

闭环具有锯齿特性的 PWM 型 DC-DC buck 变换器周期解的存在性

范启富, 施颂椒

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘要: 应用周期方程方法研究具有锯齿波特性的闭环 PWM 型 buck DC-DC 变换器 T 周期解的存在性问题, 并给出了其在一个周期内仅有一次切换的 T 周期解存在的充分条件. 所给出的结果为闭环 PWM 型 buck DC-DC 变换器的控制器和锯齿波参数的设计提供了指导准则.

关键词: PWM DC-DC buck 变换器; 周期解的存在性; 周期方程方法

中图分类号: TN87 **文献标识码:** A

Existence of periodic solutions for closed-loop sawtooth-featured PWM DC-DC buck converters

FAN Qi-fu, SHI Song-jiao

(Institute for Automation Research, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The existence of periodic solutions for closed-loop PWM DC-DC buck converter was studied by means of the equations of periods. A sufficient condition of the existence of its periodic solutions with only one switching within a period was derived. The result given was helpful for the design of controller and selection of parameters of the carrier signal with sawtooth characteristic in the closed-loop PWM DC-DC buck converter.

Key words: PWM DC-DC buck converter; existence of periodic solutions; equations of period

1 引言 (Introduction)

具有锯齿波特性的闭环 PWM 型 DC-DC 变换器是一种典型的脉冲调制系统. 由于其切换元件的切换速度有限, 滑模的发生是不希望的. 在文[1]中作者研究了 PWM 型 buck DC-DC 变换器无滑模和跳跃的 Carathéodory 解的适定性问题, 并给出了易于检验的充要条件.

本文主要讨论这种闭环 PWM DC-DC buck 变换器的另一特性即周期解的存在性. 一般来说, 脉冲调制系统是由一类特殊的泛函微分或积分方程描述的系统. 这类系统的一个特点是其解不是初值的连续函数, 并且对于某些调制模型其轨迹本身也是不连续的. 研究其周期解存在性的方法有周期方程方法、谐波平衡方法(描述函数法)以及不动点方法^[2]. 前两种方法是传统方法, 后一种方法的理论基础是 Bohl-Brouwer 不动点定理和 Brouder 不动点定理. 虽然文[2]应用上述三种方法对图 1 所示的一大类脉冲调制系统的周期解存在性问题进行了比较系

统的研究, 并给出了其存在条件. 但没有包括像具有锯齿波特性的闭环 PWM 型 DC-DC 变换器这样的脉冲调制系统. 因此, 本文则研究图 2 所示的调制律具有锯齿特性的一类特定的脉冲调制系统的周期解存在性问题. 由于包含具有锯齿特性的 PWM 部分的系统的转移算子一般来说是不连续的, 由周期方程所导出的条件并不一定能保证 T 周期解存在, 所以本文应用周期方程方法和其他的附加条件导出了一定能保证周期解存在的充分条件. 然后将其具体应用于闭环 PWM 型 buck DC-DC 变换器, 给出闭环 PWM 型 buck DC-DC 变换器周期解存在的充分条件.

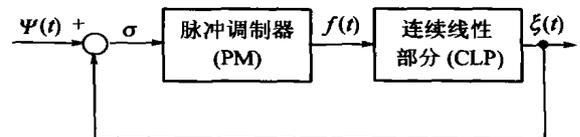


图 1 一般的脉冲调制系统

Fig. 1 A general pulse-modulated system

收稿日期: 2001 - 06 - 19; 收修改稿日期: 2002 - 12 - 31.

基金项目: 中国博士后基金(第 17 批).

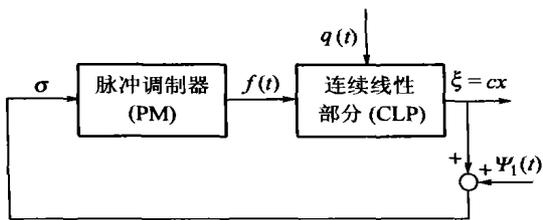


图2 闭环 DC-DC buck 变换器的等价方块图
Fig. 2 The equivalent block diagram of closed-loop DC-DC buck converter

2 一般脉冲调制系统的描述 (Description of general pulse-modulated systems)

脉冲调制系统的基本要素是脉冲调制器. 在数学上, 可以将它描述为将输入函数 $\sigma(t)$ 映射成输出函数 $f(t)$ 的非线性算子. 当 $t \geq 0$ 时, $\sigma(t), f(t)$ 均有定义, 并且取实标量值. 脉冲调制器的最一般性质是产生了一个采样时刻为 $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$ 的递增序列. 其中时间间隔 $[t_n, t_{n+1})$ 叫做第 n 个采样间隔.

