文章编号: 1000-8152(2003)04-0619-04

不确定时滞系统保性能弹性控制器的设计

关新平, 邬 晶, 龙承念
(燕山大学 电气工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 研究了一类不确定时滞系统的保性能控制问题,其不确定性不仅存在于系统矩阵,而且存在于控制器的增益中.在控制器增益摄动具有加法和乘法两种结构形式下,讨论了系统的弹性保性能控制器设计问题,给出了弹性保性能控制器存在的充分必要条件.数值算例说明了设计的可行性和有效性.

关键词: 控制器增益摄动; 线性矩阵不等式; 弹性保性能控制

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Resilient guaranteed cost controller design for uncertain time-delayed systems

GUAN Xin-ping, WU Jing, LONG Cheng-nian
(Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: The problem of guaranteed cost control for a class of uncertain time-delayed systems was addressed. The uncertainties existed both in the systematic matrix, and in the controller gain. And the design methods for resilient guaranteed cost control under two classes of perturbations, additive and multiplicative, were given respectively. A numerical example illustrates the effectiveness of the design procedures.

Key words: controller gain perturbations; LMIs; resilient guaranteed cost control

1 引言(Introduction)

近几年来,许多学者对时滞不确定系统的保性能控制问题进行了研究[1,2].但 Keel 和 Bhattacharyya 在最近的文献[3]指出,现有的鲁棒控制设计方法(如 H_∞, μ, l_1, 等综合方法)都是仅考虑系统参数的不确定性,而没有考虑控制器增益的不确定性.当控制器参数存在摄动时(这种情况经常出现,例如,系统初运行时,控制器的微调,以及控制器性能衰减时,增益参数的变化),传统的鲁棒控制方法表现出高度的脆弱性.而目前的研究大多数仅限于对系统参数的不确定性进行鲁棒设计,对控制器参数本身的不确定性的鲁棒控制及应用研究还很少[4,5].文[6,7]就控制器参数不确定性的不同形式讨论了具保性能的弹性控制器设计方法.其中文[6]考虑的是离散系统的保性能弹性控制器的设计,且系统参数不具有不确定性和时滞项.文[7]对保性能弹性控制器的设计原理进行了概述,但没有给出保性能弹性控制器的具体设计方法.而对时滞系统的保性能弹性控制器的设计,据作者所知,在国内外至今还未有报导.

基于此,本文考虑了控制器增益具有摄动的时滞不确定系统的保性能控制问题,在增益摄动具有加法和乘法两种形式下,讨论了控制器增益的设计方法并给出了时滞系统保性能控制器存在的充分必要条件,其存在性依赖于 LMIs 的可行解.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下不确定时滞系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(A_d+\Delta A_d)x(t-\tau)+Bu(t),\\ x(t)=\varphi(t),\ t\in[-\tau,0],\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是控制输入向量, A, A_d, B 是具有适当维数的常数矩阵, ΔA, ΔA_d 是具有适当维数的用以表述系统的不确定,且满足如下限制条件:

$$\Delta A=H_1F_1E_1,\ \Delta A_d=H_2F_2E_2,\ F_i^{\mathrm{T}}F_i\leqslant I, \tag{2}$$

式中 H_1, H_2, E_1, E_2 是具有适当维数的常数矩阵, $F_i(i=1,2)$ 为具有 Lebesgue 可测元素的未知矩阵.

收稿日期:2001-10-24; 收修改稿日期:2002-10-18.
基金项目:国家自然科学基金(60174010)资助项目.

引入保性能函数：

$$J=\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t, \quad (3)$$

式中 $Q>0, R>0$ 是给定的加权矩阵. 对给定系统(1),设计一具有增益摄动的控制器：

$$u(t)=(K+\Delta K)x(t) \quad (4)$$

使得给定系统(1)具有保性能特性. 式中 K 为控制器的增益,ΔK 为增益摄动.

本文考虑如下两种形式的增益摄动：

a) 加法式

$$\Delta K=H_3F_3E_3,\ F_3^{\mathrm{T}}F_3\leqslant I; \quad (5)$$

b) 乘法式

$$\Delta K=H_4F_4E_4K,\ F_4^{\mathrm{T}}F_4\leqslant I. \quad (6)$$

其中 H_3,H_4,E_3,E_4 为已知常数矩阵,$F_i(i=3,4)$ 为具有 Lebesgue 可测元素的未知矩阵.

