文章编号：1000-8152(2003)04-0596-03

不确定系统鲁棒 LQ 设计的稳定裕度分析和工程应用研究

薛安克，蒋　楠，王建中
（杭州电子工业学院 智能信息与控制技术研究所，浙江 杭州 310037）

摘要：针对不确定线性系统，研究鲁棒 LQ 设计的稳定裕度分析问题．首先提出不确定系统 α_0 裕度稳定鲁棒界，针对结构和非结构不确定系统，分别给出了鲁棒 LQ 控制系统的鲁棒稳定裕度性分析方法，进一步给出对结构不确定系统优化鲁棒界的算法．最后是造纸打浆过程实例的鲁棒稳定裕度性分析以及相应仿真结果．

关键词：不确定线性系统；最优控制；鲁棒稳定裕度；制浆造纸过程
中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

Robust stability margin analysis of LQ design for uncertain linear systems

XUE An-ke, JIANG Nan, WANG Jiang-zhong
(Automation Department, Hangzhou Institute of Electronics Engineering, Zhejiang Hangzhou 310037, China)

Abstract: The problem of robust stability margin analysis of robust LQ design for uncertain linear systems was discussed. Based upon a modified robust difference equality, a robust bound with α_0 stability margin was presented. Then, robustness analysis approaches of robust LQ design for structured and unstructured uncertain systems were proposed respectively. For structured uncertain systems, an approach was presented to improve the robustness through selecting a proper parameter and weighting matrices. A design example of paper making process was given and corresponding simulation results were offered as well.

Key words: uncertain linear system; optimal control; robust stability margin; paper making process

1 引言(Introduction)

线性二次最优控制(简称 LQ 调节器)具有 $(1/2,\infty)$ 增益裕度和 60°相位裕度的良好性质[1]，但当系统存在不确定性时 LQ 调节器的最优特性将受到影响[1,2]．有关鲁棒 LQ(简称 RLQ)问题的研究已引起人们的广泛关注，并取得了许多研究成果[3~5]．然而，现有结果大多受到不确定性范数有界[6]等条件的约束，不可避免存在一定的保守性．如何给出不确定系统鲁棒 LQ 问题保守性的度量，解决 LQ 设计的鲁棒性分析问题，对不确定系统鲁棒 LQ 调节器的分析和综合是十分有意义的．

本文考虑不确定性进入状态矩阵和输入矩阵的线性系统，提出鲁棒 α_0 稳定裕度的概念，给出非结构和一类结构不确定系统具有 α_0 稳定裕度的鲁棒界．对结构不确定系统，本文还进一步给出一种通过参数和性能指标加权阵选择来改善不确定闭环系统鲁棒性的方法，从而减少鲁棒 LQ 设计的保守性．

2 问题提出和基本公式(Statement of problem)

考虑由以下状态方程描述的一类不确定线性系统

$$\dot{x}(t)=(A_0+\Delta A)x(t)+(B_0+\Delta B)u(t),\quad x(0)=x_0. \tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量，$u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是系统的控制输入，$A_0\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $B_0\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 是已知常数矩阵，ΔA 和 ΔB 是具适当维数的不确定实值矩阵．

系统(1)所对应的性能指标为

$$J=\int_0^\infty (x(t)^{\mathrm{T}}Qx(t)+ru(t)^{\mathrm{T}}u(t))\mathrm{d}t. \tag{2}$$

这里 $Q>0, r>0$．若假设 (A_0,B_0) 可稳，则式(1)所对应的标称系统 $\Sigma(A_0,B_0)$（即 $\Delta A=0$ 和 $\Delta B=0$）和性能指标(2)有状态反馈最优控制

$$u(t)=-Kx(t)=-r^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{3}$$

使闭环系统渐近稳定，并具有无穷增益和 60°相位的最优稳定裕度．其中 P 为下面代数 Riccati 方程的唯一正定解

收稿日期：2001-07-11；收修改稿日期：2002-05-13．
基金项目：国家自然科学基金(69874036,60174029)；浙江省自然科学重点基金(ZD9905)资助项目．

$$PA_0 + A_0^{\mathrm{T}}P + Q - r^{-1}PB_0B_0^{\mathrm{T}}P = 0. \tag{4}$$

当系统(1)存在不确定性时,由式(3)构成的不确定闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A - (B_0 + \Delta B)K)x(t) \tag{5}$$

的稳定裕度甚至渐近稳定性都将受到影响.

