获得期望的鲁棒性、较小的反馈增益、合理的闭环特征值/特征向量.

参考文献(References):

[1] SKOGESTAD S, POSTLETHWAITE L. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* [M]. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1996:91-110.

[2] SOBEL K M, SHAPIRO E Y, ANDRY A N. Eigenstructure assignment [J]. *Int J Control*, 1994, 59(1): 13-37.

[3] GARG S. Robust eigenspace assignment using singular value sensitivies [J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, 14(2): 416-424.

[4] GRACE A. *Optimization Toolbox for Use with MATLAB* [M]. Natick, Mass: Mathworks Inc, 1998.

[5] KAUTSKY J, NICHOLS N K, VAN DOOREN P. Robust pole assignment in linear state feedback [J]. *Int J Control*, 1985, 41(5): 1129-1155.

作者简介:

黄一敏 (1969—),男,副研究员,1990年毕业于北京大学力学系,1993年毕业于浙江大学力学系,1999年获得"导航、制导与控制"学科的工学博士学位.目前所从事的研究领域:无人机控制,直升机控制.研究兴趣:特征结构配置理论,H_∞ 控制理论、线性二次型等多变量控制技术以及它们在飞行控制中的应用. E-mail: ymhuang@nuaa.edu.cn;

高 正 (1938—),男,教授,博士生导师.研究领域:直升机飞行力学,直升机飞行控制;

王 永 (1962—),男,副教授.研究领域:飞机的自修复控制,鲁棒控制等.