

一种理性预期的国民收入对策模型

黄国石, 周俊梅, 钟松挺, 赵 武

(厦门大学 自动化系, 福建 厦门 361005)

摘要: 在一种具有理性预期的经济模型中, 引入纳什均衡问题, 建立二人非合作对策模型. 通过模型变换, 得出鲁棒控制状态反馈策略, 进而对模型进行仿真计算, 结果说明政府采取稳定政策是正确的.

关键词: 理性预期; 国民收入; 对策; 模型

中图分类号: F224.11

文献标识码: A

Game model for rational expectation of national income

HUANG Guo-shi, ZHOU Jun-mei, ZHONG Song-ting, ZHAO Wu

(Department of Automation, Xiamen University, Fujian Xiamen 361005, China)

Abstract: Based on the rational expectation a macroeconomic model described by two-person non-cooperative dynamic game and disturbed by stochastic noise was proposed. By introducing Nash equilibrium problem the authors converted the model, and by applying related theories and methods its state feedback Nash equilibrium solutions were obtained. Furthermore, the simulation and calculation were carried out, and the results proved the steady policy.

Key words: rational expectation; national income; game; model

1 引言(Introduction)

博弈论进入经济学的原因及博弈论之所以被经济学家普遍使用, 是与传统经济学的缺陷和经济学自身发展的要求分不开的. 传统经济学在谈到人的决策时, 往往是假定在其它条件不变的条件下最大化自己的效用, 个人的效用也只决定于自己的选择, 其他所有人的行为都归结在价格这个参数中; 市场是充分竞争的, 垄断和寡头是特殊情况; 信息是充分和对称的. 然而现实中这些条件都是很难成立的. 在竞争对手日益明显、竞争越来越直接的情况下, 博弈论为经济学研究提供了一种不可替代的工具.

博弈论与理性预期理论自 30 年代凯恩斯主义诞生以来, 各国都普遍意识到政府对国民经济进行干预的必要性和重要性, 然而 60 年代末、70 年代初, 西方国家普遍陷入“滞胀”, 这就宣布了凯恩斯主义理论和政策的失败. 此时, 理性预期学派的理论受到了大家的普遍关注, 该派代表人物卢卡斯(Lucas R)因此荣获了诺贝尔经济学奖, 其实卢卡斯本人就是一位博弈论专家, 他认为任何政策都是政府和私人部门之间的博弈, 双方都力图猜破对方的最优策略^[1]. 从这种意义上讲, 宏观经济政策可以视为政策

制定者与经济主体间的博弈. 所以, 考虑政策时所需的最好的工具是博弈论. 国外学者 Basar T, Olsder J 等人对动态博弈作过精彩的叙述^[2].

在经济生活中, 各主体都依据自己所掌握的信息来形成自己对未来的预期, 同时按照自己的行为目标来决定自己的对策. 理性预期分析表明, 经济主体以其理性预期为依据的决策, 常使政府的财政、货币活动归于无效, 形成“上有政策, 下有对策”的局面. 实际上, 政府在经济活动中也是作为一个当事者在活动的, 它也可以对其他经济代理人的行为进行预期, 根据这种预期来决定自己的政策决策, 这样便形成了一种政府与公众在预期和决策上的竞争与博弈. 博弈论中一个很重要的概念就是“纳什均衡(Nash equilibrium)”, 纳什均衡指的是一种战略组合, 这种战略组合是由所有博弈参与者(players)的最优战略组成. 在给定其余参与者的战略的情况下, 没有任何参与者愿意采取其它战略, 从而没有任何人有积极性打破这种均衡. 由于经济代理人是从自身的经济利益出发采取行动, 在利益相互影响的局势中选择策略使自己的收益最大, 因此, 政府与公众的博弈是一种非合作的动态博弈, 每一期都存在纳

什均衡点.经济系统比实际工程系统更多地受到人们和经济现象不确定性因素的制约.鲁棒 H_∞ 控制理论正是解决这类问题的好办法.我国学者汤兵勇等人对此问题作过深入系统的研究,并取得成功的结果^[3].对于纳什问题的 H_∞ 状态反馈控制策略,我国学者钟麦英、黄小原等人也有出色的研究^[4,5].本文就是在我国学者工作的基础上,针对含有理性预期、不确定因素的国民收入经济模型,求解纳什均衡解,并对我国实际经济运作情况进行仿真.

