

## 基于几何分析的迭代学习控制快速算法

谢胜利<sup>1</sup>, 田森平<sup>2</sup>, 谢振东<sup>1</sup>

(1. 华南理工大学 无线电与自动控制研究所, 广东 广州 510640; 2. 华南理工大学 自动化系, 广东 广州 510640)

**摘要:** 基于几何分析, 对迭代学习控制问题进行了讨论. 在这种几何框架下获得了与目前算法完全不同的快速算法, 为迭代学习控制的研究开辟了一条全新的途径. 这种基于几何理论的新途径, 能明确的指引人们应该怎样去设计更好的学习算法, 而不是像目前的研究结果那样, 总是囿于 Arimoto(1984)所提出的最基本的算法形式之中. 数值仿真结果表明新算法的有效性与优越性.

**关键词:** 迭代学习控制; 几何分析; 快速算法; 数值仿真

**中图分类号:** TP273. +2 **文献标识码:** A

## Fast algorithm of iterative learning control based on geometric analysis

XIE Sheng-li<sup>1</sup>, TIAN Sen-ping<sup>2</sup>, XIE Zhen-dong<sup>1</sup>

(1. Institute of Radio and Automatic Control, South China University of Technology, Guangdong Guangzhou 510640, China;

2. Department of Automation, South China University of Technology, Guangdong Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** Based on geometric analysis, the iterative learning control is discussed. Under the geometric structure, a fast algorithm is obtained. The algorithm is absolutely different from the previous algorithms and constitutes a new approach to the iterative learning control. This new approach can indicate one to design some better learning algorithms clearly, while the previous studies are restricted to its essential form of algorithms presented by Arimoto(1984). Some numerical simulations are given to show its efficiency and superiority.

**Key words:** iterative learning control; geometric analysis; fast algorithm; numerical simulation

### 1 引言(Introduction)

由于迭代学习控制只是利用控制系统先前的控制经验, 根据测量系统的实际输出信号和期望信号, 来寻找一个理想的输入特征曲线, 使被控对象产生期望的运动; 而且这一控制方法对被控对象的动力学描述和参数估计的复杂计算均可简化和省略; 从而已在控制理论领域引起了广泛的关注, 且应用范围也在不断扩大. 如机器人系统<sup>[1]</sup>、离散系统<sup>[2,3]</sup>、广义系统<sup>[4]</sup>、分布参数系统<sup>[5]</sup>、2-D 系统<sup>[6]</sup>以及鲁棒控制<sup>[7]</sup>和自适应控制<sup>[8]</sup>. 目前它正在逐步形成智能控制的一个新的方向, 人们也正致力于探索各种有效算法及收敛性分析的手段, 以建立迭代学习控制完整的基本理论. 在算法上, 自 Arimoto<sup>[9]</sup>(1984)提出如下最简单的形式

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + Le_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

以来, 人们相继提出了各种改进的算法, 如高阶学习

算法<sup>[10,11]</sup>、优化学习算法<sup>[12]</sup>、基于 2-D 系统理论的学习算法<sup>[6,13]</sup>、带有遗忘因子的学习算法<sup>[14]</sup>、利用高阶微分的学习算法<sup>[15]</sup>和对初始误差进行学习的学习算法<sup>[16,17]</sup>. 虽然以上算法都各自有着自己的特点, 但它们基本上都是沿着 Arimoto<sup>[9]</sup>(1984)所提算法(1)的形式演化而来, 可以说是同一类型的算法. 迭代学习控制发展了十几年至今天, 究竟存不存在其他类型的更好算法, 在理论上能不能建立完整的框架, 使迭代学习控制在这一理论框架下发展, 且在这一框架下, 能指引人们应该怎样去寻找更有效的快速算法.

本文就是鉴于以上想法的驱动, 试图建立迭代学习控制的几何理论. 在这一理论框架下, 可以明确地知道, 应该怎样去设计有效的学习算法使其快速收敛, 本文的方法为迭代学习控制的深入发展开辟了一条新的途径.

