

## 一类二阶非完整系统的镇定

马保离

(北京航空航天大学 第七研究所, 北京 100083)

**摘要:** 研究一类二阶非完整系统的镇定问题. 通过状态和输入反馈变换将系统模型转换为二阶链式标准型, 并对标准型给出一种时变光滑指数镇定控制律. 所得结果应用于欠驱动平面刚体的镇定.

**关键词:** 非完整控制; 二阶链式标准型; 欠驱动机器人系统; 时变光滑指数镇定

**中图分类号:** TP13

**文献标识码:** A

## Stabilization of a class of second-order nonholonomic systems

MA Bao-li

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** Stabilization of a class of second-order nonholonomic systems was investigated. The state and input feedback transformations were constructed explicitly to convert the second-order nonholonomic system to second-order canonical chained form. Smooth time-varying exponential control law was proposed to stabilize the second-order canonical chained form. The obtained result was applied to stabilize a planar underactuated rigid body.

**Key words:** nonholonomic control; second-order canonical chained form; underactuated robot systems; smooth time-varying exponential stabilization

### 1 引言(Introduction)

近十多年来, 非完整系统的控制问题得到了较为深入的研究, 并取得了一系列卓有成效的结果. 但这些研究大多是针对受一阶非完整速度约束的系统. 相对而言, 对受二阶非完整约束系统的研究却较少.

近几年, 在二阶非完整系统的控制方面已取得一些进展. Oriolo 等人推导了欠驱动机器人系统的加速度约束分别为二阶非完整、一阶非完整和完整的条件<sup>[1]</sup>. 对于两杆平面机器人, 当只有第一个杆有驱动时, Suzuki 等人利用主动关节的周期运动使欠驱动关节到达期望位置<sup>[2]</sup>, 并利用平均系统的方法设计了反馈镇定控制器<sup>[3]</sup>; 通过对系统进行 Nilpotent 近似, de Luca 应用路径规划算法将系统状态控制到原点附近<sup>[4]</sup>. 对三杆欠驱动机器人系统, 当第三杆为欠驱动时, Arai<sup>[5]</sup>通过构造状态空间任意两点的轨迹证明了系统的全局可控性, 并利用反馈控制将系统镇定在所设计的轨迹上<sup>[6]</sup>; Imura 通过坐标和输入反馈变换将系统转换为二阶链式形式, 并给出了一种分段光滑镇定控制器<sup>[7]</sup>. 对于具有一个欠驱动关节的机器人系统, Rathinam 和 Murray 给

出了系统为构形平坦的条件以及构造平坦输出的算法<sup>[8]</sup>; Arai 利用 time-scaling 方法给出了一种双向路径规划算法<sup>[9]</sup>. 针对手端驱动的多杆冗余机器人系统, de Luca 等人分析了系统的可控条件, 并对 PPR 机器人系统给出了开环控制算法<sup>[10]</sup>; Reyhanoglu 研究了欠驱动水面船只和含有欠驱动部件的平面刚体的控制问题, 并设计了非连续反馈控制律将系统状态指数镇定到原点<sup>[11,12]</sup>.

大部分实际的一阶无漂移非完整系统都可通过状态和输入反馈变换转换为一阶链式标准型, 从而使得控制器的设计得到简化. 但对二阶非完整系统, 目前尚无公认的标准型. 对于含有一个欠驱动关节的三杆机器人系统和手端驱动的 PPR 机器人系统, 文[13]通过状态和输入变换将其转化为二阶链式形式, 然而对于一般的欠驱动机器人系统目前还没有得到将其化为二阶链式标准型的条件和算法.

本文考虑一类二阶非完整系统的镇定问题. 首先通过状态和输入反馈变换将系统转换为二阶链式系统, 进而对二阶链式系统导出一种时变光滑反馈镇定控制律.

## 2 一类二阶非完整系统 (A class of second-order nonholonomic systems)

考虑非线性控制系统

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = \alpha(x_2)u_1 + \beta(x_2)u_2, \quad (1)$$

其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T, \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$  为系统状态,  $u = (u_1, u_2)^T$  为控制输入,  $\alpha(x_2), \beta(x_2)$  为  $x_2$  的二阶可微函数.

