

基于 Kalman 滤波的带相关噪声系统统一的 Wiener 状态估值器

邓自立, 孙书利

(黑龙江大学 应用数学研究所 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 基于 Kalman 滤波和白噪声估值器, 对带非零均值相关噪声系统提出了渐近稳定的统一的和通用的 Wiener 状态估值器. 它们可统一处理滤波、平滑和预报问题, 且避免了计算最优初始状态估值. 它们揭示了 Kalman 滤波器和 Wiener 滤波器之间的关系. 一个仿真例子说明其有效性.

关键词: 相关噪声系统; 状态估计; Wiener 滤波器; Kalman 滤波方法

中图分类号: O211.64 **文献标识码:** A

Wiener state estimators based on Kalman filtering for systems with correlated noises

DENG Zi-li, SUN Shu-li

(Institute of Applied Mathematics, Department of Automation, Heilongjiang University, Heilongjiang Harbin 150080, China)

Abstract: Based on the Kalman filtering and white noise estimators, the unified, general and asymptotically stable Wiener state estimators were presented for systems with correlated noises having non-zero means. They could handle the filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework, and avoid computing the optimal initial state estimates. The relation between the Kalman filter and Wiener filter was discovered. A simulation example shows their effectiveness.

Key words: systems with correlated noises; state estimation; Wiener state filter; Kalman filtering method

1 引言 (Introduction)

经典 Kalman 滤波理论不能统一处理状态滤波、平滑和预报问题^[1]. 特别 Kalman 平滑器的计算较为复杂, 要求计算最优初值和误差方差阵的逆矩阵. 本文基于 Kalman 滤波器和白噪声估值器^[2], 对带非零均值的相关噪声系统提出了渐近稳定的统一的 Wiener 状态估值器. 它们可在统一框架下处理状态滤波、平滑和预报问题. 算法简单, 避免了计算最优初值和误差方差阵的逆矩阵. 基本原理是: 利用系统可观性将状态表为白噪声和观测信号的线性组合, 从而由射影性质引出非递推状态估值器, 它们由观测预报器和白噪声估值器来计算. 利用在 Wiener 滤波器形式下的观测预报器和白噪声估值器引出统一的 Wiener 状态估值器.

2 问题阐述 (Problem formulation)

考虑带非零均值相关噪声系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t), \quad (2)$$

其中 t 为离散时间, 状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 观测 $y(t) \in \mathbb{R}^m$, Φ, Γ 和 H 为常阵.

假设 1 $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $v(t) \in \mathbb{R}^m$ 是带非零均值的相关白噪声:

$$E w(t) = q_w, E v(t) = q_v, \\ \text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w(j) \\ v(j) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_{ij}, \quad (3)$$

其中 E 为均值号, cov 为协方差号, T 为转置号, $\delta_{ij} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j), Q_v > 0$.

假设 2 (Φ, H) 和 $(\bar{\Phi}, H)$ 均为完全可观, 且 $\bar{\Phi} = \Phi - JH, J = \Gamma S Q_v^{-1}$. (4)

问题是基于观测 $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$ 求状态 $x(t)$ 的 Wiener 状态估值器 $\hat{x}(t|t+N)$. 对 $N = 0, N > 0$ 或 $N < 0$, 各称其为状态滤波器、平滑器或预报器.

原系统可化为带零均值的相关噪声系统:

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma q_w + \Gamma w_c(t), \quad (5)$$

$$y_c(t) = Hx(t) + v_c(t), \quad (6)$$

其中定义带零均值白噪声和新的观测为

$$\begin{cases} w_c(t) = w(t) - q_w, \\ v_c(t) = v(t) - q_v, \\ y_c(t) = y(t) - q_v. \end{cases} \quad (7)$$