一般地, 对于连续的输入函数 $\sigma(t)$, 脉冲调制器产生一个分段连续的输出函数 $f(t)$. 函数 $f(t)$ ($t_n \leq t < t_{n+1}$) 描述了第 n 个脉冲的形状. 最常见的脉冲形状是矩形.

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_n, & t \in [t'_n, t'_n + \tau_n), \\ 0, & t \in [t_n, t'_n) \cup [t'_n + \tau_n, t_{n+1}), \end{cases} \quad (1)$$

其中, t'_n, τ_n, λ_n 为实数, $t_n \leq t'_n < t'_n + \tau_n \leq t_{n+1}$, 参数 λ_n 和 τ_n 分别叫做脉冲幅值和脉宽. t'_n 定义了脉冲前沿的位置, 而 $t'_n + \tau_n$ 则定义了脉冲后沿的位置. $f(t)$ 的某些参数是已知的并且不变, 而有些参数 (称为调制参数) 则处理为 $\sigma(t)$ 的函数. 对于脉宽调制 (PWM) 来说, 可变参数是 τ_n .

下面讨论具有锯齿特性的脉宽调制器的数学描述.

2.1 具有锯齿特性的脉宽调制器的数学描述 (Description of pulse-width modulator (PWM) with sawtooth characteristics)

这里, $t_n = nT$.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \sigma(t) - p(t) > 0, \\ 0, & \sigma(t) - p(t) \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$p(t)$ 为锯齿特性函数.

$$p(t) = p_0 + \frac{a}{T}(t \bmod T), \quad (3)$$

其中, a, p_0 为常数, 且 $a > 0$.

2.2 连续线性部分 (CLP) + 脉宽调制器 (PWM) 的描述 (Description of continuous linear part and pulse-width modulator)

这一小节所研究的对象是由脉冲调制器 (PM) 和连续线性部分 (CLP) 组成的控制系统.

PM:

$$f = M\sigma, \quad (4)$$

CLP:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + bf + q(t), & \xi = cx, \\ \sigma = \Psi_1 + \xi, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\Psi_1(t)$ 是外作用, M 为描述脉冲调制器的非线性算子.

由线性控制理论知道, 稳定的 CLP 具有如下性质: 如果它的输入有界, 则对于任何初始状态 $x(0)$, 它的输出 $\xi(t)$ 也是有界的. 并且如果当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0$, 则对于任何初始状态 $x(0)$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\xi(t) \rightarrow 0$.

3 闭环 PWM DC-DC buck 变换器的周期解的存在性 (Existence of periodic solution to closed loop PWM DC-DC buck converter)

3.1 闭环 PWM DC-DC buck 变换器的模型 (Model of PWM DC-DC buck converter)

图3给出了闭环 PWM DC-DC buck 变换器的示意图. 假定 PWM 变换器中的开关和二极管是理想的. 即当它们处于接通状态时, 没有电压降, 则 PWM DC-DC buck 变换器可以由下面的模型描述.

对象的模型:

$$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1 = A_{10}x_1 + B_{10}v_s, \\ v_o = C_{10}x_1, \\ S_2: \dot{x}_1 = A_{20}x_1 + B_{20}v_s, \\ v_o = C_{10}x_1. \end{cases} \quad (6)$$

其中各模态的状态空间方程的状态矩阵, 输入矩阵, 输出矩阵分别为

$$A_{10} = A_{20} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/(RL) \end{bmatrix},$$

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{20} = [0 \ 0]^T,$$

$$C_{10} = [0 \ 1].$$

控制器的状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c(v_r - v_o), \\ y = C_c x_c + D_c(v_r - v_o), \end{cases} \quad (7)$$

进一步, 集成闭环 DC-DC buck 变换器的对象状态方

程(6)和控制器的状态方程,可以表示为方程(4), (5)的形式.这时,也可以将图3所示的闭环 DC-DC buck 变换器抽象成图2所示的方块图.其中

$$A = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ -B_c C_{10} & A_c \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} B_{10} v_s \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q(t) = [0 \ B_c]^T v_r, x = [x_1^T \ x_c^T]^T,$$

$$c = [-D_c C_{10} \ C_c], D = D_c,$$

$$\Psi_1 = D v_r,$$

$p(t)$ 为锯齿特性函数,由式(3)给出.

