文章编号：1000-8152(2003)03-0432-05

基于 Volterra 泛函级数的非线性系统的鲁棒辨识

王文正[1]，何开锋[1]，欧 文[2]，韩崇昭[2]
(1.中国空气动力研究与发展中心，四川 绵阳 621000；2.西安交通大学 电子与信息工程学院，陕西 西安 710049)

摘要：针对弱非线性系统的鲁棒建模问题，基于 Volterra 泛函级数，结合集员辨识理论，提出了广义频率响应函数的鲁棒辨识方法，形成了一套较完整的弱非线性系统的鲁棒建模方法.仿真结果表明该方法是行之有效的.

关键词：Volterra 泛函级数；广义频率响应函数；集员辨识；鲁棒辨识；H_∞ 辨识
中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

Robust identification for nonlinear system based on Volterra series

WANG Wen-zheng[1], HE Kai-feng[1], OU Wen[2], HAN Chong-zhao[2]
(1. China Aerodynamic Research and Development Center, Sichuan Mianyang 621000, China;
2. Institute of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Shanxi Xi'an 710049, China)

Abstract: For the robust modeling problem of weakly nonlinear system, based on Volterra series, a robust identification method for generalized frequency response function is presented by use of set membership identification theory. Then a systematic robust modeling method for weak nonlinear system is raised. Simulation results show its effectiveness.

Key words: Volterra series; generalized frequency response function; set membership identification; robust identification; H_∞ identification

1 引言(Introduction)

鲁棒控制理论由于它所具有的突出优点，近年来已成为自动控制理论及工程应用领域研究的热门话题之一.鲁棒控制理论不仅要求已知被控对象的名义模型，而且要求掌握名义模型与真实模型的误差界.面向鲁棒控制的系统辨识(简称鲁棒辨识)正是研究这类模型建立的辨识方法.目前，这方面的研究已取得一定的进展.如 LaMaire 等人[1]给出的将时域数据映射成一个频域模型，同时得到频域上该模型与真实模型的一个误差界的方法；Helmicki 等人[2]给出的 H_∞ 辨识的两步非线性算法；Partington[3]给出的 H_∞ 辨识的线性算法；Zames 等人[4]给出的时域 H_∞ 辨识算法.

以上算法的主要缺点是：一是只能处理线性系统的鲁棒辨识问题；二是给出的误差界偏保守.能否给出较紧的误差界对随后设计的鲁棒控制器的性能影响较大.Volterra 泛函级数能够以任意精度逼近紧集上的连续函数，并且其核(特别是频域核—广义频率响应函数)具有鲜明的物理意义.本文以 Volterra 泛函级数为基础，提出一种弱非线性系统的鲁棒辨识方法；同时利用集员辨识方法[5]，不断缩小被估计核的集合，保证给出较紧的误差界.

2 Volterra 泛函级数截断误差估计(Truncated error estimation of Volterra series)

模型的不确定性主要受两方面原因的影响：第一，未测量到的外界输入的影响(扰动、测量误差等)；第二，辨识的模型与真实模型结构间的差别(这类误差被称为结构误差).由于所采用的数学模型不可能完全描述系统的特性，总有一部分未建模动态未包含在所建立的模型结构内，因此结构误差总是存在的.从理论上讲，无穷阶的 Volterra 泛函级数能够精确地描述连续非线性函数所表征的非线性系统，但在实际应用中一般采用有限记忆长度的三阶 Volterra 级数，截断的 Volterra 泛函级数必然会引起结构误差.但对弱非线性系统三阶 Volterra 级数已具有足够的精度.基于以上考虑，Volterra 泛函级数离散时域形式表示如下

收稿日期：2001-02-14；收修改稿日期：2002-06-13.

$$z(n)=y(n)+y^u(n)+e(n)=\sum_{i=0}^{L-1}h_1(i)u(n-i)+\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=i}^{L-1}s_2(i,j)h_2(i,j)u(n-i)u(n-j)+\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=i}^{L-1}\sum_{k=j}^{L-1}s_3(i,j,k)h_3(i,j,k)u(n-i)u(n-j)u(n-k)+y^u(n)+e(n),\ n=1,\cdots,N. \tag{1}$$

其中, $z(n)$, $y(n)$ 为三阶 Volterra 级数的模型输出; $y^u(n)$ 为结构误差(未建模动态对输出的贡献); h_1, h_2 和 h_3 分别为 Volterra 级数的一阶、二阶和三阶时域核; u 为输入; s_2, s_3 为系数.