在假设 1,2 下有稳态 Kalman 预报器^[2]

$$\hat{x}(t+1|t) = (I_n - q^{-1}\Psi_p)^{-1}[K_p y_c(t) + \Gamma q_w], \quad (8)$$

$$y_c(t) = H\hat{x}(t|t-1) + \epsilon(t), \quad (9)$$

其中 $\Psi_p = \bar{\Phi}(I_n - KH)$, $K_p = \bar{\Phi}K + J$, 且 Ψ_p 为稳定矩阵. I_n 为 $n \times n$ 单位阵, q^{-1} 为单位滞后算子, $q^{-1}\hat{x}(t+1|t) = \hat{x}(t|t-1)$, 新息 $\epsilon(t) \in \mathbb{R}^n$ 是零均值, 方差阵为 Q_ϵ 的白噪声, K 为稳态滤波增益,

$$K = \Sigma H^T Q_\epsilon^{-1}, \quad Q_\epsilon = H\Sigma H^T + Q_v, \quad (10)$$

其中 Σ 是如下稳态 Riccati 方程的唯一正定解:

$$\Sigma = \bar{\Phi}[\Sigma - \Sigma H^T(H\Sigma H^T + Q_v)^{-1}H\Sigma]\bar{\Phi}^T + \Gamma(Q_w - SQ_v^{-1}S^T)\Gamma^T, \quad (11)$$

Σ 可用迭代算法求解^[2]. 将式(8)代入式(9)引出 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\epsilon(t) + \rho, \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Psi(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1}\Psi_p), \\ D(q^{-1}) = \Psi(q^{-1})I_m, \\ A(q^{-1}) = D(q^{-1}) - H \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p)K_p q^{-1}, \\ \rho = H \text{adj}(I_n - \Psi_p)\Gamma q_w + A(1)q_v, \end{cases} \quad (13)$$

其中 adj 为伴随阵号.

本文基于上述稳态 Kalman 滤波求 Wiener 状态估值器 $\hat{x}(t|t+N)$, 它们具有以 $y(t+N)$ 作为输入的传递函数阵形式.

3 观测信号和白噪声的 Wiener 滤波器 (Wiener filters for measurement signal and white noises)

由式(1), (2)和射影性质^[2]有状态预报器

$$\hat{x}(t+N|t) = \Phi^{N-1}\hat{x}(t+1|t) + b_N, \quad (14)$$

$$b_N = \sum_{i=0}^{N-2} \Phi^i \Gamma q_w, \quad b_1 = 0, \quad (15)$$

其中 $N \geq 2$. 由式(2)有观测预报器为

$$\hat{y}(t+N|t) = H\hat{x}(t+N|t) + q_v, \quad N \geq 1. \quad (16)$$

由式(8), (14)和(16)引出观测信号 Wiener 预报器

$$\hat{y}(t+N|t) = \Psi^{-1}(q^{-1})J_N(q^{-1})y(t) + \delta_N, \quad (17)$$

其中对 $N \geq 1$ 定义

$$J_N(q^{-1}) = H\Phi^{N-1} \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p)K_p, \quad (18)$$

$$\delta_N = H\Phi^{N-1}(I_n - \Psi_p)^{-1}(\Gamma q_w - K_p q_v) + Hb_N + q_v, \quad (19)$$

且对 $N \leq 0$ 定义

$$J_n(q^{-1}) = \Psi(q^{-1})I_m q^N, \quad \delta_N = 0. \quad (20)$$

对系统(5), (6)应用文[2]的结果有统一的白噪声新息滤波器

$$\hat{\theta}(t|t+N) = q_\theta + L_N^\theta(q^{-1})\epsilon(t+N), \quad \theta = w, v, \quad (21)$$

其中定义多项式矩阵 $L_N^\theta(q^{-1}) = 0(N < 0)$,

$$L_N^\theta(q^{-1}) = \sum_{i=0}^N M_\theta(i)q^{i-N}, \quad (22)$$

其中 $N \geq 0$, 且定义

$$\begin{cases} M_w(0) = SQ_\epsilon^{-1}, \quad M_v(0) = Q_v Q_\epsilon^{-1}, \\ M_\theta(i) = D_\theta(1)[(I_n - KH)^T \bar{\Phi}^T]^{i-1} H^T Q_\epsilon^{-1}, \\ D_w(1) = -SK^T \bar{\Phi}^T + Q\Gamma^T - SJ^T, \\ D_v(1) = -Q_v K^T \bar{\Phi}^T, \end{cases} \quad (23)$$