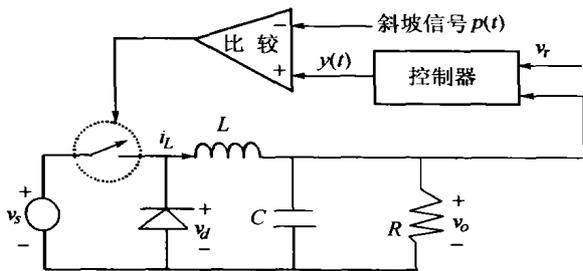


图3 闭环 DC-DC buck 变换器的示意图
Fig. 3 A schematic diagram of closed-loop DC-DC buck converter

3.2 闭环 PWM DC-DC buck 变换器的周期解的存在性 (Existence of periodic solution)

定义1 令 T 为一正数,如果 $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sigma(t+T) &= \sigma(t), \\ f(t+T) &= f(t), \end{aligned} \quad (8)$$

则称方程(4),(5)的解描述了一个 T 周期解.

如果对于适当的初值 $x(0)$,关系(8)成立的话,那么 T 周期解存在.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \alpha(t) + \int_0^t w_1(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda + \\ &\int_0^t w_2(t-\lambda)v_r d\lambda + \Psi_1(t), \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= c \exp(At)x(0), \\ W_2(s) &= C_c(sI - A_c)^{-1}B_c, \\ W_1(s) &= -C_{10}(sI - A_{10})^{-1}B_{10}v_s(W_2(s) + D_c), \end{aligned}$$

$w_1(t), w_2(t)$ 分别为 $W_1(s), W_2(s)$ 的拉普拉斯逆变换.

假定控制器 $W_2(s)$ 的极点均在开左半平面,则 $W_1(s)$ 稳定,存在正数 C, ϵ , 使得

$$\forall t \geq 0, |w_1(t)| \leq C \exp(-\epsilon t) \quad (10)$$

成立,并且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\alpha(t) \rightarrow 0$.

由于函数 $\Psi_1(t)$ 是常数,那么对于任意的正整数 N , 由周期解的定义有

$$\begin{aligned} \sigma(t+NT) &= \sigma(t), \\ \alpha(t) &= \\ \alpha(t+NT) &= \int_0^t w_1(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda + \\ &\int_0^{t+NT} w_1(t+NT-\lambda)f(\lambda)d\lambda - \\ &\int_0^t w_2(t-\lambda)v_r d\lambda + \int_0^{t+NT} w_2(t+NT-\lambda)v_r d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

当 $t < 0$ 时,如果将函数 $f(t)$ 进行 T 周期延拓,即 $f(t - NT) = f(t)$, 则令 $N \rightarrow +\infty$, 式(11)可以重写为

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int_{-\infty}^0 w_1(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda + \\ &\int_{-\infty}^0 w_2(t-\lambda)v_r d\lambda, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \Psi_1 + \sum_{-\infty}^{-1} \int_{nT}^{(n+1)T} w_1(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda + \\ &\int_0^t w_1(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda + W_2(0)v_r. \end{aligned} \quad (13)$$

如果延拓函数 $w_1(t)$ 为 $w_1(t) = 0, t < 0$, 且考虑到式(10)和函数 $f(t)$ 的分段连续有界性,项为 $w(t + nT - \lambda)f(\lambda)$ 的级数在 $0 \leq \lambda \leq T$ 时一致绝对收敛, 则上式可以写成

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \Psi + \int_0^T \sum_0^{\infty} w_1(t+nT-\lambda)f(\lambda)d\lambda, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\Psi = \Psi_1 + W_2(0)v_r = (D_c + W_2(0))v_r.$$

引理1 假定 $\Psi_1(t) = \text{const. } \forall t$ 和 $q(t) = \text{const. } \forall t$, CLP 稳定,且 $f(t)$ 是一有界函数,则式(4)和(5)的任意周期解满足方程:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \Psi(t) + \int_0^T \xi(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda, \\ \forall t, 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_1(t+nT). \quad (16)$$

定义2 如果 $f(t) \equiv \text{const. } \forall t \geq 0$, 周期解叫做平凡的.

