

不确定非完整动力学系统的自适应模糊滑模控制器

王声远, 霍 伟

(北京航空航天大学 第七研究室, 北京 100083)

摘要: 为研究不确定非完整动力学系统的收敛性, 根据速度跟踪原理, 对其提出一种新的自适应模糊滑模控制器. 该控制器在存在的参数不确定性与外界干扰的情况下, 能使系统的广义坐标与广义速度收敛到预先给定的界内. 仿真算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 非完整动力学系统; 自适应模糊控制; 滑模控制; 速度跟踪

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Adaptive fuzzy sliding-mode controllers of uncertain dynamic nonholonomic systems

WANG Sheng-yuan, HUO Wei

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Based on the velocity tracking principle, a new adaptive fuzzy sliding-mode controller is presented for ensuring convergence of uncertain dynamic nonholonomic systems with unknown parameters and external disturbances. The new controller can make the generalized co-ordinates and the generalized velocities of the closed-loop system converge to preset bounds. The simulation results show the effectiveness of this method.

Key words: dynamic nonholonomic system; adaptive fuzzy control; sliding-mode control; velocity tracking

1 引言 (Introduction)

近年来, 非完整系统的控制问题受到了越来越多的关注. 这类问题通常由机械系统受到对速度的不可积约束引起, 并且由于这类系统不满足 Brockett 关于光滑反馈收敛的必要条件, 故不存在光滑的纯状态反馈收敛律^[1]. 于是, 研究者们设计出了许多其它的收敛律. 对不考虑动力学特性的非完整运动学系统, 有三类控制器设计方法, 即非光滑控制器, 时变光滑控制器, 以及这两类方法的混合. 非完整运动学系统的输入是广义速度, 但实际系统是动力学系统, 其输入是广义力, 因此有必要根据设计出的运动学收敛律推导出动力学系统的控制律. 许多学者用传统的控制器设计方法在此方面作出了大量有价值的研究, 如滑动模态控制方法、自适应控制方法、齐次范数方法、Backstepping 方法等.

本文研究 n 维不确定非完整动力学系统. 根据速度跟踪的思想, 借助作者在文献[2]提出的确定性非完整运动学系统的不连续状态控制律, 推导出了

不确定非完整动力学系统的智能控制律. 所提出的控制器能使系统的广义坐标与广义速度收敛到原点任意小邻域内, 且控制量是连续变化的, 无需控制增益足够大.

2 问题描述 (Problem statement)

受非完整约束动力学系统的一般方程为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_d\dot{q} + F_s(q) + G(q) + T_d = B_0(q)\tau + J^T(q)\lambda, \quad (1)$$

$$J(q)\dot{q} = 0. \quad (2)$$

其中 $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ 是广义坐标; $H(q)$ 是 $n \times n$ 正定对称阵; $C(q, \dot{q})\dot{q}$ 为向心力与 Coriolis 力项; $F_d\dot{q}$ 与 $F_s(q)$ 分别为动态摩擦与静态摩擦; $G(q)$ 是重力项; T_d 是外界干扰; $B_0(q)$ 是输入变换阵; τ 是 m 维广义力 (控制输入); $J(q)$ 是 $(n-m) \times n$ 行满秩阵, $2 \leq m < n$; λ 是 $n-m$ 维 Lagrange 乘子.

控制任务: 对非完整动力学系统 (1), (2), 设计自适应模糊滑模控制器, 使广义坐标 q 与广义速度 $\dot{q}$ 收敛到预先给定的范围内.

因为 $J(q)$ 是 $(n-m) \times n$ 行满秩矩阵, 所以可找到 m 个 n 维列向量 $g_1(q), \dots, g_m(q)$ 构成 $J(q)$ 零空间的一组基, 记 $g(q) = [g_1(q), \dots, g_m(q)]^T$, 则由式(2) 易知存在 m 维向量 v 使得

$$\dot{q} = g(q)v. \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)中, 非完整动力学系统化为