3 鲁棒稳定性能条件(Conditions of robust stability performance)

对矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 记 $\bar{\lambda}(X)[\bar{\sigma}(X)]$ 和 $\underline{\lambda}(X)[\underline{\sigma}(X)]$ 分别表示矩阵 X 的最大和最小特征值(奇异值).

引理 1[3] 若记 $T(s) = K\Phi(s)B$,其中 $A = A_0 + \Delta A$, $B = B_0 + \Delta B$, $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$, $K = r^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P$. 如果存在某正常数 $\alpha_0 \leqslant 1$, 使下式成立

$$\underline{\sigma}(I + T(s)) \geqslant \alpha_0, \tag{6}$$

则规范 LQ 调节器具有增益裕度和相位裕度

$$GM = 1/(1 \pm \alpha_0), \tag{7}$$

$$PM = \pm \cos^{-1}(1 - \alpha_0^2/2). \tag{8}$$

定义 1 对不确定系统(1)和性能指标(2),如果存在状态反馈控制(3),使系统(1)具有式(7)和式(8)所示的稳定裕度,则称不确定闭环系统(5)是鲁棒 α_0 裕度稳定的, $u(t)$ 为对应的鲁棒 α_0 裕度控制.

4 鲁棒性能分析(Analysis of robust stability performence)

定理 1 如果存在常数 $\varepsilon > 0$, $f > 0$ 和一个正定对称矩阵 $P > 0$,对不确定系统(1)的任意非结构不确定性 ΔA 和 ΔB, 满足

$$\bar{\sigma}^2(\Delta A) < \varepsilon^{-1}\underline{\lambda}(Q - \varepsilon^{-1}P^2 - fI), \tag{9}$$

$$\bar{\sigma}^2(\Delta B) < r(1 - \alpha_0^2)f/p. \tag{10}$$

其中 $p = \bar{\sigma}^2(P)$,则系统(1)在状态反馈控制(3)下的不确定闭环系统(5)是鲁棒 α_0 裕度稳定的,式(9)和式(10)为系统(1)的具 α_0 裕度稳定的鲁棒界.

证 记 $M = Q - \varepsilon^{-1}P^2 - fI$,从式(9)可知 $M > 0$,且有 $\varepsilon\bar{\sigma}^2(\Delta A) - \underline{\lambda}(M) < 0$, 从而有

$$\begin{aligned}&\bar{\lambda}(\varepsilon\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A - M) \leqslant \bar{\lambda}(\varepsilon\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A) + \bar{\lambda}(-M) \leqslant \\ &\bar{\lambda}(\varepsilon\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A) - \underline{\lambda}(M) < \varepsilon\bar{\sigma}^2(\Delta A) - \underline{\lambda}(M) < 0.\end{aligned} \tag{11}$$

因为

$$\Delta A^{\mathrm{T}}P + P\Delta A \leqslant \varepsilon\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A + \varepsilon^{-1}P^2, \tag{12}$$

所以有

$$Q - \Delta A^{\mathrm{T}}P - P\Delta A > fI. \tag{13}$$

因为

$$\begin{aligned}&r(I + K\Phi(-s)B)^{\mathrm{T}}(I + K\Phi(s)B) > \\ &rI + f[B^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(-s) - f^{-1}\Delta B^{\mathrm{T}}P]\cdot \\ &[\Phi(s)B - f^{-1}P\Delta B] - f^{-1}\Delta B^{\mathrm{T}}PP\Delta B \geqslant \\ &rI - f^{-1}\Delta B^{\mathrm{T}}PP\Delta B,\end{aligned} \tag{14}$$

令 $p = \bar{\sigma}^2(P)$, $b = \bar{\sigma}^2(\Delta B)$, 则

$$(I + K\Phi(-s)B)^{\mathrm{T}}(I + K\Phi(s)B) > (1 - pb/rf)I. \tag{15}$$

将式(10)代入,可得

$$(I + K\Phi(-s)B)^{\mathrm{T}}(I + K\Phi(s)B) > \alpha_0^2. \tag{16}$$

因此根据引理1即知本定理成立. 证毕

考虑系统(1)如下形式的结构不确定性 ΔA 和 ΔB

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{l} k_iA_i,\ \Delta B = \sum_{i=l+1}^{g} k_iB_i. \tag{17}$$

这里 $k_i \in \mathbb{R}^1$ 为不确定实参数, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}(i = 1,\cdots,l)$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}(i = l+1,\cdots,g)$ 为给定的实常矩阵.