对于 PWM 系统来说,平凡解或者是饱和的 ($f(t) \equiv -1$ 或 $f(t) \equiv 1$) 或者为0 ($f(t) \equiv 0$). 这里, 本文仅仅关心非平凡的 T 周期解.

下面的引理叙述了式(16)定义的 $\xi(t)$ 的一些性质.

引理2 令 $w_1(t)$ 是一连续的实值函数并满

足, $\forall t \geq 0, |w_1(t)| \leq C \exp(-\epsilon t)$ (其中 $\epsilon, C > 0$), $t < 0$ 时, $w_1(t) = 0$. 假定 $\xi(t) \forall t$ 由公式(16)定义, 则 $\xi(t)$ 具有下述性质:

a) 函数 $\xi(t)$ 是在点 $t = -nT, n = 0, 1, 2, \dots$ 处不连续的分段连续函数, 在这些不连续点处, $\xi(t)$ 的跳跃量等于 $w_1(+0)$;

b) 对于所有的 $t, \xi(t+T) = \xi(t) - w_1(t)$, 特别是当 $t \in (-\infty, T)$ 时, $\xi(t)$ 的周期为 T .

对于所有的 t ,

$$\int_t^{t+T} \xi(\lambda) d\lambda = \int_t^{+\infty} w_1(\lambda) d\lambda.$$

下面讨论如何寻找闭环 PWM DC-DC buck 变换器的 T 周期解及其周期解存在的条件.

由式(4)的锯齿形脉宽调制律可知, 如果 $\tau_n \neq 0$, 则有

$$\sigma(nT + \tau) > p(\tau), 0 \leq \tau < \tau_n.$$

令 τ_0 为稳态时周期解所对应的脉宽. 并假定一个周期只有一次切换. 那么有

$$\sigma(t, \tau_0) = \Psi + \int_0^{\tau_0} \xi(t - \lambda) d\lambda, \forall t, 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

令

$$\Gamma(t, \tau) = \Psi + \int_0^{\tau} \xi(t - \mu) d\mu - p(t), \quad (18)$$

则 τ_0 为

$$\Gamma(\tau_0, \tau_0) = 0 \quad (19)$$

的解. 方程(19)叫做周期方程. 如果 τ_0 属于 $(0, T)$, 并且

$$\Gamma(t, \tau_0) > 0, \forall t, 0 \leq t < \tau_0,$$

$$\Gamma(t, \tau_0) < 0, \forall t, \tau_0 \leq t < T,$$

则存在非平凡的一个周期只有一次切换的 T 周期解, 且其脉宽为 τ_0 . 下面推导 T 周期解存在的条件.

为了使得 τ_0 属于 $(0, T)$,

$$\Gamma(0, 0)\Gamma(T, T) < 0 \quad (20)$$

应该成立.

$$\Gamma(0, 0) = \Psi - p_0,$$

$$\Gamma(T, T) = \Psi + W_1(0) - p_0 - a,$$

则

$$0 < \Psi - p_0 < -W_1(0) + a \text{ 或 } 0 > \Psi - p_0 > -W_1(0) + a \quad (21)$$

为式(19)在区间 $(0, T)$ 上有解的必要条件. 此外, 进一步为了保证式(19)在区间 $(0, T)$ 只有一个解, 还须满足下述条件. 即当 $0 \leq t < \tau$ 时, $\Gamma(t, \tau) - \Gamma(\tau, \tau) > 0$; 当 $\tau \leq t < T$ 时, $\Gamma(t, \tau) - \Gamma(\tau, \tau) <$

0.

当 $0 \leq t < \tau$ 时,

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \tau) - \Gamma(\tau, \tau) &= \\ &= \int_{\tau}^t (\xi(\lambda) - \xi(\lambda + T - \tau)) d\lambda + p(\tau) - p(t) \geq \\ &= (\tau - t) \left\{ \frac{a}{T} - \sup_{t \leq \lambda \leq \tau} (\xi(\lambda) - \xi(\lambda + T - \tau)) \right\}. \end{aligned}$$

由此可知, 如果

$$\frac{a}{T} - \sup_{t \leq \lambda \leq \tau} (\xi(\lambda) - \xi(\lambda + T - \tau)) > 0 \quad (22)$$

成立, 则 $\Gamma(t, \tau) - \Gamma(\tau, \tau) > 0$;