$$H_1(q)\dot{v} + C_1(q, \dot{q})v + G_1(q) = B_1(q)\tau. \quad (4)$$

式中

$$H_1(q) = g^T(q)H(q)g(q),$$

$$C_1(q, \dot{q}) = g^T(q)H(q)\dot{g}(q) + g^T(q)C(q, \dot{q})g(q),$$

$$G_1(q) =$$

$$g^T(q)(G(q) + T_d) + g^T(q)(F_d g(q) + F_s(gv)),$$

$$B_1(q) = g^T(q)B_0(q).$$

由于一般情况的复杂性, 本文仅讨论式(3)能够化成2输入单链形式的系统. 由文献[3]知, 通过同胚变换链式系统可化为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u_1, \\ \dot{z}_2 = u_2, \\ \dot{z}_i = z_1^{i-1}(z_2 u_1 - z_1 u_2), \quad i = 1, \dots, n-2. \end{cases} \quad (5)$$

引理 1^[2] 对系统(5), 若采用不连续变换 $X = \phi_1(\bar{S})$,

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2; \quad x_j = s_{j-2}/z_1^{j-2} (3 \leq j \leq n),$$

并且控制律取为

$$u_{1d} = -kx_1, \quad u_{2d} = -kx_2 - c^T \bar{Y}.$$

其中 $\bar{Y} = [x_3, \dots, x_n]^T$, 则

i) 可将系统(5)化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -kx_1, \\ \dot{x}_2 = -kx_2 - c^T \bar{Y}, \\ \dot{\bar{Y}} = (A_1 + bc^T)\bar{Y}. \end{cases} \quad (6)$$

其中 $A_1 = \text{diag}\{k, 2k, \dots, (n-2)k\}$, $b = [1, \dots, 1]^T$.

ii) 存在向量 $c \in \mathbb{R}^{n-2}$ 使得矩阵 $A_1 + bc^T$ 的特征值均具有负实部, 从而系统(6)指数稳定, 且 $\bar{S} = [x_1, x_2, S_1, \dots, S_{n-2}]^T$ 指数趋近于0.

本文的主要工作就是利用确定性非完整运动学系统的引理1, 基于速度跟踪原理设计出确定非完整动力学系统的智能控制律. 当考虑了不确定动力学系统后, 控制输入是广义力, 于是设计广义力控制律使得速度 u 趋近于引理1中的 u_d . 定义速度跟踪误差 $S = [S_1, S_2]^T$,

$$S_1 = u_1 - u_{1d}, \quad S_2 = u_2 - u_{2d}.$$

可将非完整动力学系统化为以下更一般的形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -kx_1 + S_1, \\ \dot{Y} = AY + A_r Y S_1 / x_1 + S_2 [1, -b^T]^T, \\ \dot{S} = F(X, S) + B(X)\tau. \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$Y = [x_2, \bar{Y}^T]^T, \quad A = \begin{bmatrix} -k & -c^T \\ 0 & A_1 + c^T b \end{bmatrix}, \quad A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & A_2 \end{bmatrix},$$

$$F(X, S) = -H_3^{-1}(X)[C_3(X, \dot{X})(S + u_d) +$$

$$H_3(X)(\dot{u}_d + S) + G_3(X)],$$

$$B(X) = H_3^{-1}(X)B_3(X), \quad A_2 = \text{diag}\{-1, \dots, -(n-2)\}.$$

由前文不难知道, 本文的控制任务现在转化为: 设计自适应模糊滑模控制器使 X 与 S 收敛到预先给定的范围内.

3 模糊控制器的结构(The structure of fuzzy controller)

共使用2个自适应模糊控制器, 每一个自适应模糊控制器由文献[4]中模糊控制器的一部分与本文所提出的自适应部分组合而成, 其具体结构如下:

第 i ($i = 1, 2$) 个自适应模糊控制器的输入变量是速度跟踪误差 S 的分量 S_i , 其定义域为

$$A_{di} = \{S_i \in \mathbb{R} \mid |S_i| \leq \omega_i, \quad i = 1, 2\}.$$

对任一 S_i , 将其定义域划分为 $2m_i + 1$ 个模糊区间 $A_{i,j}$ ($j = -m_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_i$), 其中 $m_i = [\omega_i/\phi_i] + 1$, $[\omega_i/\phi_i]$ 表示取 ω_i/ϕ_i 的整数部分. 各模糊区间的中心定义为

$$c_{i,j} = j\phi_i, \quad j = -m_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_i. \quad (8)$$