3 主要结果(Main results)

为得到具有摄动的弹性控制器存在的充分必要条件,先给出如下代换和定义,且 * 号代表矩阵的对称块：

$$\tilde{A}=A+B(K+\Delta K),$$
$$\Psi_1=\Psi+\varepsilon^{-1}E_3^{\mathrm{T}}E_3,$$
$$\Psi=E_1^{\mathrm{T}}E_1+E_2^{\mathrm{T}}E_2+I,$$
$$L=I+E_2^{\mathrm{T}}E_2,$$
$$W_1=W-BR^{-1}B^{\mathrm{T}},$$
$$T=A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+\Psi,$$
$$W=A_dA_d^{\mathrm{T}}+H_1H_1^{\mathrm{T}}+H_2H_2^{\mathrm{T}},$$
$$U=R+\varepsilon^{-1}E_4^{\mathrm{T}}E_4-RH_4H_4^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}}E_4.$$

定义 1 称系统(1)是鲁棒稳定的,如果存在一正定对称矩阵 P,对两种形式的 ΔK, 都使得下式成立：

$$\begin{bmatrix}\tilde{A}^{\mathrm{T}}P+P\tilde{A}+\Psi & * \\ P & -W^{-1}\end{bmatrix}<0. \quad (7)$$

定义 2 称系统(1)~(3)是具有保性能的鲁棒稳定,如果存在一正定对称矩阵 P,对两种形式的 ΔK, 都使得下式成立：

$$\begin{bmatrix}\tilde{A}^{\mathrm{T}}P+P\tilde{A}+\Psi+Q & * & * \\ P & -W^{-1} & * \\ K+\Delta K & 0 & -R^{-1}\end{bmatrix}<0. \quad (8)$$

定理 1 若存在一正定对称矩阵 P 使得式(8)成立,则系统(1)是稳定的且保性能函数满足：

$$J=\int_0^{\infty}(x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t))\mathrm{d}t\leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0+\int_{-\tau}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(t)L\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

证 构造如下 Lyapunov 泛函

$$V(t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)Lx(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

则

$$\dot{V}\leqslant x^{\mathrm{T}}[\tilde{A}^{\mathrm{T}}P+P\tilde{A}+\Psi+PWP]x,$$

由不等式(8)可知：

$$\dot{V}\leqslant -x^{\mathrm{T}}[Q+(K+\Delta K)^{\mathrm{T}}R(K+\Delta K)]x=-(x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru)<0,$$

所以

$$J=\int_0^{\infty}(x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t\leqslant-\int_0^{\infty}\dot{V}\mathrm{d}t=V(0)=x_0^{\mathrm{T}}Px_0+\int_{-\tau}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(t)L\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

证毕.

定理 2 对给定系统(1),(2),满足加法式的控制律(4)是保性能控制律的充要条件是,当且仅当存在一正定对称矩阵 $P>0$ 和正常数 ε, 使得式(9)和(10)成立：

$$R_1=R^{-1}-\varepsilon H_3H_3^{\mathrm{T}}>0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix}T+\varepsilon^{-1}E_3^{\mathrm{T}}E_3 & P \\ P & -W_1^{-1}\end{bmatrix}<0, \quad (10)$$

此时弹性控制器增益为

$$K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P. \quad (11)$$

证 系统(1)具有保性能鲁棒稳定,则由定义2可知式(8)成立. 由引理2[4]可知,式(8)成立即等价于下式成立：

$$\begin{bmatrix}T+\varepsilon^{-1}E_3^{\mathrm{T}}E_3 & * & * \\ P & -W_1^{-1} & * \\ K+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P & 0 & -R_1\end{bmatrix}<0. \quad (12)$$

由 Schur 补引理可知

$$\Delta_1=T+\varepsilon^{-1}E_3^{\mathrm{T}}E_3+PW_1P+(K+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R_1^{-1}(K+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P)=S_a(P,\varepsilon)+(K+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R_1^{-1}(K+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P)<0. \quad (13)$$

由式(12)和(13)可证得定理2的必要性,其充分性证明只要把式(11)代入式(13)即可.