下面分析 $y^u(n)$ 的大小. 设 $\hat{u}$ 是时域输入信号 u 的傅氏变换. 频域的 H_P 范数和 H_∞ 范数分别定义为

$$\|\hat{u}\|_p=\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\omega)|^p\right]^{1/p}\leqslant\infty,$$

$$\|\hat{u}\|_\infty=\sup_{\omega\in}|\hat{u}(\omega)|\leqslant\infty.$$

n 阶 GFRF(H_n)的 H_∞ 范数定义为

$$\|H_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)\|_\infty=\sup_{\omega_1,\cdots,\omega_n\in}|H_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)|\leqslant\infty.$$

引理 1　假如二阶 GFRF —— $H_2(\omega_1,\omega_2)$ 的 H_∞ 范数 $\|H_2(\omega_1,\omega_2)\|_\infty$ 存在,对于 $\hat{u}\in H_1\cap H_2$, 且

$$\hat{y}_2(\omega)=(2\pi)^{-1}\sum_{\omega_2=-\infty}^{\infty}H_2(\omega-\omega_2,\omega_2)\hat{u}(\omega-\omega_2)\hat{u}(\omega_2), \tag{2}$$

那么

$$\|\hat{y}_2\|_2\leqslant\|H_2(\omega_1,\omega_2)\|_\infty\|\hat{u}\|_1\|\hat{u}\|_2. \tag{3}$$

证明从略.

引理 2　假如 n 阶 GFRF —— $H_n(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 的 H_∞ 范数 $\|H_n(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\|_\infty$ 存在, $\hat{u}\in H_1\cap H_2$, 且

$$\hat{y}_n(\omega)=(2\pi)^{-(n-1)}\sum_{\omega_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{\omega_n=-\infty}^{\infty}H_n(\omega-\omega_2-\cdots-\omega_n,\omega_2,\cdots,\omega_n)\cdot\hat{u}(\omega-\omega_2-\cdots-\omega_n)\cdot\hat{u}(\omega_2)\cdots\hat{u}(\omega_n), \tag{4}$$

那么

$$\|\hat{y}_n\|_2\leqslant\|H_n(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\|_\infty\cdot\|\hat{u}\|_1^{n-1}\|\hat{u}\|_2. \tag{5}$$

证明从略.

定理 1　假如非线性系统存在 Volterra 级数解, 控制输入平方可积,它的傅氏变换 $\hat{u}\in H_1\cap H_2$, 即存在 $LU>0$, 使得

$$\|\hat{u}\|_2\leqslant LU\wedge\|\hat{u}\|_1\leqslant LU, \tag{6}$$

并且假设 GFRF 的 H_∞ 范数按指数衰减,即

$$\|H_n(\mathrm{j}\omega_1,\mathrm{j}\omega_2,\cdots,\mathrm{j}\omega_n)\|_\infty\leqslant M\rho^n,$$

$$n=1,\cdots,\infty,\ \exists M\geqslant0,\ \rho<1\wedge\rho<1/LU,$$

那么从 m 阶截断 Volterra 级数引起的误差为

$$\|y^u\|_2\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M\rho_1^m}{1-\rho_1}. \tag{7}$$

其中 $\rho_1=\rho\cdot LU$.

证　因非线性系统存在 Volterra 级数解,则

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n(t),\ y^u(t)=\sum_{n=m}^{\infty}y_n(t),$$

$$\hat{y}^u(\omega)=F(y^u(t))=\sum_{n=m}^{\infty}F(y_n(t))=\sum_{n=m}^{\infty}\hat{y}_n(\omega),$$

$$\hat{y}_n(\omega)=(2\pi)^{-(n-1)}\sum_{\omega_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{\omega_n=-\infty}^{\infty}H_n(\omega-\omega_2-\cdots-\omega_n,\omega_2,\cdots,\omega_n)\cdot\hat{u}(\omega-\omega_2-\cdots-\omega_n,\omega_2,\cdots,\omega_n)\cdot\hat{u}(\omega_2)\cdots\hat{u}(\omega_n).$$