隶属函数均取为等腰三角形(如图1所示), 其表达式为

$$\mu_{A_{i,j}}(S_i) = \begin{cases} \frac{S_i - c_{i,j-1}}{\phi_i}, & \text{当 } c_{i,j-1} \leq S_i \leq c_{i,j}, \\ \frac{c_{i,j+1} - S_i}{\phi_i}, & \text{当 } c_{i,j} \leq S_i \leq c_{i,j+1}. \end{cases} \quad (9)$$

根据模糊区间的划分可知, 第 i 个 FLS 一共有 $N_i = 2m_i + 1$ 条模糊规则, 每一条规则形如

$R_{i,j}$: 如果 $\hat{S}_i$ 是 $A_{i,j}$, 则 $\hat{u}_{Fi}$ 是 $B_{i,j}$,

$$i = 1, 2, \quad j = -m_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_i.$$

其中 $\hat{S}_i$ 是 S_i 模糊化后对应的模糊变量, $\hat{u}_{Fi}$ 是 FLS 的输出, $B_{i,j}$ 是输出模糊集合.

采用单值模糊产生器, 乘积推理与中心模糊平均消除器, 则第 i 个模糊控制器的输出为

$$u_{Fi} = \left(\sum_{j=-m_i}^{m_i} Y_{i,j} \mu_{A_{i,j}}(S_i) \right) / \left(\sum_{j=-m_i}^{m_i} \mu_{A_{i,j}}(S_i) \right). \quad (10)$$

其中 $Y_{i,j}$ 表示输出模糊集合的中心, 定义为

$$Y_{i,j} = -k_{Fi} \cdot j + \theta_{i,j} \triangleq \bar{Y}_{1i,j} + \theta_{i,j}. \quad (11)$$

式中 $k_{Fi} > 0, \theta_{i,j}$ 表示自适应可调参数. 定义

$$Y_{1i} = [\bar{Y}_{1i,-m_i}, \bar{Y}_{1i,-m_i+1}, \dots, \bar{Y}_{1i,m_i}]^T,$$

$$\Theta_i = [\theta_{i,-m_i}, \theta_{i,-m_i+1}, \dots, \theta_{i,m_i}]^T,$$

$$\xi_{i,j}(S_i) = (\mu_{A_{i,j}}(S_i)) / (\sum_{j=-m_i}^{m_i} \mu_{A_{i,j}}(S_i)),$$

$$\Psi_i(S_i) = [\xi_{i,-m_i}(S_i), \xi_{i,-m_i+1}(S_i), \dots, \xi_{i,m_i}(S_i)]^T,$$

则式(10)可简写为

$$u_{Fi} = Y_{1i}^T \Psi_i(S_i) + \Theta_i^T \Psi_i(S_i) \triangleq u_{Fi,1} + u_{Fi,2}.$$

在每一时刻, 因为状态误差变量 S_i 总是位于两个中心点 $c_{i,j}$ 与 $c_{i,j+1}$ 之间(见图1), 所以此刻共有2条模糊规则 R_{i,l_i} ($l_i \in \{-m_i, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_i\} \triangleq \bar{m}_i$) 与 R_{i,l_i+1} 被激发. 从图1所示模糊区间划分与隶属函数的定义可知

$$\mu_{A_{i,j+1}}(S_i) = 1 - \mu_{A_{i,j}}(S_i). \quad (12)$$

因此, 由隶属函数的定义知

$$\begin{cases} \sum_{j=-m_i}^{m_i} \mu_{A_{i,j}}(S_i) = \sum_{j=l_i}^{l_i+1} \mu_{A_{i,j}}(S_i) = \\ \mu_{A_{i,j+1}}(S_i) + \mu_{A_{i,j}}(S_i) = 1, \\ \xi_{i,j}(S_i) = \mu_{i,j}(S_i), \end{cases} \quad (13)$$

$$u_{Fi,1} = \sum_{j=-m_i}^{m_i} \bar{Y}_{1i,j} \mu_{A_{i,j}}(S_i) = \sum_{j=l_i}^{l_i+1} \bar{Y}_{1i,j} \mu_{A_{i,j}}(S_i). \quad (14)$$