当 $\tau \leq t < T$ 时,

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \tau) - \Gamma(\tau, \tau) &= \\ &= \int_{\tau}^t (\xi(\lambda) - \xi(\lambda - \tau)) d\lambda + p(\tau) - p(t) \leq \\ &= (t - \tau) \left\{ -\inf_{\tau \leq \lambda \leq t} (\xi(\lambda - \tau) - \xi(\lambda)) - \frac{a}{T} \right\}. \end{aligned}$$

由此可知, 如果

$$-\inf_{\tau \leq \lambda \leq t} (\xi(\lambda) - \xi(\lambda - \tau)) - \frac{a}{T} < 0 \quad (23)$$

成立, 则 $\Gamma(t, \tau) - \Gamma(\tau, \tau) < 0$.

综上所述可得到下述定理.

定理 1 如果条件

$$0 < |\Psi - p_0| < |-W_1(0) + a| \quad (24)$$

和

$$\frac{a}{T} > \max \left\{ -\inf_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)), \sup_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)) \right\} \quad (25)$$

成立, 则调制为具有锯齿波特性的 PWM, CLP 稳定的系统(4), (5)具有非平凡的一个周期内只有一次切换的 T 周期解.

对于闭环 PWM buck 变换器来说, 由于其基本工作条件是 $v_r \leq v_s$, 如果 a, p_0 非负, 易见定理 1 的条件(24)自然满足. 因此, 闭环 PWM buck 变换器有非平凡的一个周期内只有一次切换的周期解的条件可以归纳成下面的推论.

推论 如果

$$\frac{a}{T} > \max \left\{ -\inf_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)), \sup_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)) \right\}$$

成立, 则具有锯齿波特性的 PWM buck 闭环变换器具有非平凡的一个周期内只有一次切换的 T 周期解.

由于篇幅的限制, 本文仅以一比例控制的具有锯齿波特性的 PWM buck 闭环变换器为例通过数值

计算简单地说明上述结果.所用的参数如下^[3]:

$$\begin{aligned} L &= 50 \mu\text{H}, R = 3 \Omega, C = 500 \mu\text{F}, \\ v_s &= 28 \text{ V}, v_r = 15 \text{ V}, \\ a &= 40, T = 0.0001 \text{ s}. \end{aligned}$$

当比例控制器的增益 $K = 10$ 时,有

$$\begin{aligned} \frac{a}{T} &= 5 \times 10^5, \\ \max \left\{ - \inf_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)), \right. \\ &\left. \sup_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)) \right\} = \\ &1.378 \times 10^5. \end{aligned}$$

条件(25)满足,具有非平凡的一个周期内只有一次切换的 T 周期解.

当比例控制器的增益 $K = 40$ 时,有

$$\begin{aligned} \frac{a}{T} &= 5 \times 10^5, \\ \max \left\{ - \inf_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)), \right. \\ &\left. \sup_{0 \leq t_1 < t_2 < T} (\xi(t_1) - \xi(t_2)) \right\} = \\ &5.512 \times 10^5. \end{aligned}$$

条件(25)不满足,不能保证具有非平凡的一个周期内只有一次切换的 T 周期解.

4 结语(Conclusion)

具有锯齿波特性的闭环 PWM 型 buck DC-DC

变换器是一种特殊的脉冲调制系统.由于该系统的转移算子一般来说是不连续的,由周期方程所导出的条件并不一定能保证周期解存在.本文应用周期方程方法和其他的附加条件给出了其在一个周期内仅有一次切换的 T 周期解存在的充分条件.在闭环 PWM 型 buck DC-DC 变换器的控制器和锯齿波参数的设计时可以利用所给出的结果检验设计的合理性.

参考文献(References):

- [1] 范启富,施颂椒.脉宽调制控制系统的适定性[J].自动化学报,(已录用).
(FAN Qifu, SHI Songjiao. On well-posedness of PWM control system [J]. *Acta Automatica Sinica*, Accepted.)
- [2] GELIG A K, CHURILOV A N. *Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems* [M]. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [3] ERICKSON R W. *Fundamentals of Power Electronics* [M]. New York: Chapman and Hall, 1997.

作者简介:

范启富 (1962—),男,工学博士,上海交通大学自动化所博士后,现为自动化系副教授,主要研究领域为鲁棒控制、切换控制与主动振动噪声控制;

施颂椒 (1933—),男,上海交通大学自动化系教授,博士生导师,主要研究领域为鲁棒控制与自适应控制.