文章编号: 1000 - 8152(2003)03 - 0423 - 04

反馈控制系统多性能约束指标的相容性

王远钢, 郭 治
(南京理工大学 自动化系,江苏 南京 210094)

摘要: 对一类线性随机系统的状态反馈控制,研究极点配置指标、被控输出对范数有界外扰的 H_∞ 抑制指标及稳态状态方差上界指标的相容性.希望为实际控制系统多性能指标的选定提供理论依据.用线性矩阵不等式(LMI)方法分别刻画了极点指标约束下 H_∞ 指标的取值范围、以及相容极点指标和 H_∞ 指标约束下稳态方差上界指标的取值范围,对上述三类相容指标约束的控制问题给出求取满意控制策略的有效方法.文中结论用数值算例作了说明.

关键词: 区域极点; 方差上界; H_∞ 抑制界; 指标相容性; LMI 方法; 满意反馈

中图分类号: O231.3　　**文献标识码:** A

Consistency of multiple performance indices of feedback control systems

WANG Yuan-gang, GUO Zhi
(Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Jiangsu Nanjing 210094, China)

Abstract: Consistency of performance indices is studied for a class of linear stochastic systems via state feedback control. These constraints consist of pole assignment index, H_∞ rejection index from norm-bounded exogenous disturbance to the controlled output and upper bound on steady state variance. The study aims to provide a theoretical basis for the choice of desired multi-performance indices on some practical control systems. Based on linear matrix inequality (LMI) approach, the region of H_∞ index which is consistent to the given pole index, and a good region of upper state-variance index which is consistent to the given consistent pole and H_∞ index are presented respectively. Furthermore, a method to find a satisfactory control strategy is provided for the considered systems under the above three consistent constraints. Finally, the results concerned is illustrated by a numerical example.

Key words: pole assignmnt; variance upper-bound; H_∞ rejection index; consistency of indices; LMI approach; satisfactory feedback

1 引言(Introduction)

实际控制系统通常要求同时满足多种性能指标,因而满意控制[1]认为,各项期望的性能指标用区域来刻画更有实际意义.只有多种指标同时满足时,人们对系统才满意,才可能对系统进一步考虑某种优化,因而多性能指标之间的相容性研究将非常有价值.目前,这方面的理论研究成果极少,有关多指标约束的系统控制研究大都是在假设多指标相容的条件下进行的,其主要研究方法是将多指标约束控制问题转化为某个修正 Riccatti 方程正定解的求解,如文献[2~4],若用这种方法研究多指标约束的相容性,结果将会有很大保守性[5].近来本文作者利用 LMI 方法[6],在控制指标的相容性方面作了一些研究,如文献[5,7].主要手段是,先将约束指标或根据实际需要按重要性排序,或者从便于研究分析的角度排序,接着用尽可能好的方式刻画给定的第一约束指标,在此基础上刻画第二类指标的取值范围,从而可直接判定给定的第二约束指标与第一约束指标是否相容;然后用尽可能好的方式刻画给定的相容第一、第二类约束指标,接着再刻画第三类指标的取值范围.此法可为多指标控制系统的可行性论证及性能指标取值范围的选定提供理论依据.

本文针对具有三类约束指标:区域极点、状态方差上界和 H_∞ 界的线性随机系统,研究状态反馈下约束指标的相容性,给出相容指标的取值范围、相容指标约束下满意控制策略的求取方法.

收稿日期:2000 - 09 - 11; 收修改稿日期:2003 - 02 - 13.
基金项目:国家创新研究群体科学基金(60024301);国家自然科学基金(60175006)资助项目.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下线性连续随机系统(Σ)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) \in \Re^{n_x}$ 为具有零初值的状态向量,$u(t) \in \Re^{n_u}$ 为控制输入,$z(t) \in \Re^{n_z}$ 为被控输出;$w(t) \in \Re^{n_w}$,当它作为噪声时是零均值、强度为 $W > 0$ 的高斯白噪声,而当它作为外界扰动时其各分量均Lebesgue可测;A,B,C,D 是适维实常矩阵.假设(A, B)可稳,(A, D)可扰.

若定常状态反馈控制律 $u(t) = Gx(t)$ 镇定系统(Σ),则相应闭环系统(Σ_L)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BG)x(t) + Dw(t), \\ z(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

的稳态状态协方差矩阵

$$X := \lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\{x(t)x(t)^{\mathrm{T}}\} \quad (3)$$

满足如下代数 Lyapunov 方程

$$(A + BG)X + X(A + BG)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} = 0. \quad (4)$$

而(Σ_L)从扰动 w 到控制输出 z 的传递函数矩阵为 $H(s) = C(sI - A - BG)^{-1}D$,其 H_∞ 范数

$$\| H(s) \|_\infty := \sup_{0\neq \|w(t)\| \in L_2(0,\infty)} \frac{\| z(t) \|_2}{\| w(t) \|_2} \quad (5)$$

反映了被控输出对有界扰动的抑制水平,这里 $\|\cdot\|_2$ 表示向量函数的标准 L_2 范数.