系统(1)中的第三个方程  $\dot{x}_3 = \alpha(x_2)\dot{x}_1 + \beta(x_2)\dot{x}_2$  是施加于加速度  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  上的一种约束, 如果该约束不可积, 则称约束为二阶非完整的.

记

$$\alpha_{x_2} = \partial \alpha(x_2) / \partial x_2, \beta_{x_2} = \partial \beta(x_2) / \partial x_2,$$

$$\alpha_{x_2 x_2} = \partial \alpha_{x_2} / \partial x_2, \beta_{x_2 x_2} = \partial \beta_{x_2} / \partial x_2,$$

并定义集合  $\Omega = \{x \mid \alpha_{x_2} \neq 0\}$ .

可以证明系统(1)具有以下性质: 1)  $\forall x \in \Omega$ , 系统(1)小时间局部可控; 2) 系统(1)的一阶线性近似系统不可控; 3) 系统(1)不可由光滑纯状态反馈镇定.

## 3 二阶链式标准型 (Second-order canonical chained form)

系统(1)虽然形式简单且小时间局部可控, 但由2)和3)知, 系统(1)的一阶线性近似系统不可控且不可由光滑纯状态反馈镇定, 所以其控制问题并不平凡. 本节讨论如何通过坐标和输入反馈变换将系统(1)转换为二阶链式标准型.

**定理 1**  $\forall x \in \Omega$ , 系统(1)可通过以下微分同胚坐标变换和非奇异输入反馈变换

$$y_1 = x_1 + f(x_2), y_2 = \alpha(x_2), \quad (2)$$

$$y_3 = x_3 + g(x_2),$$

$$v_1 = f_{x_2 x_2} \dot{x}_2^2 + u_1 + f_{x_2} u_2, \quad (3)$$

$$v_2 = \alpha_{x_2 x_2} \dot{x}_2^2 + \alpha_{x_2} u_2,$$

转换为二阶链式形式

$$\dot{y}_1 = v_1, \dot{y}_2 = v_2, \dot{y}_3 = y_2 v_1, \quad (4)$$

其中  $f_{x_2} = \partial f(x_2) / \partial x_2, f_{x_2 x_2} = \partial^2 f(x_2) / \partial x_2^2$ ,

$$f(x_2) = \int_0^{x_2} (\beta_{x_2} / \alpha_{x_2}) dx_2, \quad (5)$$

$$g(x_2) = \int_0^{x_2} (\alpha \beta_{x_2} / \alpha_{x_2} - \beta) dx_2.$$

**证** 因  $\alpha_{x_2} \neq 0$ , 所以上述状态坐标变换为微分同胚, 输入变换非奇异. 由式(5)可得

$$f_{x_2} = \beta_{x_2} / \alpha_{x_2}, g_{x_2} = f_{x_2} \alpha - \beta, \quad (6)$$

$$g_{x_2 x_2} = f_{x_2} \alpha_{x_2} + f_{x_2 x_2} \alpha - \beta_{x_2} = f_{x_2 x_2} \alpha.$$

对式(2)微分两次并应用式(3)得到

$$\ddot{y}_1 = v_1, \ddot{y}_2 = v_2,$$

$$\ddot{y}_3 = \alpha u_1 + (\beta + g_{x_2}) u_2 + g_{x_2 x_2} \dot{x}_2^2.$$

再利用式(6), (2)和(3)有

$$\ddot{y}_3 = \alpha u_1 + \alpha f_{x_2} u_2 + \alpha f_{x_2 x_2} \dot{x}_2^2 =$$

$$\alpha (u_1 + f_{x_2} u_2 + f_{x_2 x_2} \dot{x}_2^2) = y_2 v_1.$$

## 4 二阶链式标准型的镇定 (Stabilization of second-order chained form)

系统(4)的反馈镇定问题可表述为: 设计控制器  $v_1(y, \dot{y}, t), v_2(y, \dot{y}, t)$  使得系统(4)从任意零速度状态到达原点.

针对二阶和一类扩展的高阶链式系统, 文[13]和[14, 15]借助非连续坐标变换技术设计了非连续指数镇定控制律. 对一类非完整向量场系统, 文[16]通过引入辅助状态的方法设计了时变光滑指数镇定控制器. 以下针对二阶链式系统(4)给出一种时变光滑指数镇定控制律.

