

具输入信号的非线性系统的稳定性

曾志刚, 廖晓昕

(华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

摘要: 考虑了具有缓变输入信号的非线性动力系统的一类平衡点集合的稳定性. 采用不同于相应文献的分析技巧, 充分利用非线性系统右端项提供的信息, 在较相应文献输入信号更弱的假设下, 得到了由输入信号产生的轨线充分接近系统相应解的一些充分条件, 放宽了该类控制系统设计中对输入信号的限制. 并举实例说明结论的有效性.

关键词: 稳定性; 线性化; 输入向量; 状态向量

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Stability for nonlinear systems with input signal

ZENG Zhi-gang, LIAO Xiao-xin

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Hubei Wuhan 430074, China)

Abstract: Stability for a certain family of equilibrium of a nonlinear system with varying input signals was considered. Using analytic technique, which was different from the existing relevant methods in the literature, some sufficient conditions had obtained to guarantee that the trajectory, which was derived by input signals, was convergent to the relevant solution of systems under more general hypothesis and information of right term of the nonlinear systems. Here a more general class of input signal in nonlinear control systems was designed. An example was given to illustrate the new results.

Key words: stability; linearization; input vector; state vector

1 引言(Introduction)

考虑具输入信号的非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ x(t_0) &= x_0, t \geq t_0,\end{aligned}\quad (1.1)$$

其中 $x(t)$ 是 n 维状态向量, $u(t)$ 是 m 维输入向量. 向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 的范数定义为 $\|x\| =$

$\sum_{i=1}^n |x_i|$, 由向量范数导出的矩阵范数为

$$\|A(t)\| = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}(t)|, j = 1, \dots, n \right\},$$

其中 $a_{ij}(t)$ 为矩阵 $A(t)$ 的第 i 行第 j 列对应分量. 文献[1~6]研究了系统(1.1)的广义线性化和稳定性. 文献[1]要求 $\|u(t)\|$ 充分小, 利用 Gronwall-Ballman 不等式给出了系统(1.1)局部稳定的充分条件, 文献[2]利用 Lyapunov 函数对文献[1]作了改进, 文献[3]放宽对输入信号的限制, 仅要求输入信号的导数在一个平均概念上对 t 一致地充分小, 即

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u(\sigma)\| d\sigma < \delta, t \geq t_0, \quad (1.2)$$

其中 δ, T 为常数, 其证明方法也是构造 Lyapunov 函数. 文献[3]进一步指出这些稳定性结果可以应用到经过广义线性化^[7]或伪线性化^[4]后的非线性控制系统的设计中去.

本文充分利用非线性系统(1.1)右端项提供的信息, 在较文献[3]输入信号更弱的假设下, 研究了由输入信号产生的轨线充分接近系统相应解的条件. 本文始终假设

- 1) $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 一阶连续可微;
- 2) 存在开集 $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ 和一个连续可微函数 $y: \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使对每个常数输入值 $u \in \Gamma$ 有
$$f(y(u), u) = 0; \quad (1.3)$$
- 3) $u(t)$ 是满足对 $t \geq t_0, u(t) \in \Gamma$ 的连续可微的输入信号, $y(u(t))$ 为输入信号由式(1.3)产生的轨线.

记

$$\begin{aligned}y(t) &= y(u(t)), U = y(\Gamma) \times \Gamma, \\ \hat{A}(x, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, u); A(t) = \hat{A}(y(t), u(t)).\end{aligned}$$

收稿日期: 2001-03-26; 收修改稿日期: 2002-10-31.

基金项目: 国家自然科学基金(60274007); 高校博士点专项基金(20010487005); 湖北省教育厅重大科研项目(2001ZD6003)资助项目.

进一步假设

4) $A(t)$ 可逆.