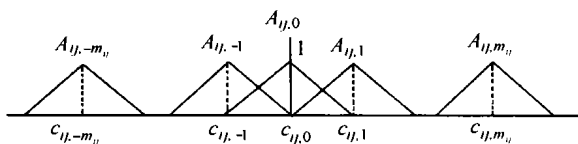


图1 隶属函数 $\mu_{A_{i,j}}(S_i)$

Fig. 1 Membership functions $\mu_{A_{i,j}}(S_i)$

命题 1^[4] 形如式(14)的模糊控制器的输出 $u_{Fi,1}$ 具有下述性质:

当 $|S_i| \leq \phi_i$ 时, $u_{Fi,1} = -k_{Fi} \frac{S_i}{\phi_i}$.

命题 2^[2] 对第 i 个模糊控制器, 由于任一时刻有两条模糊规则 R_{i,l_i} 与 R_{i,l_i+1} 被激发, 故有

$$\max \{ \xi_{i,j}(S_i) \mid j = l_i, l_i + 1, l_i \in \bar{m}_i \} \geq \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} \leq \|\Psi_i(S_i)\| \leq \sqrt{2}.$$

证明(略).

4 主要结论(Main results)

在证明主要结论前先给出一个重要的引理.

引理 2 对线性系统

$$\dot{X} = (A + \bar{A}(t))X + b_1(t),$$

若 $\|\bar{A}(t)\| \leq \bar{a}$, $\|b_1(t)\| \leq \bar{b}_1$, A 的特征值实部均为负, 且实部绝对值均大于 $\bar{a}$, 则 X 指数收敛于以下界中

$$\|X\| \leq \frac{\bar{b}_1}{|\operatorname{Re}(\lambda_{\min}(A))| - \bar{a}}. \quad (15)$$

式中 $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示特征值的实部, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示实部绝对值最小的特征值, $\|\cdot\|$ 指 2-范数(下同). 证明(略).

记 $\mathcal{R}_i = \{S_i \mid |S_i| \leq \phi_i\} (i = 1, 2)$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, $F = [f_1, f_2]^T$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. 对 F 和 B 有估计值 $\hat{F}$ 与 $\hat{B}$, $B = (I + \bar{\Delta})\hat{B}$, $\bar{\Delta}^T = [\delta_1, \delta_2]$, $\delta_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}]^T$. 可用如下定理给出本文的主要结果.

定理 1 对于不确定非完整系统(7), 如果

1) 满足: i) 对 F 和 B 及其估计值 $\hat{F}$ 和 $\hat{B}$, 存在已知函数 $M_i(X, S)$, $D_{ij}(X) (i, j = 1, 2)$, 满足 $|f_i - \hat{f}_i| \leq M_i(X, S) < \infty$, $B = (I + \bar{\Delta})\hat{B}$, $\bar{\Delta}$ 的任一分量 $|\delta_{ij}| \leq D_{ij}(X)$, $I + [\bar{D}_{ij}(X)]$ 为对角占优阵, 并且 $\hat{B}$ 可逆, $\forall X \in \mathbb{R}^n$;

ii) 当 $|S_i| \leq \phi_i$ 时, $|\delta_{ij}| \leq d_{ij} (i, j = 1, 2)$, 其中 d_{ij} 是已知正数;

iii) 系统初值 $|S_i(0)| \leq d_{Si} (i = 1, 2)$, $d_{x1} \leq |x_1(0)| \leq d_{x2}$, $\|Y\| \leq d_y$. 其中 d_{Si} , d_{x1} , d_{x2} , d_y 均是已知正数.

2) 广义力控制律 $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$ 取为

$$\tau = \begin{cases} \hat{B}^{-1}(\bar{U} + U_F - \hat{F}), & \text{当 } S \in \mathcal{R}, \\ \hat{B}^{-1}(U_F - \hat{F}), & \text{当 } S \in \mathcal{R}^c. \end{cases}$$