**引理 1**<sup>[17]</sup> 若  $A_1$  为 Hurwitz 阵,  $A_2(t)$  为时变阵且满足

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} A_2(t) = 0;$$

$$2) \int_0^\infty \|A_2(t)\| dt < \infty,$$

则系统  $\dot{x} = (A_1 + A_2(t))x$  指数稳定.

**引理 2** 考虑线性系统  $\dot{y}_1 = v_1$  及控制律

$$v_1 = -2k_1 \dot{y}_1 - k_1^2 y_1 + \alpha(t),$$

$$\alpha(t) = e^{-\lambda t}.$$

若  $k_1 > \lambda > 0$ , 则  $y_1, \dot{y}_1, e(t) = v_1 / \alpha - c$  指数趋于零, 其中  $c = \lambda^2 / (k_1 - \lambda)^2$ .

**证** 闭环系统为  $\ddot{y}_1 + 2k_1 \dot{y}_1 + k_1^2 y_1 = \alpha$ . 由于  $k_1 > 0, \alpha(t)$  指数收敛到零, 所以  $(y_1, \dot{y}_1)$  指数收敛到零. 作状态变换  $y_{11} = y_1 / \alpha, y_{12} = \dot{y}_1 / \alpha$ , 则有

$$\dot{y}_{11} = y_{12} + \lambda y_{11},$$

$$\dot{y}_{12} = -(2k_1 - \lambda) y_{12} - k_1^2 y_{11} + 1,$$

$$\dot{y}_{11} = -2(k_1 - \lambda) \dot{y}_{11} - (k_1 - \lambda)^2 y_{11} + 1.$$

由  $k_1 > \lambda > 0$  知,  $y_{11}$  指数收敛于  $1 / (k_1 - \lambda)^2, \dot{y}_{11}$  指数趋于零,  $y_{12} = \dot{y}_{11} - \lambda y_{11}$  指数趋近于  $-\lambda / (k_1 - \lambda)^2, v_1 / \alpha = -2k_1 \dot{y}_{12} - k_1^2 y_{11} + 1$  指数收敛于

$$-2k_1(-\lambda) / (k_1 - \lambda)^2 - k_1^2 / (k_1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 / (k_1 - \lambda)^2 = c,$$

即  $e(t) = v_1 / \alpha - c$  指数收敛于零.

**定理 2** 时变光滑反馈控制

$$v_1 = -2k_1\dot{y}_1 - k_1^2 y_1 + \alpha, \quad (7)$$

$$v_2 = -k_{21}y_2 - k_{22}\dot{y}_2 - k_{31}y_3/\alpha - k_{32}\dot{y}_3/\alpha$$

可以保证二阶链式系统(4)的所有状态指数收敛到零.其中  $k_1 > \lambda > 0, \alpha = e^{-\lambda t}, k_{21}, k_{22}, k_{31}, k_{32}$  使得矩阵

$$A_{1k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{21} & -k_{22} & -k_{31} & -k_{32} \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ c & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

为 Hurwitz 阵.

证 由引理 2 知,控制  $v_1$  可保证  $y_1, \dot{y}_1, e(t)$  指数趋于零.进行以下状态变换

$$\begin{aligned} y_{21} &= y_2, y_{22} = \dot{y}_2, \\ y_{31} &= y_3/\alpha, y_{32} = \dot{y}_3/\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

对式(8)各等式两边求导并利用式(4)和(7)可得

$$\begin{cases} \dot{y}_{21} = y_{22}, \\ \dot{y}_{22} = -k_{21}y_{21} - k_{22}y_{22} - k_{31}y_{31} - k_{32}y_{32}, \\ \dot{y}_{31} = y_{32} + \lambda y_{31}, \\ \dot{y}_{32} = cy_{21} + \lambda y_{32} + e(t)y_{21}. \end{cases} \quad (9)$$

式(9)又可写为  $\dot{\bar{y}} = (A_{1k} + A_2 e(t))\bar{y}$ , 其中

$$\bar{y} = [y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}]^T, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于  $e(t)$  指数趋于零,  $A_{1k}$  为稳定阵,所以由引理 1 知,系统(9)指数稳定,即  $\bar{y}$  指数趋于零,从而  $(y_2, \dot{y}_2, y_3, \dot{y}_3)$  指数趋于零.前已证明  $(y_1, \dot{y}_1)$  指数趋于零,所以系统(4)的所有状态  $(y, \dot{y})$  指数趋于零.