本文除标准符号外,对两个同维向量 M,N,用 $M \leqslant N$ 表示各分量不等式同时成立,diag(P)表示方阵 P 的对角元素组成的行向量,$F(q,r)$ 表示复平面内中心在 $-q+\mathrm{j}0$、半径为 r 的开圆盘($0 < r < q$).

作为系统(Σ)在定常状态反馈下的可配置极点区域,当矩阵对(A,B)完全可控时,$F(q,r)$ 可以是左半复平面内中心在实轴上的任意圆盘;而当矩阵对(A,B)可稳但不完全可控时,$F(q,r)$ 应包含系统矩阵 A 的稳定但不可控的特征值.

本文假设 $F(q,r)$ 是系统(Σ)在定常状态反馈下的可配置极点区域.

定义 1 对系统(Σ),给定开圆盘 $F(q,r)$ 及常数 $\gamma > 0$,称 H_∞ 指标 γ 与极点配置指标 $F(q,r)$ 相容,若存在定常反馈增益阵 G,使(Σ_L)同时满足

a) 极点集 $\Lambda(A + BG) \subset F(q,r)$;

b) 从 w 到 z 的传递函数矩阵满足 $\| H(s) \|_\infty < \gamma$.

定义 2 对系统(Σ),给定相容极点配置指标 $F(q,r)$ 和 H_∞ 指标 γ,称方差上界指标 σ^2 与极点指标 $F(q,r)$ 和 H_∞ 指标 γ 相容,若存在定常反馈增益阵 G,使(Σ_L)同时满足条件约束 a),b),及

c) 状态协方差矩阵 X 满足 diag(X) $\leqslant \sigma_2$.

本文目的:研究与极点指标 $F(q,r)$ 相容的 H_∞ 指标 γ 的取值范围、与给定相容极点指标 $F(q,r)$ 和 H_∞ 指标 γ 相容的方差上界指标 σ^2 的取值范围;并对具有上述三类相容指标的问题给出满意控制策略的求取方法.

3 主要结论(Main results)

用尽可能好的方式分别描述极点约束、H_∞ 约束和状态方差上界约束,导出它们的 LMI 形式,将相容指标的取值范围及相容指标约束下的控制设计问题转化成 LMI 组约束线性规划问题.由离散方程 Lyapunov 稳定性理论易得

引理 1 反馈增益 G 相应闭环(Σ_L)满足约束 a)当且仅当矩阵变量 Q 的以下不等式有正定解:

$$(A + BG + qI)Q(A + BG + qI)^{\mathrm{T}} - r^2Q < 0. \quad (6)$$

引理 2 给定指标 γ,则反馈增益 G 使闭环(Σ_L)渐近稳定且满足约束 b)的充要条件是矩阵变量 Q 的以下不等式有正定解:

$$(A+BG)Q + Q(A+BG)^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}QC^{\mathrm{T}}CQ + DD^{\mathrm{T}} < 0. \quad (7)$$

证 由文献[8]中引理 2.1 得反馈增益 G 使闭环(Σ_L)渐近稳定且满足 H_∞ 指标 γ 约束的充要条件是变量 Q_1 的如下不等式(7)有正定解:

$$(A+BG)Q_1 + Q_1(A+BG)^{\mathrm{T}} + Q_1C^{\mathrm{T}}CQ_1 + \gamma^{-2}DD^{\mathrm{T}} < 0. \quad (8)$$

令 $Q_1 = \gamma^{-2}Q$,则变量 Q_1 的不等式(8)有解,等价于变量 Q 不等式(7)有解. 证毕.

定理 1 系统(Σ)存在控制增益 G 使闭环(Σ_L)满足约束 a)的充要条件是,实变量 γ、矩阵变量 Q,G 的以下不等式组有解.

$$(A + BC + qI)Q(A + BG + qI)^{\mathrm{T}} - r^2Q < 0, \quad (9)$$

$$(A+BG)Q + Q(A+BG)^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}QC^{\mathrm{T}}CQ + DD^{\mathrm{T}} < 0, \quad (10)$$

$$Q > 0, \gamma > 0. \quad (11)$$

证 充分性显然.下证必要性.假设存在反馈增益 G 使闭环(Σ_L)满足约束 a),则由引理 1 得单变量 Q 的不等式(9)必有正定解.假设 Q 是其的任一正定解,展开式(9)可得

$$(A + BG)Q + Q(A + BG)^{\mathrm{T}} < 0.$$

选取适当大的正常数 λ，并记 $Q_1 = \lambda Q$，则有

$$(A + BG)Q_1 + Q_1(A + BG)^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} < 0.$$

再取充分大正数 γ，可使得 (γ, Q_1) 满足式(10)，进而 (γ, Q_1, G) 满足式(9)～式(11). 定理的必要性得证.　证毕.