式中 $\bar{U} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]^T$ 是滑模控制, $\bar{u}_i = -\frac{k_{Di}}{1 - D_{ii}} S_i - K_i(X, S) \operatorname{sgn}(S_i)$, $k_{D1} > d_{S1}/d_{x1} + k$ (k 是 u_d 中的增益系数), $k_{D2} > 0$,

$$K_i(X, S) = \frac{1}{1 - D_{ii}} (\rho_i + \sum_{j=1, j \neq i}^2 D_{ij} U_m), \quad (16)$$

$$\rho_i = |u_{Fi}| + \sum_{j=1}^2 D_{ij} |u_{Fj}| + M_i +$$

$$\sum_{j=1}^2 D_{ij} |\hat{f}_j| + \sum_{j=1, j \neq i}^2 D_{ij} \frac{k_{Dj} |S_j|}{1 - D_{jj}}, \quad (17)$$

$$U_m \geq \max_{i=1,2} \left\{ \frac{\rho_i}{1 - D_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^2 D_{ij}} \right\}, \quad (18)$$

$U_F = [u_{F1}, u_{F2}]^T$ 为式(10)与式(11)定义的模糊控制器.

$$k_{F1} > \frac{\phi_1^2}{(1-d_{11})x_{1\min}} + \frac{k\phi_1}{1-d_{11}},$$

$$x_{1\min} = e^{-kt_{\max}} \left[d_{x1} - \frac{ds_1}{k_{D1} - k} \right],$$

$$t_{\max} = \max \left\{ \frac{1}{k_{D1}} \ln \frac{ds_1}{\phi_1}, \frac{1}{k_{D1}} \ln \frac{ds_2}{\phi_2} \right\}.$$

3) 取第 i 个模糊控制器参数 $\Theta_i (i = 1, 2)$ 的初值 $\Theta_i(0) = 0$, 其自适应律为

$$\dot{\Theta}_i = \begin{cases} -\frac{\Psi_i}{\|\Psi_i\|^2} g_i, & \text{当 } \|\Theta_i\| < M_{fi}, \text{ 或 } \|\Theta_i\| = M_{fi} \\ & \text{且 } \frac{\Theta_i^T \Psi_i}{\|\Psi_i\|^2} g_i \geq 0 \text{ 时,} \\ P \left\{ -\frac{\Psi_i}{\|\Psi_i\|^2} g_i \right\}, & \text{当 } \|\Theta_i\| = M_{fi} \\ & \text{且 } \frac{\Theta_i^T \Psi_i}{\|\Psi_i\|^2} g_i < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$P \left\{ -\frac{\Psi_i}{\|\Psi_i\|^2} g_i \right\} = -\frac{\Psi_i}{\|\Psi_i\|^2} g_i + (\Theta_i + \frac{\Psi_i}{\|\Psi_i\|^2} \bar{k}_i \operatorname{sgn}(S_i)) \frac{\Theta_i^T \Psi_i g_i}{\|\Psi_i\|^2}.$$

其中

$$g_i = [\eta_i + \sqrt{2} \|\Theta_i\| h_i] \operatorname{sgn}(\Theta_i^T \Psi_i + \bar{k}_i \operatorname{sgn}(S_i)) + a_i (\Theta_i^T \Psi_i + \bar{k}_i \operatorname{sgn}(S_i)), \quad \eta_i \geq 0,$$

$$h_i = \frac{1}{\phi_i} [M_i + \sum_{j=1}^2 D_{ij} |\hat{f}_j| + \sum_{j=1, j \neq i}^2 D_{ij} |\bar{u}_j + u_{Fj}| + (1 + D_{ii}) |\bar{u}_i + u_{Fi}|],$$

$$\bar{k}_i = \frac{1}{1 - d_{ii}} (\bar{\rho}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^2 d_{ij} \bar{U}_m),$$

$\bar{\rho}_i >$

$$\max \{ \bar{\rho}_{i1}(X, S) \mid |S_i| \leq \phi_i, i = 1, 2, \}$$

$$|x_1| \leq d_{x2} | \phi_1 / k, \|Y\| \leq d_y + \frac{\sqrt{n-1} \phi_2}{a_0} \},$$

$$\bar{\rho}_{i1}(X, S) = M_i + \sum_{j=1}^2 d_{ij} |\hat{f}_j| + \sum_{j=1, j \neq i}^2 d_{ij} k_{Fj},$$

$$a_0 = |\operatorname{Re}(\lambda_{\min}(A))| - \|A_r\|,$$

$$\bar{U}_m \geq \max_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{\rho}_i}{1 - d_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^2 d_{ij}} \right\},$$

$$a_i \geq \sqrt{2}(1 + d_{ii}) \bar{k}_i / \phi_i, M_{fi} \geq \sqrt{1 + \bar{k}_i^2} + \bar{k}_i,$$