2 模型的建立(Constructing model)

在理性预期情形,理性的经济代理人完全了解经济模型的结构,假设对随机环境的描述完全(或近似地)等同于对经济代理人的真实环境考察,对经济代理人所设想的经济变量的期望值的分析就可以用随机模型来进行^[6].

考虑三部门国民收入决定模型,即国民经济由厂商、家庭、和政府部门组成,三部门国民收入的构成如下:

$$Y_{t+1} = C_{t+1} + I_{t+1} + G_{t+1}. \quad (1)$$

方程中 Y_{t+1} , C_{t+1} , I_{t+1} 分别表示第 $t+1$ 期的国民收入、消费和投资, G_{t+1} 是 $t+1$ 期的政府支出.

根据消费函数, $t+1$ 期的消费可表示为 t 期国民收入的函数:

$$C_{t+1} = bY_t. \quad (2)$$

另外,经济系统是一个复杂的系统,受到的干扰因素很多,有必要把不确定性扰动 ω_t 的影响纳入到国民收入决定方程,且不失一般性,设

$$\sum_{i=0}^T \omega_i^T \omega_i < \infty, \quad \forall T, \quad (3)$$

即 $\omega_t \in l_2(0, T; \mathbb{R}^r)$, 由随机扰动对国民经济影响的滞后性,原方程可化为

$$Y_{t+1} = bY_t + I_{t+1} + G_{t+1} + \alpha\omega_t, \quad (4)$$

此处, I_{t+1} 就是一般经济代理人的决策变量, G_{t+1} 是政府控制的政策工具变量,为方便起见,可令 $I_t = I_{t+1}$, $G_t = G_{t+1}$, 则系统方程为

$$Y_{t+1} = bY_t + I_t + G_t + \alpha\omega_t. \quad (5)$$

一般经济代理人与政府都是理性的,其考虑的利益即目标函数各不相同,一般经济代理人投资决策的原则是使如下目标函数最小化^[7],即

$$\min_{I_t} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T [(I_t - \bar{I})^2 + k(Y_t - \bar{Y})^2] \cdot e^{-\theta t \Delta T} \right\}. \quad (6)$$

政府支出的准则是使如下损失函数最小,即

$$\min_{G_t} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T [(G_t - \bar{G})^2 + \eta(I_t - \bar{I})^2 + \lambda(Y_t - \bar{Y})^2] \cdot e^{-\theta t \Delta T} \right\}. \quad (7)$$

其中, $\bar{I}$, $\bar{G}$ 和 $\bar{Y}$ 分别为一般经济代理人投资、政府支出和国民收入的目标值, λ , η , k 均为加权系数, θ 为贴现指数, ΔT 取为 1 年(月).

在不考虑外部干扰 ω_t 时,式(5)~(7)描述了离散时间一般经济代理人和政府的线性二次动态对策问题.当且仅当存在策略 I_t^* , G_t^* 使式(6)和式(7)成立时,称 I_t^* , G_t^* 为该问题的纳什均衡解, I_t^* 和 G_t^* ($t = 1, 2, \dots, T$) 分别称为一般经济代理人和政府的纳什均衡策略集.