定理 2 如果存在常数 $\varepsilon > 0$ 和一个正定对称矩阵 $P > 0$,对不确定系统(1)任意满足式(17)形式的结构不确定性 ΔA 和 ΔB, 有

$$\sum_{i=1}^{l} |k_i|\bar{\sigma}(A_i) < (\varepsilon^{-1}\underline{\lambda}(Q - \varepsilon^{-1}P^2 - fI))^{1/2},$$

$$\sum_{i=l+1}^{g} |k_i|\bar{\sigma}(B_i) < (r(1 - \alpha_0^2)f/p)^{1/2}, \tag{18}$$

则系统(1)在状态反馈控制(3)下的不确定闭环系统(5)是鲁棒 α_0 裕度稳定的,式(18)称为系统(1)的 α_0 裕度稳定鲁棒界(仿照定理1的证明过程).

应用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\left|\sum_{i=1}^{l}|k_i|\bar{\sigma}(A_i)\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{l}|k_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{l}\bar{\sigma}^2(A_i). \tag{19}$$

因此,要使式(18)成立,只要

$$\sum_{i=1}^{l}|k_i|^2 < \frac{\underline{\lambda}(Q - \varepsilon^{-1}P^2 - fI)}{\varepsilon\sum_{i=1}^{l}\bar{\sigma}^2(A_i)},$$

$$\sum_{i=l+1}^{g}|k_i|^2 < \frac{r(1 - \alpha_0^2)f/p}{\bar{\sigma}^2(B_i)}. \tag{20}$$

由此即可通过参数优化方法来改进不确定系统的鲁棒 α_0 裕度稳定性能.其优化问题可归结为如下命题

$$Ha = \max_{\varepsilon,f,Q,P}\frac{\underline{\lambda}(Q - \varepsilon^{-1}P^2 - fI)}{\varepsilon\sum_{i=1}^{l}\bar{\sigma}^2(A_i)},$$

$$Hb = \max_{f,Q,P,R}\frac{r(1 - \alpha_0^2)f/p}{\bar{\sigma}^2(B_i)}. \tag{21}$$

Ha 为系统矩阵的鲁棒界, Hb 为输入矩阵的鲁棒界.

5 设计举例(Examples)

某制浆造纸打浆过程的动态不确定系统[7]如下所示:

$$A=\begin{bmatrix}-1.25 & 0 & 0\\ 0 & -1.56 & 2.21\\ 0 & 0 & -6.20\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-0.07 & 0.07 & 0\\ 0 & -1.57 & 0\\ 0 & 0 & 3.10\end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\Delta A=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & 0\\ 0 & k_3 & k_4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta B=\begin{bmatrix}k_5 & 0 & 0\\ 0 & k_6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{23}$$

性能指标权值矩阵为

$$Q=\mathrm{diag}\,(10000,10000,10000),\ r=1. \tag{24}$$

根据式(3)设计最优控制器,得

$$u(t)=\begin{bmatrix}-83.6221 & -3.5309 & -0.0251\\ 4.4291 & -98.9091 & -0.4678\\ 1.1098 & 0.9732 & 98.0258\end{bmatrix}x(t). \tag{25}$$

从式(21)中可以看出 f 的选取将直接影响两个鲁棒界,图 1 给出了相位裕度为 20°时的两个鲁棒界与 f 的关系,其中 Ha 的求取采用参数 ε 优化方法.

由于 $M>0$ 条件限制,所以 f 不能无限增加,f 的取值为 0 ~ 8000.从图中可以看出 Ha 将随着 f 的增大而减小,最大为 4.3,Hb 随着 f 的增大而增加,最大为 0.0049.另外,由于 Hb 数量级比较小,因而输入矩阵中的不确定性对系统性能有更强的影响,这亦符合实际情况.