则闭环系统具有如下性能:

i) 自适应参数与控制量均有界

$$\|\Theta_i\| \leq M_{fi},$$

$$\begin{cases} |\bar{u}_i| \leq \frac{1}{1 - D_{ii}(X)} [k_{Di} |S_i| + K_i(X, S)] < \infty, \\ |u_{Fi}| \leq k_{Fi} + \bar{k}_i, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{当 } S \in \mathcal{R}, \\ \text{当 } S \in \mathcal{R}. \end{matrix}$$

ii) 速度跟踪误差满足

$$|S_i| \leq \frac{\sqrt{2}(1 + d_{ii}) \bar{k}_i}{a_i}, \quad i = 1, 2.$$

iii) X 指数收敛于如下的界中

$$\begin{cases} |x_1| \leq \frac{\sqrt{2}(1 + d_{11}) \bar{k}_1}{a_1 k}, \\ \|Y\| \leq \frac{2(1 + d_{22}) \bar{k}_2}{a_2 a_0} \sqrt{n-1}. \end{cases} \quad (20)$$

证明详见文献[2].

5 仿真算例 (Simulation example)

一类移动机器人的动力学模型为

$$\begin{cases} I_0 \ddot{\theta} = \frac{L}{r} (\tau_1 - \tau_2) + \zeta_1, \\ m \ddot{z}_1 = \lambda \cos \theta - \frac{1}{r} (\tau_1 + \tau_2) \sin \theta + \zeta_2, \\ m \ddot{z}_2 = \lambda \sin \theta + \frac{1}{r} (\tau_1 + \tau_2) \cos \theta + \zeta_3. \end{cases} \quad (21)$$

其中 $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ 为平面惯性坐标, θ 为机器人两驱动轮的轴线相对惯性系 $\bar{z}_1$ 轴方向的夹角, m 为机器人的质量, I_0 是机器人绕过其质心的垂直轴的转动惯量, r 为驱动轮半径, $2L$ 为两驱动轮之间的长度, $\tau_i (i = 1, 2)$ 为作用在两驱动轮轴向上的控制力矩, $\zeta_i (i = 1, 2, 3)$ 为干扰及建模误差引起的不确定项, λ 为驱动轮轴向所受的约束反力. 它所受的非完整约束为

$$\dot{\bar{z}}_1 \cos \theta + \dot{\bar{z}}_2 \sin \theta = 0.$$

记 $q = (\theta, \bar{z}_1, \bar{z}_2)^T$, 上述移动机器人可写为式(1)与式(4)的形式, 其中

$$H = \operatorname{diag}(I_0, m, m), \quad B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} L & -L \\ -\sin \theta & -\sin \theta \\ \cos \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$C = 0, \quad G = 0, \quad J(q) = [0, \cos \theta, \sin \theta],$$

$$F_d \dot{q} = 0, \quad F_s = 0, \quad T_d = -\zeta.$$

定义 $g(q)$ 为

$$g(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

则有

$$\dot{q} = g(q)v, M_1 = \text{diag}(I_0, m),$$

$$B_1 = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} L & -L \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = 0, G_1 = 0.$$

采用如下的全局同胚变换

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ -q_2 \sin q_1 + q_3 \cos q_1 \\ q_2 \cos q_1 + q_3 \sin q_1 \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

可将非完整运动学系统化为链式系统,于是整个非完整系统化为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u_1, \dot{z}_2 = u_2, \dot{z}_3 = z_2 u_1, \\ H_2 \ddot{u} + C_2 \dot{u} + G_2 = B_2 \tau. \end{cases}$$

相继采用同胚变换

$$z_1 = z_1, z_2 = z_2, s_1 = 2z_3 - z_1 z_2$$

与不连续变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1, x_2 = z_2, x_3 = s_1/z_1, \\ S_1 = u_1 - u_{1d}, S_2 = u_2 - u_{2d}, \end{cases}$$