由式(12)有

$$\epsilon(t+N) = \Psi^{-1}(q^{-1})(A(q^{-1})y(t+N) - \rho),$$

将其代入式(21)引出白噪声 Wiener 滤波器

$$\hat{\theta}(t|t+N) = \Psi^{-1}(q^{-1})L_N^\theta(q^{-1})A(q^{-1})y(t+N) + \rho_{\theta,N} \quad (24)$$

$$\rho_{\theta,N} = q_\theta - \Psi^{-1}(1)L_N^\theta(1)\rho. \quad (25)$$

4 Wiener 状态估值器 (Wiener state estimators)

由假设 2 有非递推状态估值器^[2]

$$\hat{x}(t|t+N) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i [\hat{y}(t+i|t+N) - \sum_{j=0}^{i-1} H\Phi^{i-1-j}\Gamma \hat{w}(t+j|t+N) - \theta(t+i|t+N)], \quad (26)$$

其中规定 $\Phi^i = 0(i < 0)$ 且 $j \geq 0$, 可观阵为

$$\Omega = [H^T, (H\Phi)^T, \dots, (H\Phi^{\beta-1})^T]^T, \quad (27)$$

其中 β 为可观性指数, 且将伪逆 Ω^* 分块表为

$$\Omega^* = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T = [\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{\beta-1}]. \quad (28)$$

定理 系统(1), (2)在假设 1,2 下有渐近稳定的统一的 Wiener 状态估值器

$$\hat{x}(t|t+N) = \Psi^{-1}(q^{-1})K_N(q^{-1})y(t+N) + \mu_N, \quad (29)$$

其中定义

$$K_N(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i [J_{i-N}(q^{-1}) - \sum_{j=0}^{i-1} H\Phi^{i-1-j} \times \Gamma L_{N-j}^w(q^{-1})A(q^{-1}) - L_{N-i}^v(q^{-1})A(q^{-1})], \quad (30)$$

$$\mu_N = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i [\delta_{i-N} - \sum_{j=0}^{i-1} H\Phi^{i-1-j} \Gamma \rho_{w,N-j} - \rho_{v,N-i}]. \quad (31)$$

证 将式(17)和(21)代入式(26)引出式(29)~(31). 由于 Ψ_p 是稳定矩阵, 故 $\Psi(q^{-1})$ 是稳定的多项式, 因而估值器(29)是渐近稳定的.

推论 1 在假设 1,2 下有递推 Wiener 状态估值器

$$\Psi(q^{-1})\hat{x}(t | t + N) = K_N(q^{-1})y(t + N) + d_N, \quad (32)$$

$$d_N = \Psi(1)\mu_N. \quad (33)$$

推论 2 在假设 1,2 下, 若 $q_\theta = 0, \theta = w, v$, 则有渐近稳定的 Wiener 状态估值器

$$\Psi(q^{-1})\hat{x}(t | t + N) = K_N(q^{-1})y(t + N). \quad (34)$$

5 仿真例子 (Simulation example)

考虑带非零均值相关噪声系统

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (35)$$

$$y(t) = [1 \ 0]x(t) + v(t), \quad (36)$$

$$v(t) = 0.5w(t) + \xi(t), \quad (37)$$

其中 $w(t)$ 是均值 $q_w = 2$, 方差 $Q_w = 2$ 的高斯白噪声, $\xi(t)$ 是零均值、方差为 $Q_\xi = 1$ 且独立于 $w(t)$ 的高斯白噪声. 可得 $q_v = 1, Q_v = 1.5, S = 1$, 且

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.1863 & 1.7114 \\ 1.7114 & 1.6169 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0.5931 \\ 0.4642 \end{bmatrix},$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.9676 \\ 0.6169 \end{bmatrix}, \Psi_p = \begin{bmatrix} -0.9676 & 1.5 \\ -0.8169 & 1 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

可求得 ARMA 新息模型为:

$$\begin{aligned} (1 - q^{-1} + 0.3q^{-2})y(t) = \\ (1 - 0.0324q^{-1} + 0.2577q^{-2})\epsilon(t) + 3.3. \end{aligned} \quad (39)$$

