

含未知输入的广义系统的状态与输入估计

孙丽瑛¹, 程兆林²

(1. 济南大学 理学院, 山东 济南 250002; 2. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 研究了含未知输入的广义系统的输入解耦观测器设计问题. 在系统脉冲能控的条件下通过系统输入-状态对的非奇异变换, 把此问题等价地转化为正常状态空间系统的相应问题. 用大家熟知的方法设计正常状态空间系统的观测器, 从而得到广义系统的输入解耦观测器. 然后用广义系统的观测器状态和系统输出的线性组合渐近估计系统的状态与未知输入.

关键词: 未知输入; 状态与输入估计; 输入解耦观测器

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

State and input estimation for singular systems with unknown input

SUN Li-ying¹, CHENG Zhao-lin²

(1. School of Science, Jinan University, Shandong Jinan 250002, China;

2. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Shandong Jinan 250100, China)

Abstract: The problem of input decoupled observer design for singular linear systems with unknown input is discussed. When the system is impulsively controllable, an equivalent problem for standard state space systems is derived from nonsingular transformation of input-state for systems. An observer of standard state space systems is designed by using well-known techniques, so the input decoupled observer of the singular linear systems is obtained. Finally the state and unknown input of the singular linear systems are asymptotically estimated using the state of the observer and outputs of the systems.

Key words: unknown inputs; state and input estimation; input decoupled-observer

1 引言(Introduction)

关于含未知输入的线性系统的观测器设计问题, 最近二十多年来引起许多研究者的广泛重视. 由于许多情况下扰动或输入不可测量, 因此研究这个问题无论在理论上还是在工程实践中都有重要意义. 对正常状态空间系统与广义系统来说, 关于状态的估计已有不少优秀成果^[1~3], 但对未知输入的估计, 所得到的结果还不理想. Hou 和 Patton(Automat-ica, 1998)^[4]所得到的观测器含有系统的输出导数, 因而对于噪声本质上是敏感的. Corless 和 Tu(Auto-matica, 1998)^[5]所构造的观测器虽不含有系统的输出导数, 但观测器的输出不能渐近逼近系统输入. 本文讨论含未知输入广义系统的状态和输入估计, 所设计的观测器不含系统的输出导数, 并且观测器的二个输出各自分别渐近逼近系统状态和输入.

2 问题的描述与转化(Description and trans-formation of the problem)

考虑广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bf(t), \\ y = Cx + Df(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $x, y, f(t)$ 分别为 n 维状态矢量, q 维输出矢量, p 维未知输入矢量, E 是奇异矩阵, $\text{rank } E = r < n$, 且系统(1)含正则束, 即 E, A 满足 $\det(sE - A) \neq 0$, 熟知, 这类系统的解关于相容初值具唯一性. 本文的目的是设计如下形式的观测器

$$\begin{cases} \dot{z} = Hz + Jy, \\ \hat{x} = Kz + Ty, \\ \hat{f}(t) = Gz + Qy, \end{cases} \quad (2)$$

使得

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x} - x\| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{f}(t) - f(t)\| = 0, \quad \forall x(0), z(0). \end{cases} \quad (3)$$

其中 z 是观测器的 r 维状态矢量, $\hat{x}, \hat{f}(t)$ 是观测器的输出.

为讨论上述观测器设计, 对系统(1)作如下假设:

假设 1

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ E & A & B \end{bmatrix} = n + r. \quad (4)$$

假设 2

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ E & A & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = n + p + r. \quad (5)$$

假设 3

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - sE & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re } s \geq 0. \quad (6)$$

其中 $\mathbb{C}$ 表示复数集.