注 1 总可选择  $k_{21}, k_{22}, k_{31}, k_{32}$  使得  $A_{1k}$  为 Hurwitz 阵.

注 2 控制律(7)为时变光滑,克服了文[13~15]中控制律对系统初始状态的限制.

## 5 算例(Example)

考虑在水平面内运动的刚体,其质量和转动惯量分别为  $m$  和  $I$ .记  $(x, y, \theta)$  分别为刚体质心在惯性坐标系中的位置和刚体的姿态角,施加在刚体上的外力为  $(F_1, F_2)$  且分别沿惯性坐标系的  $x$  轴和  $y$  轴方向,外力作用点距刚体质心的距离为  $r$ .刚体的运动方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_1, m\ddot{y} = F_2, \\ I\ddot{\theta} &= F_1 r \sin \theta - F_2 r \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

假定  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ , 则在进行以下输入反

馈变换

$$u_1 = F_1/m, u_2 = (F_1 r \sin \theta - F_2 r \cos \theta)/I$$

后,刚体运动方程可重写为

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u_1, \ddot{\theta} = u_2, \\ \dot{y} &= u_1 \tan \theta - u_2 I/(rm) \sec \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

应用定理 1 可将模型(11)转换为二阶链式标准型(4),相应的输入和坐标变换为

$$\begin{cases} y_1 = x + I/(rm)(\cos \theta - 1), \\ y_2 = \tan \theta, \\ y_3 = y + I/(rm) \sin \theta, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} v_1 = -I/(rm)\theta^2 \cos \theta + u_1 - \\ \quad u_2 I/(rm) \sin \theta, \\ v_2 = \sec^2 \theta (u_2 + 2\theta^2 \tan \theta) \end{cases} \quad (13)$$

应用定理 2 中给出的控制律(7)进行仿真,相应的物理和设计参数取为

$$\begin{aligned} m &= 1, I = 1.2, r = 1, \lambda = 2, \alpha(0) = 15, \\ k_1 &= 4, k_{21} = 68, k_{22} = 12, \\ k_{31} &= 256, k_{32} = 256, \end{aligned}$$

初始条件取为  $(x_0, \theta_0, y_0) = (2, -\pi/4, -2)$ .图 1, 2 分别为状态  $(x, \theta, y)$  和  $(\dot{x}, \dot{\theta}, \dot{y})$  的时间轨迹,可以看出刚体的所有状态指数都趋于零.

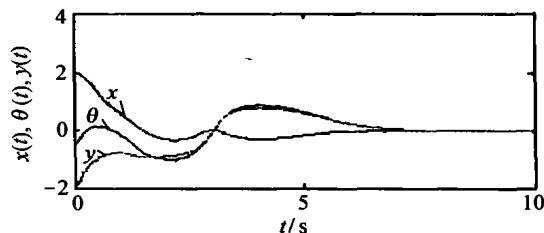


图 1 状态  $(x, \theta, y)$  的时间轨迹

Fig. 1 Time trajectories of states  $(x, \theta, y)$

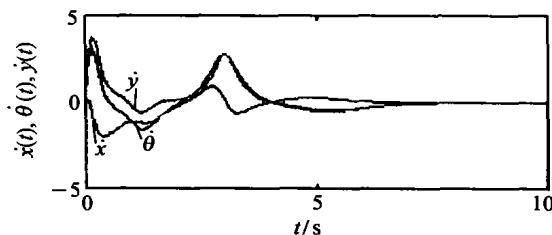


图 2 状态  $(\dot{x}, \dot{\theta}, \dot{y})$  的时间轨迹

Fig. 2 Time trajectories of states  $(\dot{x}, \dot{\theta}, \dot{y})$

## 6 结论(Conclusion)

本文讨论了一类受二阶非完整约束的非线性系统的镇定问题.通过输入和坐标变换将系统模型转换为二阶链式标准型,并对标准型设计了时变光滑指数镇定控制器.所得结果应用于欠驱动平面刚体

的位置和姿态的同时镇定,证实了文中方法的有效性.