取 $N = -2, 0, 1$, 由推论 2 Wiener 状态两步预报器、滤波器和一步平滑器可统一表为

$$\begin{aligned} (1 - 0.0324q^{-1} + 0.2577q^{-2})\hat{x}(t | t + N) = \\ K_N(q^{-1})y(t + N) + d_N, \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$K_{-2}(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.9254 \\ 0.4234 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2903 \\ -0.1851 \end{bmatrix} q^{-1},$$

$$K_0(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.5931 \\ 0.4642 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3746 \\ 0.1527 \end{bmatrix} q^{-1} + \begin{bmatrix} 0.1356 \\ -0.0543 \end{bmatrix} q^{-2},$$

$$d_{-2} = \begin{bmatrix} 5.2679 \\ 3.9139 \end{bmatrix}, d_0 = \begin{bmatrix} 0.1174 \\ 0.3461 \end{bmatrix},$$

$$K_1(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.1225 \\ 0.2087 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4706 \\ 0.2556 \end{bmatrix} q^{-1} +$$

$$\begin{bmatrix} 0.4113 \\ 0.2153 \end{bmatrix} q^{-2} + \begin{bmatrix} 0.1356 \\ -0.0543 \end{bmatrix} q^{-3},$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} -0.2867 \\ -0.3426 \end{bmatrix}.$$

任取初值 $\hat{x}(0 | N) = [10, 10]^T, N = -2, 0, 1$. 仿真结果如图 1 至图 3 所示, 实线为 $x(t)$, 虚线为 $\hat{x}(t | t + N)$, 其中

$\hat{x}(t | t + N) = [\hat{x}_1(t | t + N), \hat{x}_2(t | t + N)]^T$. 可见滤波器 $\hat{x}(t | t)$ 的精度高于预报器 $\hat{x}(t | t - 2)$ 的精度, 而平滑器 $\hat{x}(t | t + 1)$ 的精度高于滤波器 $\hat{x}(t | t)$ 的精度.

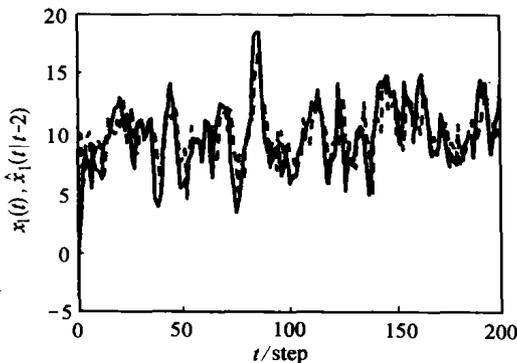


图 1 (a) $x_1(t)$ 与 Wiener 预报器 $\hat{x}_1(t | t - 2)$
Fig.1 (a) $x_1(t)$ and Wiener predictor $\hat{x}_1(t | t - 2)$

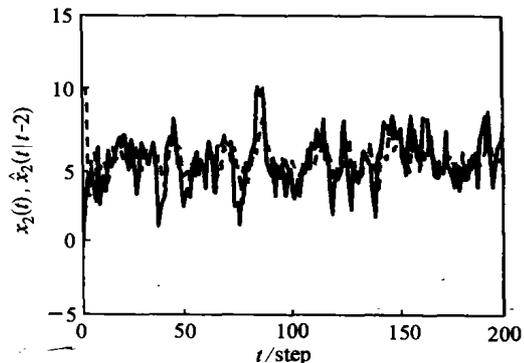


图 1 (b) $x_2(t)$ 与 Wiener 预报器 $\hat{x}_2(t | t - 2)$
Fig.1 (b) $x_2(t)$ and Wiener predictor $\hat{x}_2(t | t - 2)$

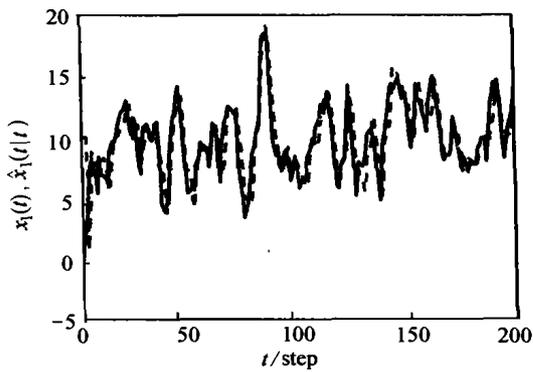


图 2 (a) $x_1(t)$ 与 Wiener 滤波器 $\hat{x}_1(t|t)$
Fig.2 (a) $x_1(t)$ and Wiener filter $\hat{x}_1(t|t)$