根据引理 2 和 Parseval 公式有

$$\|y^u\|_2=(2\pi)^{-1}\|\hat{y}^u\|_2\leqslant(2\pi)^{-1}\sum_{n=m}^{\infty}\|\hat{y}_n(\omega)\|_2\leqslant(2\pi)^{-1}\sum_{n=m}^{\infty}\|H_2(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\|_\infty\cdot\|\hat{u}\|_1^{n-1}\cdot\|\hat{u}\|_2\leqslant(2\pi)^{-1}\sum_{n=m}^{\infty}M\rho^n\cdot LU^n=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M\rho_1^m}{1-\rho_1}.$$

证毕.

显然,假定记忆长度足够长,式(1)中的截断误差为

$$\|y^u\|_2\leqslant\varepsilon^u=\frac{1}{2\pi}\frac{M\rho_1^4}{1-\rho_1}. \tag{8}$$

3　时域核的集员辨识(Set-membership identification for kernel of time field)

把考虑截断误差(即结构误差)的式(1)写成矩阵形式有

$$Z=P\theta+Y^u+E. \tag{9}$$

其中, Z 是以 $z(n)$ 为分量的向量, Y^u 是以 $y^u(n)$ 为分量的向量, E 是以 $e(n)$ 为分量的向量, θ 是待辨识的 Volterra 级数时域核构成的向量,即

$$\theta=[h(0),\cdots,h(L-1),h(0,0),\cdots,h(L-1,L-1),h(0,0,0),\cdots,h(L-1,L-1,L-1)]^{\mathrm{T}}.$$

L 为 Volterra 级数的记忆长度, P 是对应于 θ 的已知系数矩阵. 设观测噪声的功率是有界的,即

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\|E\|_2 \leqslant \varepsilon^E,\ \exists\,\varepsilon^E \geqslant 0. \tag{10}$$

利用式(9)和式(10)可得

$$\|Z - P\theta\|_2 = \|Y^u + E\|_2 \leqslant \|Y^u\|_2 + \|E\|_2 \leqslant \varepsilon^u + \sqrt{N}\varepsilon^E. \tag{11}$$

于是,集合

$$FS = \{\theta \in \mathbb{R}^{L3}: \|Z - P\theta\|_2 \leqslant \varepsilon^u + \sqrt{N}\varepsilon^E\} \tag{12}$$

包含所有的与观测数据、测量噪声的先验信息和结构误差的先验信息相一致的 Volterra 级数的时域一阶、二阶和三阶核.这个集合称为 Volterra 级数的时域一阶、二阶和三阶核的可行集(feasible set).集员辨识就是求解这个可行集的方法,详细求解过程可参见文献[5].

4 广义频率响应函数的 H_∞ 辨识(H_∞ identification for generalized frequency response function)

H_∞辨识误差(局部误差)定义为考虑所有可行的时域一阶、二阶和三阶核 h_1,h_2 和 h_3,在最差情况下的相应阶次的广义频率响应函数的误差(即误差的 H_∞范数).定义一阶 GFRF 的 H_∞辨识误差为

$$J_1(\Phi) = \sup_{h_1=\theta^1 \in FS} \|H_1(h_1,\omega) - H_1(\Phi(Z),\omega)\|_\infty. \tag{13}$$

定义二阶 GFRF 的 H_∞辨识误差为

$$J_2(\Phi) = \sup_{h_2=\theta^2 \in FS} \|H_2(h_2,\omega_1,\omega_2) - H_2(\Phi(Z),\omega_1,\omega_2)\|_\infty. \tag{14}$$

定义三阶 GFRF 的 H_∞辨识误差为

$$J_3(\Phi) = \sup_{h_3=\theta^3 \in FS} \|H_3(h_3,\omega_1,\omega_2,\omega_3) - H_3(\Phi(Z),\omega_1,\omega_2,\omega_3)\|_\infty. \tag{15}$$