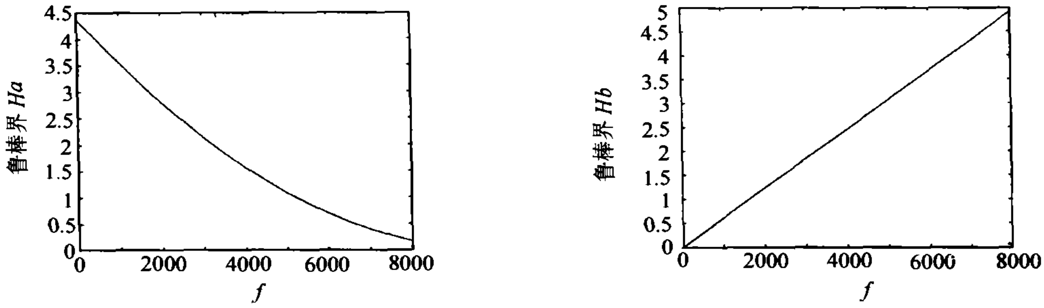

图 1　鲁棒 20°相位裕度界 H_a 和 H_b 与 f 的关系

Fig.1　H_a and H_b against f with 20 degree robust stability margins

对不确定因素处于鲁棒界内,取 $k_1=0.5,k_2=0.5,k_3=0.5,k_4=0.5,k_5=0.03,k_6=0.03$(实线);$k_1=-0.5,k_2=-0.5,k_3=-0.5,k_4=-0.5,k_5=-0.03,k_6=-0.03$(虚线)两组不确定参数,进行仿真实验.作为比较,再做不确定因素大于鲁棒界的仿真实验.分别取稍大于鲁棒界一点 $k_1=1.3,k_2=0.6,k_3=0,k_4=0,k_5=0.06,k_6=0$(实线);和 $k_1=0,k_2=0,k_3=0,k_4=0,k_5=0,k_6=1.63$(虚线);以及大于鲁棒界较多 $k_1=0,k_2=0,k_3=0,k_4=0,k_5=0,k_6=1.63$(点划线)做仿真实验,结果如图 2 和图 3 所示.

从图 2 中可见,对于鲁棒最优界内的所有不确定因素,系统的鲁棒性和动态性能都比较理想.分析图 3 中曲线可知,对于稍大于鲁棒界一点的第一组不确定因素说明我们得出的鲁棒界相当准确.而就第二、三组不确定因素来说,鲁棒界显得有些保守,鲁棒界出现保守性的主要原因是在公式推导过程中运用了不等式,以及采用最大和最小特征值(奇异值),使得各个不确定因素的鲁棒界都一样大小,而实际上各个不确定因素对系统性能的影响差异较大.

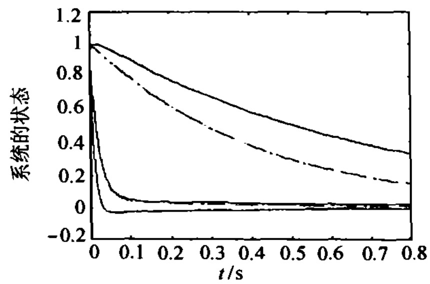

图 2　不确定因素在鲁棒界内的系统状态响应曲线

Fig.2　The state responses of uncertainties in the robust bound

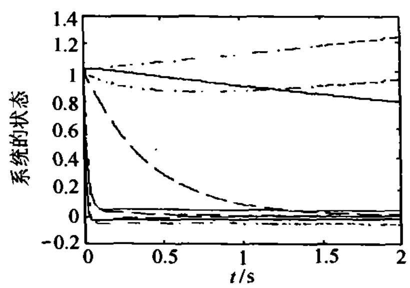

图 3　不确定因素在鲁棒界外的系统状态响应曲线

Fig.3　The state responses of uncertainties beyond the robust bound

(下转第 602 页)

的结果,后部分为权值经过学习后在同样的初始条件下控制结果.仿真结果表明了预解模糊原理以及预解模糊 FAMNC 控制器的有效性.

6 结论(Conclusion)

本文以模糊联想记忆(FAM)和神经网络为基础,提出一种新的智能控制器(FAMNC),并进行仿真研究.首先在模糊联想记忆(FAM)基础上,提出了预解模糊 FAM 原理,证明了预解模糊 FAM 和一般 FAM 的等价性.然后利用前向神经网络调整模糊规则的权值,实现模糊推理自适应,从而形成 FAM 神经控制器(FAMNC).以小车倒立摆为控制对象进行了仿真研究,表明了本方法的可行性.

参考文献(References):

[1] CAI Zi-xing. *Intelligent Control: Principle, Techniques and Applications* [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co, 1996.