注 1 对于含正则束的广义系统,假设 1 成立等价于系统 (E, A, B) 脉冲能控,假设 3 成立则等价于系统 (E, A, B, C) 的传递函数的传输零点全部位于左半平面,这由

$$\begin{aligned} n + p &= \text{rank} \begin{bmatrix} A - sE & B \\ C & D \end{bmatrix} = \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & C(sE - A)^{-1}B + D \end{bmatrix} = \\ &= n + \text{rank} (C(sE - A)^{-1}B + D), \quad \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re } s \geq 0 \end{aligned}$$

等价于

$$\text{rank} (C(sE - A)^{-1}B + D) = p, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re } s \geq 0 \quad (7)$$

即知.假设 2 的引进是为了便于设计输入解耦观测器,并使观测器的输出渐近逼近系统未知输入.显然,假设 2 成立的必要条件为系统 (E, A, C) 脉冲能观.

注意到 $\text{rank } E = r < n$,故存在非奇异矩阵 M , $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$,使得

$$\begin{cases} MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \\ MB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CN = [C_1 \quad C_2], \\ x = N\hat{x}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} x_1 &\in \mathbb{R}^r, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}, \\ A_1 &\in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad A_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}, \\ A_3 &\in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}, \quad A_4 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}, \\ B_1 &\in \mathbb{R}^{r \times p}, \quad B_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times p}, \\ C_1 &\in \mathbb{R}^{q \times r}, \quad C_2 \in \mathbb{R}^{q \times (n-r)}, \end{aligned}$$

以 M, N 为变换矩阵,将系统(1) r. s. e. (restricted

system equivalence)于下述系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + B_1 f(t), \\ 0 = A_3 x_1 + A_4 x_2 + B_2 f(t), \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + Df(t). \end{cases} \quad (9)$$

熟知^[6],假设 1 等价于

$$\text{rank} [A_4 \quad B_2] = n - r (\text{行满秩}). \quad (10)$$

式中 A_4, B_2 如式(8)所示,故存在非奇异矩阵 $P \in \mathbb{R}^{(n-r+p) \times (n-r+p)}$,使得

$$[A_4 \quad B_2]P = [I_{n-r} \quad 0]. \quad (11)$$

记

$$\begin{cases} P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} A_2 & B_1 \\ C_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_2 & \bar{D} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} P_{11} &\in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}, \quad P_{12} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times p}, \\ P_{21} &\in \mathbb{R}^{p \times (n-r)}, \quad P_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \\ \bar{A}_2 &\in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}, \quad \bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{r \times p}, \\ \bar{C}_2 &\in \mathbb{R}^{q \times (n-r)}, \quad \bar{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}. \end{aligned}$$

对系统(9)的输入-状态对作以下非奇异变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{f}(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

显然,若 $x_1(t), x_2(t), f(t)$ 在 $t \geq 0$ 满足方程(9),则其在满秩映照式(13)下的原像 $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{f}(t)$ 在 $t \geq 0$ 满足下述方程:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \bar{A}_1 \tilde{x}_1 + \bar{B}_1 \tilde{f}(t), \\ \tilde{x}_2 = -A_3 \tilde{x}_1, \\ y = \bar{C}_1 \tilde{x}_1 + \bar{D} \tilde{f}(t). \end{cases} \quad (14)$$

式中

$$\bar{A}_1 = A_1 - \bar{A}_2 A_3, \quad \bar{C}_1 = C_1 - \bar{C}_2 A_3, \quad (15)$$

反之亦然.注意,系统(14)是正常状态空间系统,于是,含未知输入 $f(t)$ 的广义系统(1)的观测器设计问题,即转化为含未知输入 $\tilde{f}(t)$ 的正常状态空间系统(14)的观测器设计问题.

注 2 引入非奇异变换(13)的重要意义是,通过这一变换将对于广义系统(1)的输入-状态对的讨论等价地转化为对于正常状态空间系统(14)的输入-状态对的讨论.这一方法是本文作者之一及其合作者在 1999 年提出的^[7],可应用于广义系统的多种问题,例如 LQ 问题^[7], H_∞ 控制问题^[8]

等的讨论.