最小可能达到的 H_∞辨识误差 R 称为信息半径,

$$R = \inf_{\Phi} J(\Phi). \tag{16}$$

利用文献[6]的主要结果,最小二乘法估计

$$\theta^* = \Phi^{LS}(Z) = (P^{\mathrm T}P)^{-1}P^{\mathrm T}Z \tag{17}$$

是使 H_∞辨识误差达到最小的最优辨识算法

$$R = J(\Phi^{LS}) \leqslant J(\Phi),\ \forall\,\Phi. \tag{18}$$

下面确定 R 的值.定义

$$F_1(\omega) = \begin{bmatrix} 1, \mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm j\omega}], \mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm j2\omega}], \cdots, \mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm jL\omega}], 0, \cdots, 0 \\ 0, \mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm j\omega}], \mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm j2\omega}], \cdots, \mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm jL\omega}], 0, \cdots, 0 \end{bmatrix},$$

$$F_2(\omega_1,\omega_2) = \begin{bmatrix} 0,\cdots,0,1,\mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm j\omega_2}],\cdots,\mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm jL\omega_2}], \\ 0,\cdots,0,1,\mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm j\omega_2}],\cdots,\mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm jL\omega_2}], \end{bmatrix.$$
$$\begin{matrix} \mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm j(\omega_1+\omega_2)}],\cdots,\mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm jL(\omega_1+\omega_2)}],0,\cdots,0 \\ \mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm j(\omega_1+\omega_2)}],\cdots,\mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm jL(\omega_1+\omega_2)}],0,\cdots,0 \end{bmatrix},$$

$$F_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \begin{bmatrix} 0,\cdots,0,1,\mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm j\omega_3}],\cdots,\mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm jL\omega_3}], \\ 0,\cdots,0,1,\mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm j\omega_3}],\cdots,\mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm jL\omega_3}], \end{matrix.$$
$$\begin{matrix} \mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm j(\omega_2+\omega_3)}],\cdots,\mathrm{Re}[\mathrm e^{-\mathrm jL(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}] \\ \mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm j(\omega_2+\omega_3)}],\cdots,\mathrm{Im}[\mathrm e^{-\mathrm jL(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}] \end{bmatrix}.$$

定理2显示了怎样确定信息半径 R.

定理 2 对于式(1)的系统,信息半径分别为

$$R_1 = J_1(\Phi^{LS}) = \sup_{0\leqslant\omega\leqslant\pi} \bar r\{F_1(\omega)(P^{\mathrm T}P)^{-1}F_1^{\mathrm T}(\omega)\}\cdot\sqrt{N[(\varepsilon^u/\sqrt{N}+\varepsilon^E)^2-\varepsilon_r^2]},$$

$$R_2 = J_2(\Phi^{LS}) = \sup_{0\leqslant\omega_1,\omega_2\leqslant\pi} \bar r\{F_2(\omega_1,\omega_2)(P^{\mathrm T}P)^{-1}F_2^{\mathrm T}(\omega_1,\omega_2)\}\cdot\sqrt{N[(\varepsilon^u/\sqrt{N}+\varepsilon^E)^2-\varepsilon_r^2]},$$

$$R_3 = J_3(\Phi^{LS}) = \sup_{0\leqslant\omega_1,\omega_2,\omega_3\leqslant\pi} \bar r\{F_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3)(P^{\mathrm T}P)^{-1}F_3^{\mathrm T}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\}\cdot\sqrt{N[(\varepsilon^u/\sqrt{N}+\varepsilon^E)^2-\varepsilon_r^2]}.$$

其中,$\bar r=(\cdot)$ 表示对称正定矩阵$(\cdot)$最大特征值的平方根,

$$\varepsilon_r^2 = (1/N)(Z-P\theta^*)^{\mathrm T}(Z-P\theta^*).$$

证明从略.

5 仿真算例(Simulation example)

考虑如下非线性模型

$$z(t) = -0.64x(t) + x(t-2) + 0.9x^2(t) + x^2(t-1) + e(t).$$

输入信号取伪随机信号,噪声为在区间[-0.03, 0.03]的均匀分布的白噪声,数据点数取512点.模型结构由模型辨识方法获得,若与已知结构一致,则在该仿真算例中没有结构误差,而仅有测量噪声引起的随机误差.

图1~图4给出了上述模型中对应时域核的区间估计的收敛过程(仅给出了前150个点的收敛过程,其余与此类同).其中,横坐标为采用的数据点数,纵坐标为时域核的值,无单位.从图中可以看出,核的估计区间随数据点数的增加而不断缩小,且都包含核的真值.由此可见,集员辨识方法以较紧的集合给出了 Volterra 级数的核估计,为下一步以较紧的误差界给出广义频率响应函数的 H_∞估计打下了基础.