定理2给出了保性能控制问题的解存在的充分必要条件,但如何选择 P 使得保性能函数最小还不

是很清楚,为此本文给出了如下初始条件假设.

假设

$$S = \{x(i) \in \mathbb{R}^n : x(i) = MN_1,\ x(j) = MN_2,\ i = 0,\ j < 0,\ N_k^{\mathrm{T}}N_k < 1,\ k = 1,2\},$$

则可解如下优化问题:

$$\min\ (\lambda)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\begin{bmatrix} -\lambda I & M^{\mathrm{T}}P & M^{\mathrm{T}} \\ PM & -P & 0 \\ M & 0 & -(\tau L)^{-1} \end{bmatrix} < 0. \\ \text{Eq.}(9),(10). \end{cases} \tag{14}$$

推论 1　若如上的优化问题可解,则此时满足加法式的控制律(4)是系统(1),(2)的优化保性能控制律,且优化的性能指标为 λ.

证　由定理 1 和假设可知

$$J \leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0 + \int_{-\tau}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(t)L\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$J \leqslant N_1^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}PMN_1 + \int_{-\tau}^{0}N_2^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}LMN_2\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\lambda_{\max}(M^{\mathrm{T}}PM) + \lambda_{\max}(\tau M^{\mathrm{T}}LM) = \lambda_{\max}(M^{\mathrm{T}}\Pi M),$$

其中 $\Pi = P + \tau L$. 当 $\lambda_{\max}(M^{\mathrm{T}}\Pi M) < \lambda I$ 时,利用 Schur 补引理,再左乘和右乘矩阵 diag $(I\ \ P\ \ I)$ 即可得到式(14)中的第一个 LMI. 也即保性能性能指标存在一个最小上界,所以此时的控制器为优化保性能控制器.

上面给出了具有加法式摄动控制器的设计和优化方法,下面讨论具有乘法式摄动控制器的设计和优化方法.

定理 3　对给定系统(1),(2),满足乘法式的控制律(4)是保性能控制律的充要条件是,当且仅当,存在一正定对称矩阵 $P > 0$ 和正常数 ε, 使得下两式成立

$$R_2 = I - \varepsilon H_4^{\mathrm{T}}RH_4 > 0, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} T & P \\ P & -W_2^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{16}$$

此时弹性控制器的增益为

$$K = -U^{-1}B^{\mathrm{T}}P, \tag{17}$$

其中 $W_2 = W - B(I - H_4H_4^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}}E_4)U^{-1}B^{\mathrm{T}}$.

证　由定理 2 的证明可知

$$\Delta_2 = T + PW_2P + (K + U^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R_2(K + U^{-1}B^{\mathrm{T}}P) < 0, \tag{18}$$

所以必要性得证. 其充分性的证明方法同定理 2.

注　具有乘法式摄动的控制器设计的优化方法同推论 1.

4　数值算例(Numerical example)

设在系统(1)中,

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -7 & -13 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4.25 & -1.5 \end{bmatrix},\ R = 0.2,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ H_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = [-1\ \ 1],\ E_2 = [1\ \ 1.15],$$

$$\tau = 2,$$

并设初始条件阵

$$M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

在增益摄动具有加法式结构时: $H_3 = [0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$; $E_3 = [1\ \ 1]$; 由推论 1 的优化方法可以求得

$$K = [1.8246\ \ -2.3609],$$

优化保性能指标为 $\lambda = 17.3475$. 此时的状态曲线如图 1 所示.

在增益摄动具有乘法式结构时: $H_4 = -0.75$; $E_4 = 1.75$, 得到 $K = [0.3869\ \ -0.4139]$, 性能值 $\lambda = 17.2603$, 此时的状态曲线如图 2 所示:

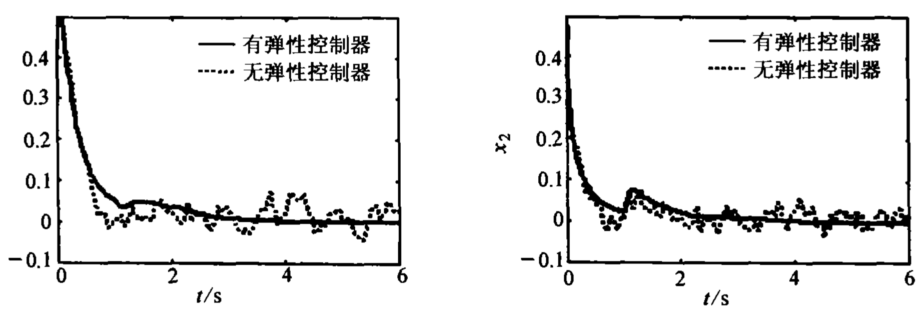

图 1　具有加法式增益扰动的状态曲线轨迹

Fig. 1　The state curve under additive perturbation

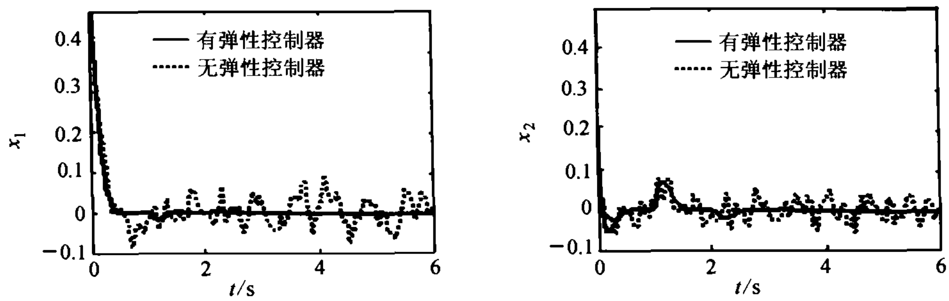

图 2 具有乘法式增益扰动的状态曲线轨迹

Fig. 2 The state curves under multiplicative perturbation

由图1,2可知,考虑弹性控制器设计的状态曲线能够很快的进入稳定状态,调整时间短,效果比常规控制器的设计要好.

5 结论(Conclusion)

本文考虑了一类时滞不确定系统的保性能弹性控制器的设计问题,在增益具有两种摄动情况下,分别给出了相应控制器的设计,其存在性依赖于LMIs的可行解.本文对时滞系统的弹性控制器的设计问题作了一些有益的尝试,所得控制器更接近实际应用工程,而且设计简单,计算方便.可以预见,控制器的弹性设计问题将成为鲁棒控制理论与应用研究的热点.

参考文献(References):

[1] LI H Z, NICULESCU S I, DUGARD L, et al. Robust guaranteed cost control of uncertain linear time-delay systems using dynamic output feedback [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1998, 45:349 - 358.

[2] MOHEIMANI S O R, PETERSEN I R. Guaranteed cost control of uncertain systems with a time-multiplied quadratic cost function: an approach based on linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1998, 34(5):651 - 654.

[3] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust fragile or optimal [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997,42(8):1098 - 1105.

[4] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J Control*, 1996,63(4):741 - 750.

[5] DAAFOUZ J, GARCIA G, BERNUSSOU J. H_2 guaranteed cost control by dynamic output-feedback for uncertain singularly perturbed systems [A]. *The 14th Int Federation of Automatic Control Conf* [C]. Beijing:[s.n.],1999:325 - 330.

[6] YANG G H, WANG J L, SOH Y C. Guaranteed cost control for discrete-time linear systems under controller gain perturbations [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2000,312:161 - 180.

[7] FAMULARO D, DORATO P, ABDALLAH C T, et al. Robust non-fragile LQ controllers: the static state feedback case [J]. *Int J Control*, 2000,73(2):159 - 165.

作者简介:

关新平 (1963 —),男,博士,现为燕山大学自动化系教授,博士生导师,发表论文百余篇.主要研究兴趣为时滞系统鲁棒控制,非线性控制理论及网络分析和设计等.E-mail:xpguan@ysu.edu.cn;

邬晶 (1979 —),女,燕山大学控制理论与控制专业硕士研究生.研究领域为时滞系统的鲁棒控制和弹性控制,网络控制系统;

龙承念 (1977 —),男,现为燕山大学自动化系博士生.主要研究兴趣为网络拥塞控制,协议算法实现和时滞系统鲁棒控制.