3 系统的输入-状态估计 (Estimation of input-state of systems)

引理 1 设假设 1 成立, 则假设 2 等价于

$$\text{rank } \bar{D} = p (\text{列满秩}). \quad (16)$$

式中 $\bar{D}$ 如式(12)所示.

证 注意到

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ E & A & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} &= \\ 2r + \text{rank} \begin{bmatrix} A_4 & B_2 \\ C_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} &= \\ n + r + \text{rank } \bar{D}, \end{aligned}$$

联系到假设 2 即知, $\text{rank } \bar{D} = p$, 亦即 $\bar{D}$ 列满秩.

$\bar{D}$ 列满秩使得可从式(14)中的第三式唯一解出 $\bar{f}(t)$:

$$\bar{f}(t) = \bar{D}^+ (y - \bar{C}_1 x_1), \quad (17)$$

将式(17)代入式(14)中的第一式, 推得

$$\dot{x}_1 = \bar{A}_1 x_1 + \bar{B}_1 y. \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= A_1 - \bar{B}_1 \bar{D}^+ \bar{C}_1, \\ \bar{B}_1 &= \bar{B}_1 \bar{D}^+. \end{aligned} \quad (19)$$

将式(14)中的第三式两边左乘 $(I_q - \bar{D}\bar{D}^+)$, 并注意到 $\bar{D}\bar{D}^+ \bar{D} = \bar{D}$, 推得

$$(I_q - \bar{D}\bar{D}^+) y = (I_q - \bar{D}\bar{D}^+) \bar{C}_1 x_1. \quad (20)$$

记

$$\begin{aligned} (I_q - \bar{D}\bar{D}^+) y &= \tilde{y}, \\ (I_q - \bar{D}\bar{D}^+) \bar{C}_1 &= \tilde{C}_1, \end{aligned} \quad (21)$$

则系统(14)变换为如下系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \bar{A}_1 x_1 + \bar{B}_1 y, \\ \tilde{y} = \tilde{C}_1 x_1, \end{cases} \quad (22)$$

且式(14)中的第一式与式(22)中的第一式为恒等变换.

注 3 系统(22)的状态为 x_1 , 输入为 y , 输出为 $\tilde{y}$, $\tilde{y}$ 由式(21)给出, 而 y 则是系统(1)的输出, 故 $y, \tilde{y}$ 均为已知量测量, 即系统(22)是一个已知输入和输出的系统, 其状态观测器存在的充要条件为矩阵对 $[\bar{A}_1, \tilde{C}_1]$ 能检. 下面我们着重讨论 $[\bar{A}_1, \tilde{C}_1]$ 的能检性, 并由此获得系统(22)的观测器.

注 4 引理 1 指出, 在假设 1 成立的前提下, 假设 2 等价于 $\bar{D}$ 列满秩. 注意 $\bar{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$, 而假设 3 蕴含 $q \geq p$, 即系统(1)的输出端子个数不少于输入端子个数. 当 $q = p$ 时, $\bar{D}$ 成为非奇异方阵, 于是 $I_q - \bar{D}\bar{D}^+ = 0$, 因而 $\tilde{C}_1 = 0, \tilde{y} = 0$, 系统(22)中的第二式退化为 $0 = 0$. 这种情形下, 所谓 $[\bar{A}_1, \tilde{C}_1]$ 能检即矩阵 $\bar{A}_1$ 为稳定矩阵, 亦即 $\bar{A}_1$ 的特征根全部落在复平面

的左半平面.

引理 2 设假设 1 ~ 假设 3 成立, 则矩阵对 $[\bar{A}_1, \tilde{C}_1]$ 能检.