收稿日期: 2001-09-25; 收修改稿日期: 2002-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金(60174006); 广东省自然科学基金(980506); 教育部跨世纪优秀人才基金(教技函[2002]48号); 教育部重点科研基金(02153); 湖北省教育厅青年基金(2000B2001)资助项目.

## 2 几何分析及所产生的快速算法 (Geometric analysis and begot fast algorithms)

为了使得所建立的迭代学习控制算法的几何意义清晰明了, 本文仅对线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

进行讨论, 而对于非线性系统或其它更复杂系统可毫无困难的类似讨论.

在式(2)中,  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^l, A, B, C, D$  是相应阶数的矩阵, 系统的理想输出为  $y_d(t)$ . 由于系统的不确定性, 很难求出确定的理想输入  $u_d(t)$ , 使得它所对应的系统输出就是  $y_d(t)$ . 通常的方法是通过“学习”来寻求控制输入序列  $\{u_k(t)\}$ , 使得  $u_k(t) \rightarrow u_d(t)$ , 而寻求  $\{u_k(k)\}$  的最基本的方法是算法(1).

下面对算法的构成进行几何分析, 记  $\hat{u}_k(t) = u_k(t) - u_d(t)$ , 则式(1)可写为 
$$\hat{u}_{k+1}(t) = \hat{u}_k(t) + Le_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

要使  $\hat{u}_k(t) = u_k(t) - u_d(t) \rightarrow 0$ , 则只要  $\|\hat{u}_k(t)\| \rightarrow 0$  即可, 即在式(3)所确定的算法中,  $\hat{u}_k(t)$  的长度  $\|\hat{u}_k(t)\|$  要逐渐减小. 由式(3)不难得到如图1所示的几何关系.

为了获得有效的快速算法, 下面在对图1进行分析的基础上, 寻找对  $\hat{u}_{k+1}$  重新进行调整的方法. 在图1中, 过  $\hat{u}_k$  的终点作  $\hat{u}_k$  的垂线交  $\hat{u}_{k+1}$  于点  $c$ , 则有  $\|\hat{oc}\| \leq \|\hat{u}_{k+1}(t)\|$ , 且  $\|\hat{oc}\| > \|\hat{u}_k(t)\|$ . 再过  $a$  点作向量  $\vec{ad}$  交  $\vec{ob}$  于  $d$  点, 只有  $\vec{oa}$  与  $\vec{ad}$  的夹角小于  $90^\circ$  时,  $\|\vec{od}\|$  才有可能小于  $\|\hat{u}_k(t)\|$  (见图2). 记  $\vec{ad} = e_k$ , 并取  $\hat{u}_{k+1} = \vec{od}$  来调整  $\hat{u}_{k+1}$ , 则对应的算法

$$\hat{u}_{k+1} = \hat{u}_k + \hat{e}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

满足条件  $\|\hat{u}_{k+1}\| < \|\hat{u}_k\|$ .

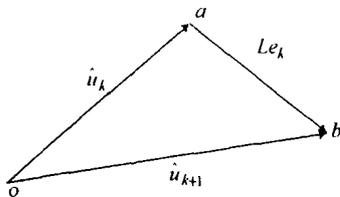


图1 几何分析图

Fig. 1 Graph of geometric analysis

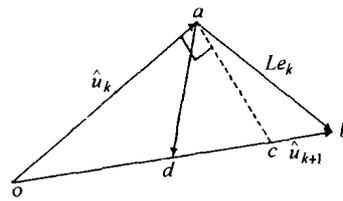


图2 几何分析图

Fig. 2 Graph of geometric analysis

现在的问题是, 如何确定  $\hat{e}_k$  使得  $\vec{oa}$  与  $\vec{ad}$  的夹角  $\beta$  小于  $90^\circ$ . 下面将利用  $\hat{u}_{k-1}$  的信息来寻找这种关系. 见图3, 选取  $\vec{ad}$  垂直于  $Le_{k-1}$ , 只要  $\angle\alpha > 0$ , 便有  $\angle\beta < 90^\circ$ , 从而只要选择  $\hat{e}_k$  使得它垂直于  $Le_{k-1}$  即可. 显然

$$\hat{e}_k = Le_k - \frac{(Le_{k-1})^T Le_k}{\|Le_{k-1}\|^2} Le_{k-1} \quad (5)$$

垂直于  $Le_{k-1}$ .