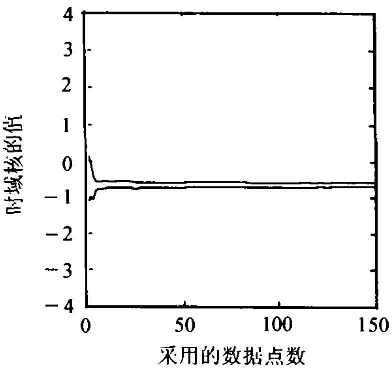

图 1　$h_1(0)$的区间收敛过程
Fig. 1　Interval convergence process of $h_1(0)$

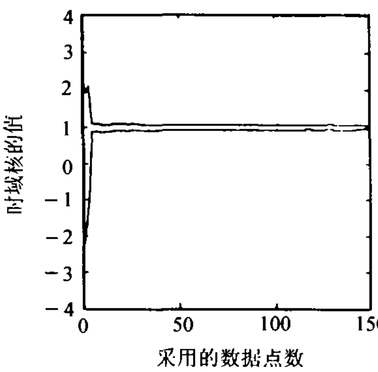

图 2　$h_2(0)$的区间收敛过程
Fig. 2　Interval convergence process of $h_2(0)$

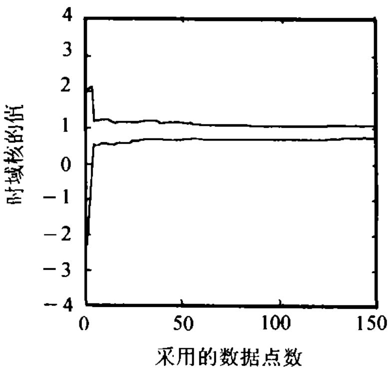

图 3　$h_2(0,0)$的区间收敛过程
Fig. 3　Interval convergence process of $h_2(0,0)$

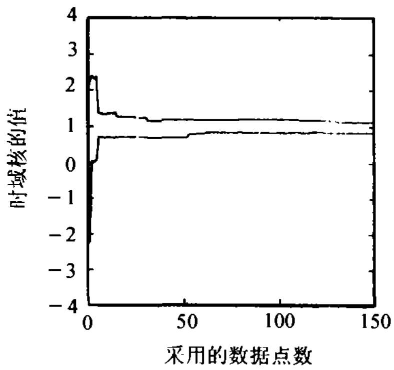

图 4　$h_2(1,1)$的区间收敛过程
Fig. 4　Interval convergence process of $h_2(1,1)$

图 5 和图 6 分别给出了一阶频率响应函数的频率响应及名义模型和实际模型在各频率点上相应的 H_∞ 误差界;图 7 和图 8 分别给出了二阶频率响应函数的频率响应及名义模型和实际模型在各频率点上相应的 H_∞ 误差界.其中,水平坐标为角频率/rad·s^{-1},垂直坐标为核的频率响应,无单位.

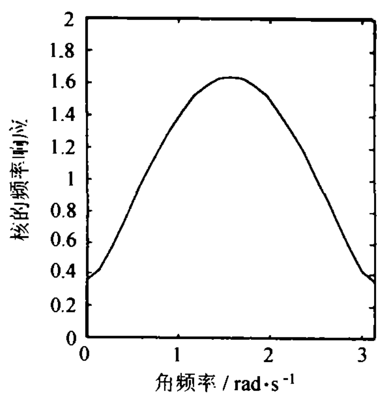

图 5　一阶名义模型的频率响应
Fig. 5　Frequency response of the first order nominal model

从图 5 和图 6 可以看出,一阶频率响应函数的误差界与其名义模型幅值相比小得多;同样,从图 7 和图 8 可以看出,二阶频率响应函数的误差界与其名义模型幅值相比小得多.由此可见,本文方法不仅给出了比较合适的名义模型,而且估计的名义模型与真实模型的 H_∞ (Worst-Case)误差也较小,为后续设计出高性能的控制器打下了基础.