证 按假设 3, 并注意到假设 1, 2 及引理 1, 有

$$\begin{aligned} n + p &= \text{rank} \begin{bmatrix} A - sE & B \\ C & D \end{bmatrix} = \\ \text{rank} \begin{bmatrix} A_1 - sI_r & A_2 & B_1 \\ A_3 & A_4 & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} &= \\ \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 - sI_r & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D} \end{bmatrix} + n - r &= \\ \text{rank} \begin{bmatrix} I_r & -\bar{B}_1 \bar{D}^+ \\ 0 & I_q - \bar{D} \bar{D}^+ \\ 0 & \bar{D} \bar{D}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 - sI_r & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D} \end{bmatrix} + n - r &= \\ \text{rank} \begin{bmatrix} sI_r - \bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} + p + n - r, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re } s \geq 0. \end{aligned}$$

因而 $\text{rank} \begin{bmatrix} sI_r - \bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} = r, \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re } s \geq 0$, 亦即 $[\bar{A}_1, \tilde{C}_1]$ 能检.

按引理 2, 本文有

定理 1 设假设 1 ~ 假设 3 成立, 则系统(14)的状态观测器存在, 特别地, 它的全阶观测器可设计为^[9]

$$\begin{cases} \dot{z} = (\bar{A}_1 - L\tilde{C}_1)z + (\bar{B}_1 + L(I_q - \bar{D}\bar{D}^+))y, \\ \hat{x}_1 = z. \end{cases} \quad (23)$$

其中, L 的选取应保证矩阵 $\bar{A}_1 - L\tilde{C}_1$ 的特征根全部落在开左半复平面.

基于式(17), 按下式构造系统(14)的未知输入 $\bar{f}(t)$ 的渐近估计量 $\hat{\bar{f}}(t)$:

$$\hat{\bar{f}}(t) = \bar{D}^+ (y(t) - \bar{C}_1 \hat{x}_1(t)). \quad (24)$$

由

$$\hat{\bar{f}}(t) - \bar{f}(t) = \bar{D}^+ \bar{C}_1 (\hat{x}_1(t) - x_1(t)), \quad (25)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) - x_1(t) = o(e^{-\alpha t}), \\ t \rightarrow +\infty, \alpha = \frac{1}{2} \cdot \min |\text{Re } \lambda(\bar{A}_1 - L\tilde{C}_1)|, \end{cases} \quad (26)$$

易知 $\hat{\bar{f}}(t)$ 以指数速率渐近逼近 $\bar{f}(t)$.

注意到式(13), 由

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{f}(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

及式(14)中的第二式,式(17)可以推得

$$\begin{aligned} x_2 &= -(P_{11}A_3 + P_{12}\bar{D}^+ \bar{C}_1)x_1 + P_{12}\bar{D}^+ y, \quad (28) \\ f(t) &= -(P_{21}A_3 + P_{22}\bar{D}^+ \bar{C}_1)x_1 + P_{22}\bar{D}^+ y. \end{aligned} \quad (29)$$

于是结合定理1有

定理2 若系统(1)满足假设1~假设3,则它的输入-状态观测器可按下式设计:

$$\begin{cases} \dot{z} = Hz + Jy, \operatorname{Re} \lambda(H) < 0, \\ \hat{x} = Kz + Ty, \\ \hat{f}(t) = Gz + Qy. \end{cases} \quad (30)$$

式中

$$\begin{cases} H = \bar{A}_1 - L\bar{C}_1, J = \bar{B}_1 + L(I_q - \bar{D}\bar{D}^+), \\ K = N \begin{bmatrix} I_r \\ -(P_{11}A_3 + P_{12}\bar{D}^+ \bar{C}_1) \end{bmatrix}, \\ T = N \begin{bmatrix} 0 \\ P_{12}\bar{D}^+ \end{bmatrix}, \\ G = -(P_{21}A_3 + P_{22}\bar{D}^+ \bar{C}_1), \\ Q = P_{22}\bar{D}^+. \end{cases} \quad (31)$$

该观测器的两个输出 $\hat{f}(t)$ 与 $\hat{x}(t)$ 分别以指数速率渐近逼近系统(1)的未知输入 $f(t)$ 及状态 $x(t)$.