于是可得到一种新的算法

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \hat{e}_k = \\ u_k &+ L \left( e_k - \frac{(Le_{k-1})^T Le_k}{\|Le_{k-1}\|^2} e_{k-1} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

为了使算法更具灵活性且与普通的算法(1)相联系, 在算法中引进一个  $\sigma$  因子, 可得到算法

$$u_{k+1} = u_k + L \left( e_k - \sigma \frac{(Le_{k-1})^T Le_k}{\|Le_{k-1}\|^2} e_{k-1} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

当  $\sigma = 0$  时, 算法(7)变为算法(1), 而当  $\sigma = 1$  时, 算法(7)便成为算法(6). 因此算法(7)是算法(1)的推广形式.

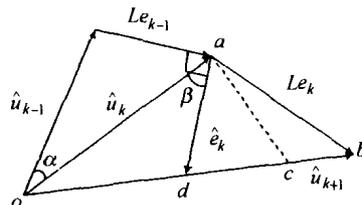


图3 几何分析图

Fig. 3 Graph of geometric analysis

在图3的意义下, 算法(6)好象是最好的, 它所对应的  $\hat{u}_{k+1}$  的长度最短. 而随着  $\sigma$  的减小, 算法(7)的性能在逐渐减弱, 因它所对应的  $\hat{u}_{k+1}$  的长度在逐渐增大, 且当  $\sigma = 0$  时所对应的算法(1)最差. 现在再观察另一种情形, 即在算法(1)中的  $\|\hat{u}_{k+1}\| < \|\hat{u}_k\|$  的情形, 见图4. 在这种情形之下, 算法(7)的性能恰好与图3所对应的情形(即  $\|\hat{u}_{k+1}\| > \|\hat{u}_k\|$ ) 相反, 随着  $\sigma$  的增大而变差, 且以  $\sigma = 1$  为最差.

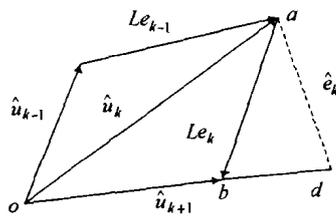


图 4 几何分析图

Fig. 4 Graph of geometric analysis

从上述分析可知,要使形如式(7)的算法最优,因子  $\sigma$  在学习过程中应是个变数,且具有性质:随误差的增大而增大,随误差的减少而减少,应该是学习过程中的一个自适应调节因子.本文选取

$$\sigma = \alpha(1 - \exp(-\beta \|e_k\|)). \quad (8)$$

其中  $(\alpha, \beta) \in (0, 1) \times [0, +\infty)$  为可调节的常数,它们决定着自适应因子  $\sigma$  随误差变化的情况.

综上所述,本文可获得具有自适应调节因子的新的学习算法

$$\begin{cases} u_{k+1} = \\ u_k + L \left( e_k - \alpha(1 - \exp(-\beta \|e_k\|)) \frac{(L e_{k-1})^T L e_k}{\|L e_{k-1}\|^2} e_{k-1} \right), \\ t \in [0, T], k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (9)$$

### 3 数值仿真(Numerical simulation)

为了说明由几何分析所得的新算法优于通常的算法,特对以下例子进行仿真比较.

例 考虑如下多输入多输出系统

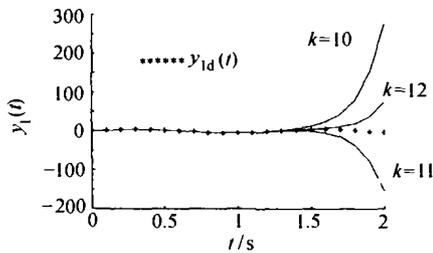


图 5 系统输出的第一分量(通常算法)  
Fig. 5 First output component (ordinary algorithm)