### 参考文献(References):

- [1] ORIOLO G, NAKAMURA Y. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: underactuated manipulators [A]. *Proc of 30th Conf on Decision and Control* [C]. Brighton: [s. n.], 1991: 2398 - 2403.
- [2] SUZUKI T, KOINUMA M, NAKAMURA Y. Chaos and nonlinear control of a nonholonomic free-joint manipulator [A]. *Proc of 1996 IEEE Int Conf on Robotics Automation* [C]. Minneapolis, Minnesota: [s. n.], 1996: 2668 - 2675.
- [3] SUZUKI T, NAKAMURA Y. Nonlinear control of a nonholonomic free joint manipulator with the averaging method [A]. *Proc of 35th Conf on Decision and Control* [C]. Kobe: [s. n.], 1996: 1694 - 1699.
- [4] de LUCA A, MATTONE R, ORIOLO G. Control of underactuated mechanical systems: application to the planar 2R robot [A]. *Proc of 35th Conf on Decision and Control* [C]. Kobe: [s. n.], 1996: 1455 - 1460.
- [5] ARAI H. Position control of a 3-DOF manipulator with a passive joint under a nonholonomic constraint [A]. *Proc of 30th Conf Decision and Control* [C]. Brighton: [s. n.], 1991: 3707 - 3713.
- [6] ARAI H, TANIE K, SHIROMA N. Feedback Control of a 3-DOF planar underactuated manipulator [A]. *Proc of 1997 IEEE Int Conf on Robotics and Automation* [C]. Albuquerque, New Mexico: [s. n.], 1997: 703 - 709.
- [7] IMURA J, KOBAYASHI K, YOSHIKAWA. Nonholonomic control of 3-link planar manipulator with a free joint [A]. *Proc of 35th Conf on Decision and Control* [C]. Kobe: [s. n.], 1996: 1435 - 1436.
- [8] RATHINAM M, MURRAY R M. Configuration flatness of Lagrangian systems underactuated by one control [A]. *Proc of 35th Conf on Decision and Control* [C]. Kobe: [s. n.], 1996: 1688 - 1693.
- [9] ARAI H, TANIE K. Time-Scaling control of an underactuated manipulator [J]. *J of Robotic Systems*, 1998, 15(9): 525 - 536.
- [10] de LUCA A, MATTONE R, ORIOLO G. Steering a class of redundant mechanisms through end-effector generalized forces [J]. *IEEE Trans Robotics and Automation*, 1998, 14(2): 329 - 335.
- [11] REYHANOGULU M. Control and stabilization of an underactuated surface vessel [A]. *Proc of 35th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Kobe: [s. n.], 1996: 2371 - 2376.
- [12] REYHANOGULU M, CHO S, McCLAMROCH N H, et al. Discontinuous feedback control of a planar rigid body with an unactuated degree of freedom [A]. *Proc of 37th Conf on Decision and Control* [C]. Tampa, Florida: [s. n.], 1998: 433 - 438.
- [13] XU W L, MA B L. Stabilization of second-order nonholonomic systems in canonical chained form [J]. *Robotics and Autonomous System*, 2001, 34: 223 - 233.
- [14] LAIOU M C, ASTOLFI A. Exponential stabilization of high-order chained systems [A]. *IFAC Symposium on Nonholonomic Control System Design* [C]. The Netherlands: Enschede, 1998.
- [15] LAIOU M C, ASTOLFI A. Discontinuous control of high-order generalized chained systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(5): 309 - 322.
- [16] 李世华, 田玉平. 非完整向量场式系统的光滑时变指数镇定 [J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(3): 317 - 322.  
(LI Shihua, TIAN Yuping. Smooth time-varying exponential stabilization of nonholonomic systems in the vector power form [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(3): 317 - 322.)
- [17] SLOTINE J J E, LI Weiping. *Applied Nonlinear Control* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1991.

### 作者简介:

马保离 (1963 —), 男, 1995 年获北京航空航天大学控制理论与控制工程专业博士学位, 同年进入北京航空航天大学机器人研究所从事博士后研究, 1997 年 12 月至今在北京航空航天大学第七研究室工作, 主要研究兴趣为: 机器人动力学与控制, 非完整系统控制.  
E-mail: ma\_baoli@yahoo.com.