由于不确定性扰动 ω_t 的冲击影响,对策双方 I_t 和 G_t 都不可能求得使目标式(6)和式(7)最小的策略,基于 H_∞ 控制的基本思想,引入表示扰动衰减水平的常数 $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, 求策略 I_t 和 G_t 使同时满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T [(I_t - \bar{I})^2 + k(Y_t - \bar{Y})^2] \cdot e^{-\theta t \Delta T} \leq \\ \frac{1}{2} \gamma_1^2 \sum_{t=0}^T \omega_t^2, \end{aligned} \quad (8)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T [(G_t - \bar{G})^2 + \eta(I_t - \bar{I})^2 + \lambda(Y_t - \bar{Y})^2] \cdot e^{-\theta t \Delta T} \leq \\ \frac{1}{2} \gamma_2^2 \sum_{t=0}^T \omega_t^2 \end{aligned} \quad (9)$$

的 γ_1, γ_2 越小越好,显然, γ_1, γ_2 越小,两目标函数值越小.

引入状态变量 $x_t = [x_{1,t} \quad x_{2,t}]^T$, 其中

$$x_{1,t} = (Y_t - \bar{Y}) \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta t \Delta T},$$

$$x_{2,t} = [(b-1)\bar{Y} + \bar{I} + \bar{G}] \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta t \Delta T},$$

控制变量 $u_{1,t} = (I_t - \bar{I}) \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta t \Delta T}$ 和 $u_{2,t} = (G_t - \bar{G}) \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta t \Delta T}$, 建立系统的状态空间方程

$$\begin{aligned} x_{t+1} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}\theta \Delta T} \cdot b & e^{-\frac{1}{2}\theta \Delta T} \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\theta \Delta T} \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}\theta \Delta T} \\ 0 \end{bmatrix} u_{1,t} + \\ \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}\theta \Delta T} \\ 0 \end{bmatrix} u_{2,t} + \begin{bmatrix} \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta \Delta T} \\ 0 \end{bmatrix} \omega_t, \end{aligned} \quad (10)$$

简记为

$$x_{t+1} = Ax_t + B_1 u_{1,t} + B_2 u_{2,t} + E\omega_t. \quad (11)$$

H_∞ 控制性能指标的本质是“最大最小”问题,其系统意义是选择控制策略,使干扰 ω_t 到状态 x 的影响降低到最低程度^[8],亦即优化“最恶情况”.

控制 u_1 的目标为求策略 $u_{1,t}(t = 0, 1, \dots, T)$ 使满足

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^T [x_i^T Q_1 x_i + R_{11} u_{1,t}^2 + R_{12} u_{2,t}^2] \leq \\ & \frac{1}{2} \gamma_1^2 \sum_{i=0}^T \omega_i^2, \end{aligned} \quad (12)$$

控制 u_2 的目标为求策略 $u_{2,t}(t = 0, 1, \dots, T)$ 使满足

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^T [x_i^T Q_2 x_i + R_{21} u_{1,t}^2 + R_{22} u_{2,t}^2] \leq \\ & \frac{1}{2} \gamma_2^2 \sum_{i=0}^T \omega_i^2, \end{aligned} \quad (13)$$

这里

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{11} = 1, R_{12} = 0, \\ Q_2 &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{21} = \eta, R_{22} = 1. \end{aligned}$$

对应的策略将把扰动的影响抑制在允许的水准以下,本文称该问题为线性二次纳什均衡 H_∞ 扰动衰减问题(简称 LQN H_∞ 扰动衰减问题).在理性预期和不确定性干扰存在的条件下,动态对策问题就变成了一般经济代理人与政府的二人非合作线性二次对策,一般经济代理人与扰动 ω_t 的二人零和线性二次动态对策,及政府与扰动 ω_t 的二人零和线性二次动态对策.