作变换 $S = GQ$，$\alpha = \gamma^2$，并利用 Schur 补引理[6]，可得定理1的如下 LMI 等价形式.

定理 2　系统 (Σ) 存在控制增益 G 使闭环 (Σ_L) 满足约束 a)的充要条件是：实变量 α、矩阵变量 Q, G 的如下 LMI 组有可行解：

$$\begin{bmatrix} -rQ & (A + qI)Q + BS \\ Q(A + qI)^{\mathrm{T}} + S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rQ \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^{\mathrm{T}} + BS + S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} & QC^{\mathrm{T}} \\ CQ & -\alpha I \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

由极点指标 $F(q, r)$ 状态反馈可配置得 LMI 组(12)，(13)必有解，故下述极小值问题有意义：

$\min\ \alpha: Q, S, \alpha$ 满足 LMI 组(12)，(13).

记 (Q_0, S_0, α_0) 是上述极值问题的相应极小值点，而 $\gamma_0 = \sqrt{\alpha_0}$，则有如下推论.

推论 1　对于系统 (Σ)，当 $\gamma > \gamma_0$ 时，H_∞ 指标 γ 与状态反馈可配置极点指标 $F(q, r)$ 相容.

注 1　对给定可配置区域 $F(q, r)$ 和 H_∞ 指标 $\gamma(\gamma > \gamma_0)$ 约束的控制问题，定理2也间接给出了求取一个满意反馈增益 G 的方法，即令 $\alpha = \gamma^2$，并求解 LMI 组(12)，(13).

定理 3　对系统 (Σ)，假设极点区域 $F(q, r)$ 可配置，相应 H_∞ 指标 γ 满足 $\gamma > \gamma_0$，则所有满足 $\sigma^2 > \mathrm{diag}(QL)$ 的方差上界指标 σ^2 都与区域 $F(q, r)$ 和 H_∞ 指标 γ 相容，这里 Q_L 是如下问题的极小阵，$\min\limits_{Q,S}\{\mathrm{tr}\ Q\}: Q, S$ 满足式(12)，(13)和

$$AQ + QA^{\mathrm{T}} + BS + S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} < 0. \tag{14}$$

其中 $\alpha = \gamma^2$；且对满足上述条件的三类相容约束指标，相应满意控制策略可通过求问题

$$\text{LMI 组：式(12)～式(14) 和 } Q < Q_1 \tag{15}$$

的可行解得到，其中 Q_1 是满足 $Q_1 > Q_L$ 且 $\mathrm{diag}(Q_1) = \sigma^2$ 的任一矩阵.

证　假设变量 (Q, S) 的 LMI 组(12)～(14)有解，记 $G = SQ^{-1}$，则式(14)等价于

$$(A + BG)Q + Q(A + BG)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} < 0. \tag{16}$$

比较式(15)与式(4)，利用 Lyapunov 矩阵理论可得 $Q > X$，从而更有 $\mathrm{diag}(Q) > \mathrm{diag}(X)$. 而由 Q_L 的定义知，对满足条件的方差上界指标 σ^2，不等式组(12)～(14)总存在的解 (Q, S)，使得对充分小的正数 ϵ，有 $Q_L + \epsilon I > Q > Q_L$，$\mathrm{diag}(Q_L + \epsilon I) < \sigma^2$. 于是 $G = SQ^{-1}$ 作为反馈增益阵，必使闭环系统同时满足给定的三类指标约束，即满足条件的方差上界指标 σ^2 与其他两类指标相容. 并且，满足定理2中要求的矩阵 Q_1 有很多，如与 Q_L 有相同非对角元者即是其一，而且在给定的三类指标约束下，LMI 组式(15)总有可行解，从而由其任一可行解出发，即可求得一满意反馈策略.

注 2　注意到 $S = GQ$，不等式(14)能很好地刻划稳态状态方差阵的上界. 而当噪声强度 $W \leqslant I$ 时，定理2中的不等式(14)可省去.

注 3　求 Q_L 时可求得相应增益阵确定的稳态状态方差阵 X_L，显然有 $Q_L \geqslant X_L$，因而作为相容方差上界指标，实际上只要 $\sigma_2 > \mathrm{diag}(X_L)$ 即可.