证 注意到式(28),(29)及式(8),按定理1中系统(14)的观测器(23)构造系统(1)的输入-状态观测器如式(30)~(31)所示.即有

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) - x(t) &= \\ N \begin{bmatrix} I_r \\ -(P_{11}A_3 + P_{12}\bar{D}^+ \bar{C}_1) \end{bmatrix} (\hat{x}_1(t) - x_1(t)), \end{aligned}$$

及

$$\hat{f}(t) - f(t) = -(P_{21}A_3 + P_{22}\bar{D}^+ \bar{C}_1)(\hat{x}_1(t) - x_1(t)).$$

再注意式(26),即得

$$\begin{cases} \hat{x}(t) - x(t) = o(e^{-\alpha t}), \\ \hat{f}(t) - f(t) = o(e^{-\alpha t}), t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (32)$$

式中 α 如式(26)所示.

4 算例(Example)

试设计下述系统的输入-状态观测器.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} f(t), \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

式中 $x_1 \in \mathbb{R}^2, x_2 \in \mathbb{R}^1$.

解 容易验证该系统满足假设1~假设3.经计

算得:

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{D}^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注意,本例中 $[\bar{A}_1, \bar{C}_1]$ 构成能观对,故可选择 L 使得 $\bar{A}_1 - L\bar{C}_1$ 有任意指定负实部特征根.今取 $\bar{A}_1 - L\bar{C}_1$

有特征根 $-2, -10$,经计算得, $L = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 22 \end{bmatrix}$, 于是,系统的输入-状态观测器为

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 22 & -10 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 11 & -11 \end{bmatrix} y, \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} y, \\ \hat{f}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} y, \end{cases}$$

实现

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) - x(t) &= o(e^{-t}), \\ \hat{f}(t) - f(t) &= o(e^{-t}), t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

5 结语(Conclusion)

本文讨论了含未知输入的广义系统的状态与输入估计问题,在初等代数框架下,通过系统的输入-状态对的非奇异变换把广义系统的这一问题等价地转化成正常状态空间系统的相应问题.文中给出了广义系统的输入-状态观测器存在的充分条件和简单的设计方法.与以往文献相比,本文所设计的观测器的优点在于,观测器的输入端不含系统输出的导数,并且,观测器的两个输出分别以指数速率渐近逼近系统的未知输入和状态.

参考文献(References):

- [1] DAROUACH M, ZASADZINSKI M, XU S J. Full-Order observer for linear systems with unknown inputs [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(3):606-609.
- [2] SYRMOS V L. Computational observer design techniques for linear systems with unknown inputs using the concept of transmission zeros [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(5):790-794.

- [3] HOU M, MILLER P C. Disturbance decoupled observer design: a unified viewpoint [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(6):1338 - 1341.
- [4] HOU M, PATTON R J. Input observability and input reconstruction [J]. *Automatica*, 1998, 34(6):789 - 794.
- [5] CORLESS M, TU J. State and input estimation for a class of uncertain system [J]. *Automatica*, 1998, 34(6):757 - 764.
- [6] DAI Liyi. *Singular Control Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [7] ZHU Jiandong, MA Shuping, CHENG Zhaolin. Singular LQ problem for descriptor systems [A]. *Proc of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* [C]. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1999: 4098 - 4099.
- [8] 马树萍, 程兆林. 线性奇异系统的 H_∞ 控制问题: 状态反馈情形 [J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(4): 513 - 518.
- (MA Shuping, Cheng Zhaolin. State feedback H_∞ control design problem for linear singular system [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(4): 513 - 518)
- [9] 郑大钟. 线性系统理论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- (ZHENG Dazhong. *Linear System Theory* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1995.)

作者简介:

孙丽瑛 (1967 —), 女, 1989年毕业于大连海事大学, 获工学学士学位, 2000年毕业于山东大学, 获理学硕士学位, 现为济南大学理学院讲师. 主要研究方向为多变量控制系统的理论及应用等.
E-mail: sunliying66@beelink.com;

程兆林 (1939 —), 男, 山东大学数学与系统科学学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为多变量控制系统的理论及应用.