最终将非完整系统(21)化为式(7)的形式,其中

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{mI_0} \begin{bmatrix} (m^2 x_2 z_3 u_1 - m^2 z_3 u_1)(S_1 + u_{1d}) \\ (-m^2 x_2 z_3^2 u_1 + mI_0 z_3 u_1 + m^2 z_3^3 u_1)(S_2 + u_{2d}) \end{bmatrix} +$$

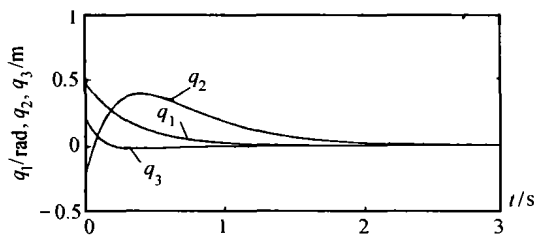


图2 q 的响应曲线
Fig. 2 Response curves of q

参考文献(References):

- [1] BLOCH A M, REYHANOGU M, McCLAMROCH N H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(11): 1746-1757.
- [2] 王声远. 不确定非完整动力学系统模糊控制研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2001.
(WANG S Y. *Fuzzy control research of uncertain nonholonomic dynamic systems* [D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001.)
- [3] MURRAY R M, SASTRY S S. Nonholonomic motion planning:

$$\frac{1}{mI_0} \begin{bmatrix} -m & -m z_3 \\ m z_3 & I_0 + m z_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 - z_3 \zeta_2 \sin x_1 + z_3 \zeta_3 \cos x_1 \\ -\zeta_2 \sin x_1 + \zeta_3 \cos x_1 \end{bmatrix} + \ddot{u}_d + S,$$

$$B = \frac{1}{mI_0} \begin{bmatrix} mL & -mL \\ I_0 - m z_3 L & I_0 + m z_3 L \end{bmatrix}.$$

上式中 $z_3 = x_1(x_2 + x_3)/2$.

本例中移动机器人模型有 $L = r = 1 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $I_0 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $\zeta_i = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ ($i = 1, 2, 3$).

假设 $D_{ij}(X) = 0.2$ ($i, j = 1, 2$), 外界干扰不确定项的上界 $d = [1, 1, 1]^T$. 在仿真中, 质量的估计值 $\hat{m} = 0.8 \text{ kg}$, 转动惯量的估计值 $\hat{I}_0 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 可以验证 $\bar{\Delta}$ 的任一分量 $\delta_{ij} \leq D_{ij}(X) = 0.2$. 参数依次取 $k = 3$, $c = -6$, $k_{D1} = 6$, $k_{F1} = 5$. 另外, $k_{D2} = 2$, $k_{F2} = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 10$. $\phi_1 = \phi_2 = 0.3$, 各模糊区间的中心均在 $[-1.5, 1.5]$ 上取为 11 个. 若要求 $|x_i| \leq 0.02$ ($i = 1, 2, 3$), 则根据式(20) 取 $a_1 = 110$, $a_2 = 50$. 初始位置 $X(0) = [0.5, -0.3, 0.7]^T$, 初始速度误差 $S = [0.5, -0.45]^T$. 图2与图3给出了坐标 q 下的仿真过程曲线. 从图中可以看出闭环系统性能满足控制要求.

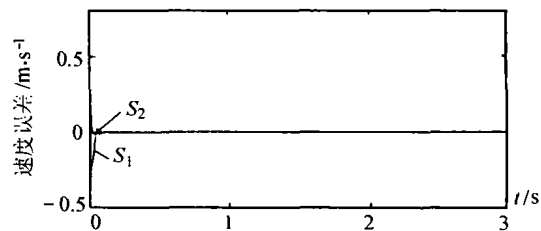


图3 速度误差响应曲线
Fig. 3 Response curves of velocity error

- steering using sinusoids [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(5): 700-716.
- [4] CHEN C S, CHEN W L. Analysis and design of a stable fuzzy control system [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 96(1): 21-35.

作者简介:

王声远 (1972—), 男, 获控制理论与应用专业博士学位. 主要研究方向为非完整动力学系统, 模糊控制. E-mail: wangsy@jbu.com.cn;

霍伟 (1951—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性动力学系统控制及智能控制研究.