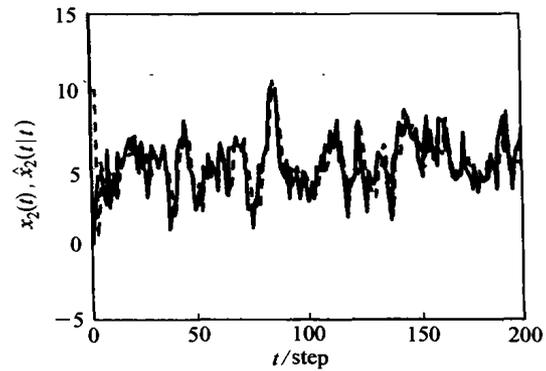


图 2 (b) $x_2(t)$ 与 Wiener 滤波器 $\hat{x}_2(t|t)$
Fig.2 (b) $x_2(t)$ and Wiener filter $\hat{x}_2(t|t)$

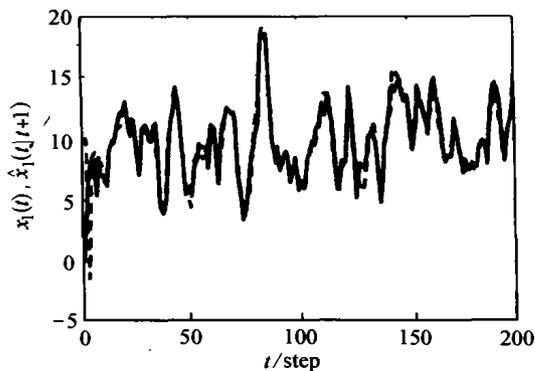


图 3 (a) $x_1(t)$ 与 Wiener 平滑器 $\hat{x}_1(t|t+1)$
Fig.3 (a) $x_1(t)$ and Wiener smoother $\hat{x}_1(t|t+1)$

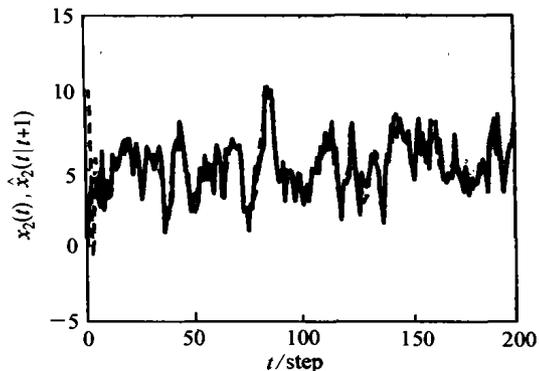


图 3 (b) $x_2(t)$ 与 Wiener 平滑器 $\hat{x}_2(t|t+1)$
Fig.3 (b) $x_2(t)$ and Wiener smoother $\hat{x}_2(t|t+1)$

6 结论(Conclusion)

本文将文[3]的带零均值不相关噪声系统的结论推广到带非零均值相关噪声系统情形. 本文用 Kalman 滤波方法和白噪声估计理论^[2]提出了统一的和通用的 Wiener 状态估值器. 由于避免了计算最优初值和误差方差阵的逆矩阵, 因而算法简单, 容易实现.

参考文献(References):

- [1] KAILATH T, SAYED AH, HASSIBI B. *Linear Estimation* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2000
- [2] 邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波, 现代时间序列分析方法[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

(DENG Zili. *Kalman filtering and Wiener filtering, Modern Time Series Analysis Method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001.)

- [3] 孙书利, 邓自立. Wiener 状态滤波器设计新方法[J]. 控制与决策, 2002, 17(4): 503-506.

(SUN Shuli, DENG Zili. New approach of designing Wiener state filters[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(4): 503-506.)

作者简介:

邓自立 (1938—), 男, 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所和自动化系教授. 研究方向为状态估计, 最优滤波, 时间序列分析等. E-mail: dzl@hlju.edu.cn;

孙书利 (1971—), 男, 1996年毕业于黑龙江大学数学系, 1999年获该校控制理论与控制工程硕士学位, 现为哈尔滨工业大学博士生. 研究方向为 Wiener 滤波, Kalman 滤波等.