3 纳什问题的 H_∞ 状态反馈策略(Nash dynamic game for H_∞ state feedback policy)

给定 $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, 对于 LQN H_∞ 扰动衰减问题式(11), (12), (13), 定义性能指标函数

$$\begin{aligned} J_i(u_1, u_2, \omega) &= \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^T [(x_i^T Q_i x_i + \sum_{j=1}^2 R_{ij} u_{j,t}^2) - \gamma_i^2 \omega_i^2] \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (14)$$

则该问题等价于求状态反馈策略 $(u_{1,t}^*(x_t), u_{2,t}^*(x_t))$, 使对于任意 $\omega_t \in l_2(0, T; \mathbb{R}^r)$, 满足 $J_i(u_1^*, u_2^*, \omega) \leq 0$. 从动态对策的观点来讲, 对策的一方 i 求 $u_{i,t}^*$ 使在另一对策方的策略为 $u_{j,t}^*(x_t)$ 的情况下满足

$$\begin{aligned} J_i(u_1^*, u_2^*, \omega) &\leq J_i(u_1^*, u_2^*, \omega_i^*) \leq \\ J_i(u_i, u_j^*, \omega_i^*), \quad \forall \omega &\in (0, T; \mathbb{R}^r), \\ i, j &= 1, 2, i \neq j, t = 1, 2, \dots, T, \end{aligned}$$

其中

$$u_i^* = \{u_{i,1}^*(x_1), u_{i,2}^*(x_2), \dots, u_{i,T}^*(x_T)\}$$

为控制策略集. $\omega_i^* = \{\omega_{i,1}^*(x_1), \dots, \omega_{i,T}^*(x_T)\}$ 为对于对策方 i 来讲对应的“最差”扰动信号集, 即 $\omega_{i,t}^*$ 为 t 时刻使 J_i 取最大值时的扰动信号.

首先来考虑对策各方与扰动 ω_t 构成的二人零和线性二次动态对策问题, 即

引理 1 对于问题

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + E\omega_t,$$

$$J = \min_{u_t} \max_{\omega_t} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^T [(x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i) - \gamma^2 \omega_i^T \omega_i] \right\},$$

当且仅当满足

$$\begin{aligned} R + B^T P_{t+1} B &> 0, \\ I - \gamma^2 E^T P_{t+1} E &> 0, \end{aligned} \quad (t = 1, 2, \dots, T),$$

其中

$$\begin{aligned} P_t &= Q + A^T P_{t+1} [I + (BB^T - \gamma^{-2} EE^T) P_{t+1}]^{-1} A, \\ P_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

时, 存在唯一状态反馈鞍点解

$$u_k^* = -B^T P_{t+1} [I + (BB^T - \gamma^{-2} EE^T) P_{t+1}]^{-1} A x_t,$$

$$\omega_t^* = E^T P_{t+1} [I + (BB^T - \gamma^{-2} EE^T) P_{t+1}]^{-1} A x_t,$$

在鞍点处 $J^* = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$.

证 略, 参见文献[3, 4].

根据上述引理, 对于二人 LQN H_∞ 扰动衰减问题可得如下结论:

定理 1 给定 $\gamma_1 > 0$ 和 $\gamma_2 > 0$, 当且仅当存在序列 $P_{1,t}, P_{2,t}$ 同时满足

$$\begin{aligned} R_{11} + B_1^T P_{1,t+1} B_1 &> 0, R_{22} + B_2^T P_{2,t+1} B_2 > 0, \\ I_r - \gamma_1^{-2} E^T P_{1,t+1} E &> 0, I_r - \gamma_2^{-2} E^T P_{2,t+1} E > 0, \end{aligned}$$

且

$$\begin{bmatrix} I_1 & \Delta_{1,t} B_2 \\ \Delta_{2,t} B_1 & I_2 \end{bmatrix}$$