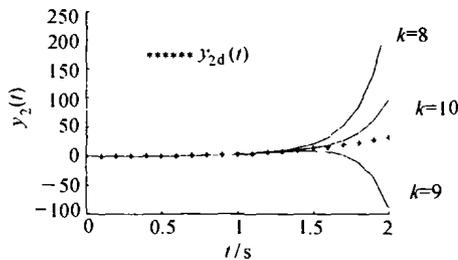


图 7 系统输出的第二分量(通常算法)  
Fig. 7 Second output component (ordinary algorithm)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} t \in [0, T]. \quad (10)$$

其中

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

要求在  $t \in [0, 2]$  内跟踪期望轨迹

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} y_{1d}(t) \\ y_{2d}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \sin 5t \\ 4t^3 \end{pmatrix}.$$

在算法(9)中,取  $\alpha = 0.5, \beta = 1, L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  并

设系统(10)开始学习时的初始状态  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  和初

始输入  $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .图 5 和图 6 是通常算法(1)和新算

法(9)在迭代第 10 次、第 11 次和第 12 次时关于  $y_{1d}(t)$  的跟踪情况.而图 7 和图 8 是相应的算法在迭

代第 8 次、第 9 次和第 10 次时关于  $y_{2d}(t)$  的跟踪情况.从图 5 至图 8 可以清楚地看出,当新算法已跟踪

到目标曲线时,通常算法跟踪目标曲线还存在着很大的误差.图 9 和图 10 是通常算法(1)和新算法(9)

跟踪目标曲线  $y_{1d}(t)$  和  $y_{2d}(t)$  的误差曲线图,从图中可以看出本文所给算法的优越性.

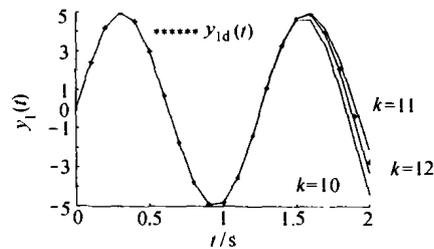


图 6 系统输出的第一分量(新算法)  
Fig. 6 First output component (new algorithm)

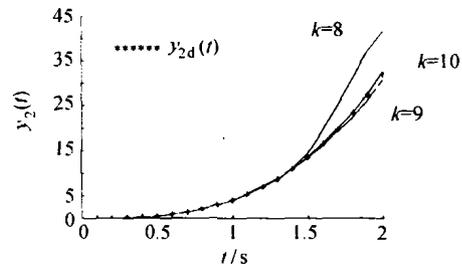


图 8 系统输出的第二分量(新算法)  
Fig. 8 Second output component (new algorithm)

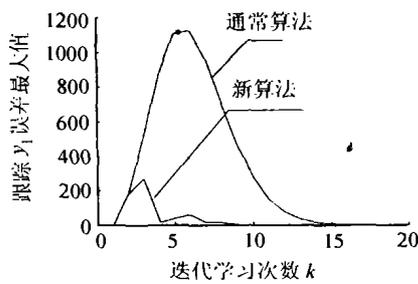


图9 跟踪( $y_1$ )误差最大值的变化曲线  
Fig. 9 Maximum tracking error curve of ( $y_1$ )

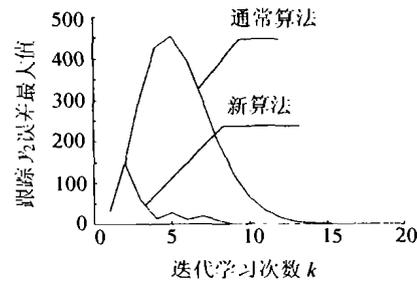


图10 跟踪( $y_2$ )误差最大值的变化曲线  
Fig. 10 Maximum tracking error curve of ( $y_2$ )

#### 4 结束语(Conclusion)

本文对迭代学习控制方法建立了新的理论框架及寻求快速收敛算法的新途径,为完整的迭代学习控制理论的建立开辟了新的领域.虽然此文只是形成迭代学习控制几何理论的一个基础,但本文认为这是一个非常重要的开端,它指明了进一步发展的方向.尽管如此,迭代学习控制几何理论的建立还有待人们在此基础上的共同努力.