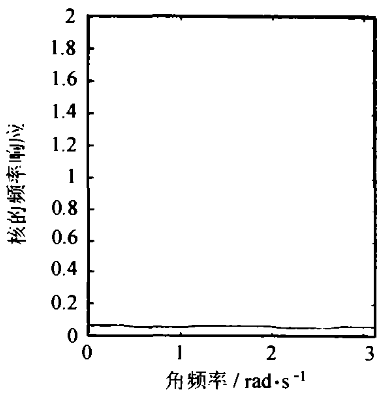

图 6　一阶名义模型的 H_∞ 误差界
Fig. 6　The H_∞ error bound of the first order nominal model

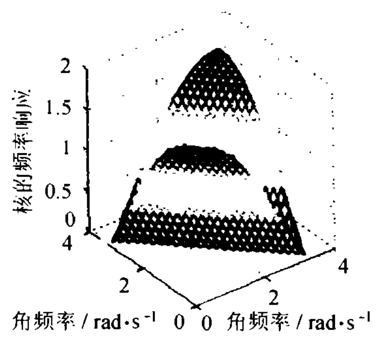

图7 二阶名义模型的频率响应
Fig. 7 Frequency response of the second order nominal model

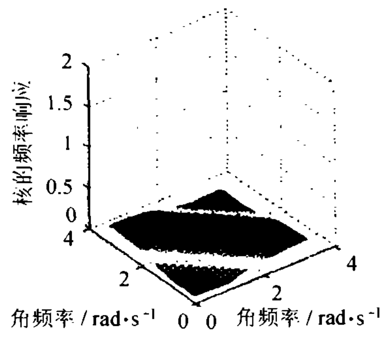

图8 一阶名义模型的 H_∞ 误差界
Fig. 8 The H_∞ error bound of the second order nominal model

6 结论(Conclusion)

本文利用Volterra泛函级数,结合集员辨识方法,将集员辨识方法获得的Volterra泛函级数的时域核的集合估计转换成名义广义频率响应函数的频率响应以及名义模型相对于实际模型的Worst-Case误差界估计,形成了一套基于Volterra泛函级数比较完整的弱非线性系统的鲁棒辨识方法.不仅如此,集员辨识还保证了所获得的Worst-Case误差界是较紧的.仿真算例表明,该方法行之有效.

参考文献(References):

[1] LAMAIRE R O, VALAVANI L, ATHANS M, et al. Frequency domain estimator for use in adaptive control systems [J]. *Automatica*, 1991, 27(1): 23 - 38.

[2] HELMICKI A J, JACOBSON C A. Control oriented system identification: a worst-case/deterministic approach in H_∞ [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(10):1163 - 1176.

[3] PARTINGTON J R. Worst-case errors of linear algorithms for identication in H_∞ [J]. *Int J Control*, 1998, 69(2):347 - 352.

[4] ZAMES G, LIN L, WANG L Y. Fast identification *n*-widths and uncertainty principles for :TI and slowly varying systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1827 - 1838.

[5] 王文正.集员辨识及在飞行器气动参数的应用[D].西安:西北工业大学,1996.
(WANG Wenzheng. *Set membership identification and its application to aerodynamic parameter identification for flight Vehicle* [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnic University, 1996.)

[6] GIARRE L, MILANESE M, TARAGNA M. H_∞ identification and model quality evaluation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(2):188 - 199.

作者简介:

王文正 (1968 —),男,1996年在西北工业大学航天工程学院获博士学位,1996年至1998年在西安交通大学自动控制流动站做博士后研究工作,现为中国空气动力研究与发展中心副研究员.主要研究领域:系统辨识和飞行控制. E-mail;

何开锋 (1963 —),男,1984年在国防科学技术大学获学士学位,现为中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所研究员、总工程师.主要研究领域:系统辨识和飞行性能评估;

欧 文 (1969 —),女,1993年毕业于南京大学,获硕士学位,现为西安交通大学电子与信息工程学院讲师.主要研究领域:过程控制;

韩崇昭 (1943 —),男,1968年毕业于西安交通大学电机工程系,1981年毕业于中国科学院研究生院并获硕士学位,现为西安交通大学电子与信息工程学院副院长,教授,博士生导师.研究兴趣为随机与自适应控制理论,工业过程控制与稳态优化,非线性频域分析等.