[2] 孙增圻.智能控制理论与应用技术[M].北京:清华大学出版社,1997.
(CUN Zeng-qi. *Theory and Techniques of Intelligent Control* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997.)

[3] KOSKO B. *Neural Networks and Fuzzy Systems* [M]. New Jersy: Prentice-Hall, 1992.

[4] 文敦伟,蔡自兴.基于自适应神经网络的规则自修正模糊控制器[J].中国有色金属学报,1995,5(4):414-418.
(WEN Dun-Wei, CAI Zi-Xing. A fuzzy controller with rule self-tuning based on adaptive neural network [J]. *The Chinese J of Nonferrous Metals*, 1995, 5(4):414-418.)

[5] WANG Jing, CAI Zi-xing, JIA Li-min. Direct fuzzy neural control with application to automatic train operation [J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(3):391-399.

[6] WANG P P, TYAN C Y. Fuzzy dynamic system and fuzzy linguistic controller classification [J]. *Automatica*, 1994, 30(11): 1769-1774.

[7] ZHANG B S, EDMUNDS J M. Self-organizing fuzzy logic controller [J]. *IEE Proc-D*, 1992, 139(5):460-464.

[8] CHEN J Q, LU L J. Analysis and synthesis of fuzzy closed-loop control systems [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1995, 25(5):881-888.

作者简介:

蔡自兴 (1938 —),男,教授,博士生导师,联合国专家,纽约科学院院士.主要研究领域为人工智能,智能控制,智能机器人;

文敦伟 (1965 —),男,博士,副教授.主要研究领域为分布式人工智能,智能控制,智能软件.E-mail:dwwen@mail.csu.edu.cn.

(上接第 598 页)

6 结束语(Conclusion)

本文给出了不确定系统鲁棒 LQ 设计的稳定裕度条件,提出了不确定系统鲁棒 α_0 裕度稳定鲁棒界,并分别给出了结构和非结构不确定系统的鲁棒稳定裕度性分析方法.对结构不确定系统,本文还给出了一种通过参数和性能指标加权阵选择来提高鲁棒 LQ 设计鲁棒界的优化求解方法.本文所提出的问题和方法,对鲁棒控制理论中时频域结合的应用研究进行了有益的探讨.制浆造纸过程鲁棒 LQ 控制系统应用实例证明了结论的正确和有效性.

参考文献(References):

[1] SAFONOV M G, ATHANS M. Gain and phase margins for multiloop LQG regulators [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(2):173-179.

[2] DOUGLAS J, ATHANS M. Robust linear quadratic designs with real parameter uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1):107-111.

[3] LEHTOMAKI N A, SANDELL Jr N R, ATHANS M. Robustness results in linear Gaussian based multivariable control designs [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(1):75-92.

[4] ANDERSON B O O, MOORE J B. *Optimal Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.

[5] CHUNG D, KANG T, LEE J G. Stability robustness of LQ optimal regulators for the performance index with cross-product terms [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(8):1698-1702.

[6] PETERSEN I R. A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 30(9):904-907.

[7] 薛安克,吕应权,孙优贤.性能指标含交叉项的不确定线性系统鲁棒保稳定控制[J].控制理论与应用,2000,17(5):742-746.
(XUE Anke, LÜ Yingquan, SUN Youxian. Robust guaranteed stability control of uncertain linear systems for the performance index with cross-product term [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(5):742-746.)

作者简介:

薛安克 (1957 —),男,博士,教授,博士生导师,1982 年获山东大学数学系控制理论专业理学学士学位,1986 年获东北重型机械学院工业自动化专业工学硕士学位,1997 年获浙江大学工业自动化专业工学博士学位,2000 年浙江大学计算机科学与技术博士后流动站出站,发表论文 80 多篇.目前主要研究领域为鲁棒和最优控制,智能控制,信息融合,先进控制等理论和技术及其在工业生产过程中的应用.E-mail:akxue@hziee.edu.cn;

蒋 楠 (1976 —),男,硕士研究生.1998 年获浙江大学工业自动化专业工学学士学位.研究方向为鲁棒控制和 H_∞ 控制理论及应用;

王建中 (1963 —),男,副教授.1985 年获西安电子科技大学计算机软件专业学士学位,1993 年获浙江大学计算机应用专业工学硕士学位.主要研究方向为计算机信息处理,信息融合,先进制造技术.