#### 参考文献(References):

- [1] ORIOLO G, PANZIERI S. An iterative learning controller for non-holonomic mobile robots [J]. *Int J of Robotics Research*, 1998, 17(9): 954 - 970.
- [2] WANG Danwei. Convergence and robustness of discrete time nonlinear systems with iterative learning control [J]. *Automatica*, 1998, 34(11): 1445 - 1448.
- [3] KUREK J E. Counterexample to iterative learning control of linear discrete-time multivariable systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(2): 327 - 328.
- [4] 谢胜利, 谢振东, 刘永清. 滞后广义系统状态跟踪的学习控制算法[J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21(5): 10 - 16.  
(XIE Shengli, XIE Zhendong, LIU Yongqing. Learning control algorithm for state tracking of singular systems with delay [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 1999, 21(5): 10 - 16.)
- [5] 谢胜利, 谢振东, 韦岗. 非线性分布参数系统跟踪的控制的学习算法[J]. 自动化学报, 1999, 25(5): 627 - 632.  
(XIE Shengli, XIE Zhendong, WEI Gang. Learning algorithm for tracking control of nonlinear distributed parameter systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 627 - 632.)
- [6] GENG Z, CARROLL R, XIE Jiahong. Two-dimensional model and algorithm analysis for a class of iterative learning control systems [J]. *Int J Control*, 1990, 52(4): 833 - 862.
- [7] PARK K H, BIEN Z, HWANG D H. A study on the robustness of a PID-type iterative learning controller against initial state error [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(1): 49 - 59.
- [8] XU Jianxin, VISWANATHAN B. Adaptive robust iterative learning control with dead zone scheme [J]. *Automatica*, 2000, 36(1): 91 - 99.

- [9] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *J of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 - 140.
- [10] CHEN Yangquan, WEN Changyun, SUN Mingxuan. A robust high-order P-type iterative learning controller using current iteration tracking error [J]. *Int J Control*, 1997, 68(2): 331 - 342.
- [11] CHIEN C J. A discrete iterative learning control for a class of nonlinear time-varying systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(5): 748 - 752.
- [12] AMANN N, OWENS D H, ROGERS E. Predictive optimal iterative learning control [J]. *Int J Control*, 1998, 69(2): 206 - 226.
- [13] GENG Z, JAMSHIDI M. Learning control system analysis design based on 2-D system theory [J]. *J of Intelligent and Robotic Systems*, 1990, 3(1): 17 - 26.
- [14] HEINZINGER G, FENWICK D, PADEN B, et al. Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(1): 110 - 114.
- [15] CHEN Wen, SOH Y, YIN Chaowan. Technical note iterative learning control for constrained nonlinear systems [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(6): 659 - 664.
- [16] 任雪梅, 高为炳. 任意初始状态下的迭代学习控制[J]. 自动化学报, 1994, 20(1): 74 - 79.  
(REN Xuemei, GAO Weibing. Learning control with an arbitrary initial state [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1994, 20(1): 74 - 79.)
- [17] CHEN Yangquan, WEN Changyun, SUN Mingxuan. An iterative learning controller with initial state learning [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(2): 371 - 376.

#### 作者简介

谢胜利 (1958 —), 男, 华南理工大学无线电与自动控制研究所教授, 博士生导师, IEEE 高级会员. 出版学术专著(国家“九五”重点图书)1部, 发表学术论文70多篇, 4次获得省部级科技奖励. 主要研究方向为非线性系统学习控制, 机器人系统, 自适应多路回波消除, 盲信号处理以及图像处理等. E-mail: adshlxie@scut.edu.cn;

田森平 (1961 —), 男, 1988年在华中师范大学获硕士学位, 1999年在华南理工大学获博士学位, 现为华南理工大学自动化学院副教授. 于微分方程稳定性和稳定性理论, 迭代学习控制算法与计算机仿真等方面发表了近20篇论文. 目前感兴趣的研究方向是非线性系统的迭代学习控制理论与算法. E-mail: ausptian@scut.edu.cn.