可逆时, 存在唯一解 $u_{1,t}^*(x_t) = F_{1,t} x_t, u_{2,t}^*(x_t) = F_{2,t} x_t$ 使

$$\sum_{i=0}^T [x_i^T Q_i x_i + \sum_{j=1}^2 u_{j,t}^T R_{ij} u_{j,t}] \leq \gamma_i^2 \sum_{i=0}^T \omega_i^T \omega_i,$$

$$i = 1, 2, \forall \omega_t \in l_2(0, T; \mathbb{R}^r),$$

其中 I_r, I_1, I_2 分别为 r, m_1 和 m_2 维单位矩阵, 且

$$\begin{aligned} P_{1,t} &= Q_1 + F_{2,t}^T R_{12} F_{2,t} + (A + B_2 F_{2,t})^T P_{1,t+1} \times (I + \\ & (B_1 B_1^T - \gamma_1^{-2} EE^T) P_{1,t+1})^{-1} (A + B_2 F_{2,t}), \\ P_{1,T+1} &= 0, \\ P_{2,t} &= Q_2 + F_{1,t}^T R_{21} F_{1,t} + (A + B_1 F_{1,t})^T P_{2,t+1} \times (I + \\ & (B_2 B_2^T - \gamma_2^{-2} EE^T) P_{2,t+1})^{-1} (A + B_1 F_{1,t}), \\ P_{2,T+1} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,t} &= (I_1 - \Delta_{1,t} B_2 \Delta_{2,t} B_1)^{-1} (\bar{F}_{1,t} - \Delta_{1,t} B_2 \bar{F}_{2,t}), \\
F_{2,t} &= (I_2 - \Delta_{2,t} B_1 \Delta_{1,t} B_2)^{-1} (\bar{F}_{2,t} - \Delta_{2,t} B_1 \bar{F}_{1,t}), \\
\Delta_{1,t} &= R_{11}^{-1} B_1^T P_{1,t+1} [I + (B_1 R_{11}^{-1} B_1^T - \\
&\quad \gamma_1^{-2} E E^T) P_{1,t+1}]^{-1}, \\
\Delta_{2,t} &= R_{22}^{-1} B_2^T P_{2,t+1} [I + (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T - \\
&\quad \gamma_2^{-2} E E^T) P_{2,t+1}]^{-1}, \\
\bar{F}_{1,t} &= -\Delta_{1,t} A, \quad \bar{F}_{2,t} = -\Delta_{2,t} A.
\end{aligned}$$

证 略.

所求得的状态反馈策略可以保证闭环系统的渐近稳定性的条件是:存在使 (A, B_i) 能控 1) $\gamma_1 = 0.18, \gamma_2 = 0.21$ 时(或可稳定), $(A, Q_i^{1/2})$ 可检测的 B_i 和 $Q_i > 0$. 证明与一般线性定常系统 H_∞ 状态反馈控制器设计时闭环系统稳定性的证明相似.

4 仿真例子 (Simulation example)

应用上述的定理,对提出的问题进行仿真计算.取

$$b = 0.7535, \theta = 0.05, \alpha = 0.15,$$

$$k = 0.7, \lambda = 0.98, \eta = 0.8,$$

ΔT 为 1 个月,时间区间为 $T = 100$,当 $t = 1$ 为初始状态,对于不同的 γ_1, γ_2 取值,控制策略求解结果分别如下:

1) 当 $\gamma_1 = 0.18, \gamma_2 = 0.21$ 时,存在满足定理条件的矩阵序列 $P_{1,t}$ 和 $P_{2,t}$,以及对应的策略 $u_{1,t}$ 和 $u_{2,t}$, 即

$$P_{1,1} = \begin{bmatrix} 0.7717 & -0.1535 \\ -0.1535 & 6.0762 \end{bmatrix},$$

$$P_{2,1} = \begin{bmatrix} 1.2371 & 0.7683 \\ 0.7683 & 58.6412 \end{bmatrix},$$

$$u_{1,1} = [-0.2073 \quad 0.4440] x_1,$$

$$u_{2,1} = [-0.4077 \quad -1.5415] x_1,$$

⋮

$$P_{1,100} = \begin{bmatrix} 0.7000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{2,100} = \begin{bmatrix} 0.9800 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$u_{1,100} = 0, u_{2,100} = 0, P_{1,101} = P_{2,101} = 0.$$