4　算例(Numerical example)

设系统 (Σ) 的系数和噪声 $w(t)$ 的强度 W 如下

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ C = I_3.$$

易验证上述 (A, B) 可控，(A, D) 可扰. 设极点区域指标为 $F(q, r) = F(3, 2)$，显然它是状态反馈可配置的. 据定理1求得 $\gamma_0 = 0.3164$，从而满足 $\gamma > \gamma_0$ 的 H_∞ 指标 γ 都与极点区域 $F(3, 2)$ 相容. 再设给定的 H_∞ 指标为 $\gamma = 0.5$，据定理2求得

$$Q_L = \begin{bmatrix} 0.1059 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & -0.0036 \\ 0 & -0.0036 & 0.2119 \end{bmatrix}.$$

从而，满足 $\sigma^2 > [0.1059, 0.5000, 0.2119]$ 的方差上界指标都与极点指标 $F(3, 2)$ 和 H_∞ 指标 $\gamma = 0.5$ 相容.

现设对控制系统给定的三类约束指标为：极点指标 $F(3, 2)$，H_∞ 指标 $\gamma = 0.5$ 和方差上界指标 $\sigma^2 = [0.12, 0.52, 0.22]$，取对角阵 Q_1，使 $\mathrm{diag}(Q_1) = \sigma^2$，易得 $Q_1 > Q_L$，求解 LMI 组式(15)约束下极大值问题 $\max\{\mathrm{tr}\ Q\}$，得一满意反馈增益

$$G = \begin{bmatrix} -0.7867 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3720 & -5.6974 \end{bmatrix}.$$

经验证其相应闭环极点分别为 -4.4388，-3.2586，-4.7867，传递函数的 H_∞ 范数为 $\|H(s)\|_\infty =$

0.3324,稳态方差阵 X 满足 $\mathrm{diag}(X)=[0.1045, 0.5011, 0.2126]$,均满足要求.

5 结论(Conclusion)

本文对一类线性随机系统的状态反馈控制,研究了圆形极点指标、H_∞ 指标及状态方差上界指标的相容性,分别给出了圆形极点约束下闭环系统 H_∞ 指标的取值范围,及相容圆形极点和 H_∞ 指标约束下状态方差上界指标的较好取值范围;对同时具有上述三类相容指标的控制问题给出了满意控制策略的求取方法.本文工作还可推广到含结构参数扰动的线性随机系统.

参考文献(References):

[1] GUO Zhi. A survey of satisfying control and estimation [A]. Han-Fu CHEN. *Proc of the 14th IFAC World Congress* [C]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999:443 - 447.

[2] WANG Zidong, CHEN Xueming, GUO Zhi. Controller design with variance and circular pole constraints for continuous time systems [J]. *Int J of Systems Science*, 1995,26(5):1249 - 1256.

[3] WANG Zidong, TANG Guoqing. Studies on multiobjective state-feedback control for linear continuous systems with variance constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 1998,15(1):39 - 47.

[4] 朱纪洪,郭治.一类不确定随机系统的鲁棒 H_∞ 约束方差控制[J].控制理论与应用,1996,13(2):230 - 234.
(ZHU Jihong, GUO Zhi. The robust H_∞ variance control of stochastic system with uncertainty [J]. *Control Theory & Applications*, 1996, 13(2):230 - 234.)

[5] 王远钢,郭治.状态反馈中圆形极点与状态方差约束的相容性[J].自动化学报,2001,27(2):207 - 213.
(WANG Yuangang, GUO Zhi. Consistency of circular pole and state variance constraints in state feedback control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(2):207 - 213.)

[6] BOYD S, GHAOUI L El, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[7] 王远钢,郭治.基于极点与输出方差约束相容性分析的状态反馈[J].控制理论与应用,2001,18(4):597 - 600.
(WANG Yuangang, GUO Zhi. State feedback based on consistency analysis of pole and output-variance constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(4):597 - 600.)

[8] XIE Lihua, FU Minyue, de SOUZA C E. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37 (8): 1253 - 1256.

作者简介:

王远钢 (1964 —),男,副教授,博士.主要研究领域为:控制系统期望指标集的相容性,随机系统的满意控制与估计等. E-mail: yggwang@elong.com;

郭 治 (1937 —),男,1961 年毕业于哈尔滨军事工程学院,现为南京理工大学自动化系教授,博士生导师,国务院学位委员会控制科学与工程学科评议组成员,中国兵工学会理事.目前主要研究领域:满意控制与估计,兵器控制.

本刊启事

由于印刷方面的原因,本刊 2003 年第 2 期杂志部分出现断字、重影、墨色浓淡不一等现象.编辑部在此向广大读者深表歉意.若由于上述原因而使您无法阅读,您可以将杂志退回编辑部更换,邮资由编辑部承担.

本刊编辑部