当 2) $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 0.5$; 3) $\gamma_1 = 0.6, \gamma_2 = 0.2$ 时,类似上面方法分别计算,可得当 $t = 100$ 后与上面初态 $t = 1$ 时,1) $\gamma_1 = 0.18, \gamma_2 = 0.21$ 情形时相同的结果.即

$$P_{1,100} = \begin{bmatrix} 0.7000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{2,100} = \begin{bmatrix} 0.9800 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$u_{1,100} = 0, u_{2,100} = 0, P_{1,101} = P_{2,101} = 0.$$

4 结论 (Conclusion)

上面计算结果主要看政府策略 $u_{2,t}$, 显然政府策略是稳定变动的结果表明:为抵抗外来冲击对经

济系统的干扰,政府应采取稳定的政策措施,给经济代理人以示范作用,使具有理性预期的经济代理人形成稳定的预期,从而指导其经济行为,以使整个经济系统平稳地运行.

参考文献 (References):

- [1] 汪翔. 理性预期宏观经济学 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1989.
(WANG Xiang. *Rational Expectance Macroeconomics* [M]. Beijing: Renmin University Press, 1989.)
- [2] BASAR T, OLSDER J. *Dynamic Noncooperative Game Theory* [M]. New York: Academic Press, 1982.
- [3] 汤兵勇, 程储旺, 钟麦英. 鲁棒经济控制理论与方法 [M]. 上海: 中国纺织大学出版社, 2000.
(TANG Bingyong, CHENG Chuwang, ZHONG Maiying. *Theory and Method of Robust Economic Control* [M]. Shanghai: Weave University of China Press, 2000.)
- [4] 钟麦英, 黄小原. 纳什均衡问题的状态反馈策略 [J]. 东北大学学报, 2000, 21(1): 56-59.
(ZHONG Maiying, HUANG Xiaoyuan. A Nash dynamic game for H_∞ state feedback policy [J]. *J of Northeastern University*, 2000, 21(1): 56-59.)
- [5] 钟麦英, 黄小原. 纳什均衡条件下的两个目标控制问题研究 [J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(6): 47-49.
(ZHONG Maiying, HUANG Xiaoyuan. A Nash dynamic game approach for two-objective H_∞ control problem [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2000, 22(6): 47-49.)
- [6] 邹至庄. 动态经济系统的分析与控制 [M]. 北京: 友谊出版社, 1983.
(ZHOU Zhizhuang. *Analysis and Control of Dynamic Economic System* [M]. Beijing: Friendship Press, 1983.)
- [7] 尤昌德. 现代控制理论基础 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1996.
(YOU Changde. *Base of Modern Control Theory* [M]. Beijing: Electronics Industry Press, 1996.)
- [8] 冯纯伯, 田玉平, 忻欣. 鲁棒控制系统设计 [M]. 南京: 东南大学出版社, 1995.
(FENG Chunbo, TIAN Yuping, QI Xin. *Robust Control System Design* [M]. Nanjing: Southeastern University Press, 1995.)

作者简介:

黄国石 (1948—), 男, 1975 年毕业于厦门大学数学系, 现为厦门大学自动化系教授. 主要从事系统辨识, 自适应系统和经济控制论等方面研究. E-mail: bubeik_zw@263.net;

周俊梅 (1976—), 男, 1998 年在南昌大学数学系获学士学位, 2001 年在厦门大学自动化系获硕士学位;

钟松挺 (1978—), 男, 2000 年在中央民族大学物理系获学士学位, 现在厦门大学自动化系攻读硕士学位, 主要研究经济控制论、最优控制等;

赵武 (1977—), 男, 2000 年在天津大学自动化系获学士学位, 现在厦门大学自动化系攻读硕士学位, 主要研究经济控制论、线性系统等.