令

$$\hat{R}(y,u,x)=\int_0^1(\hat{A}(y+\theta(x-y),u)-\hat{A}(y,u))d\theta,$$

由

$$\frac{df(y+\theta(x-y),u)}{d\theta}=\left[\frac{\partial f(y+\theta(x-y),u)}{\partial x}\right](x-y)$$

和式(1.3)知

$$f(x,u)=\int_0^1\hat{A}(y+\theta(x-y),u)(x-y)d\theta.$$

令

$$\begin{cases} z(t)=x(t)-y(u(t)), \\ R(t,z(t))=\int_0^1(\hat{A}(y(t)+\theta z(t),u(t))-A(t))d\theta. \end{cases} \tag{1.4}$$

又对式(1.3)关于 t 求导得

$$A(t)\dot{y}+\frac{\partial f(y,u)}{\partial u}\dot{u}=0,$$

故由假设 4) 知

$$\dot{y}(t)=-A^{-1}(t)\frac{\partial f(y(u(t)),u(t))}{\partial u}\dot{u}.$$

令

$$B(t)=A^{-1}(t)\frac{\partial f(y(u(t)),u(t))}{\partial u}.$$

记 $A(t)_{n \times n}, B(t)_{n \times m}$ 和 $R(t, z(t))_{n \times n}$ 的第 i 行第 j 列元素分别为 $a_{ij}(t), b_{ij}(t)$ 和 $R_{ij}(t, z(t))$, 则由式(1.1)知

$$\dot{z}(t)=A(t)z(t)+R(t,z(t))z(t)+B(t)\dot{u}(t). \tag{1.5}$$

2 主要结果(Main results)

定理 1 假设存在常数 $\alpha \geq 0$ 和连续函数 $h_i(t), i=1,2,\cdots,n. \forall t_0>0$, 令

$$I(t)=\max\{a_{kk}(t)-h_k(t), k=1,\cdots,n\},$$

$$\begin{aligned} J(t)=\max\{h_j(t)+\alpha+\sum_{i=1,i\neq j}^n[|a_{ij}(t)|+ \\ \alpha]\exp\left\{\int_{t_0}^t[h_i(r)-a_{ii}(r)+ \right. \\ \left. a_{ji}(r)-h_j(r)]dr\right\}, j=1,\cdots,n\}. \end{aligned}$$

若

$$1) |R_{ij}(t,z(t))|\leq\alpha;$$

$$2) \int_{t_0}^t[I(s)+J(s)]ds \text{ 有界};$$

则 $\forall \rho>0, \exists \delta_1(\rho), \delta_2(\rho)$, 当 $\|x_0-y(u(t_0))\|$

$\leq \delta_1$ 和

$$\begin{aligned} \exp\left\{\int_{t_0}^t I(s)ds\right\}\int_{t_0}^t\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m|b_{ij}(s)\dot{u}_j(s)|\times \right. \\ \left.\exp\left\{\int_{t_0}^s[h_i(r)-a_{ii}(r)]dr\right\}\exp\left\{\int_s^t J(r)dr\right\}ds\leq \right. \\ \left. \delta_2, \forall t>t_0 \right. \end{aligned}$$

时, 系统(1.1)的解 $x(t)$ 满足

$$\|x(t)-y(u(t))\|<\rho.$$

证 对 $i=1,\cdots,n$, 令

$$w_i(t)=z_i(t)\exp\left\{\int_{t_0}^t[h_i(r)-a_{ii}(r)]dr\right\},$$

$$w(t)=(w_1(t),\cdots,w_n(t))^T.$$

由式(1.5)知

$$\begin{aligned} \dot{w}_i(t)=h_i(t)w_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^na_{ij}(t)\exp\left\{\int_{t_0}^t[h_i(r)- \right. \\ \left. a_{ii}(r)+a_{jj}(r)-h_j(r)]dr\right\}w_j(t)+ \\ \sum_{j=1}^nR_{ij}(t,z(t))\exp\left\{\int_{t_0}^t[h_i(r)-a_{ii}(r)+ \right. \\ \left. a_{jj}(r)-h_j(r)]dr\right\}w_j(t)+ \\ \left(\sum_{j=1}^mb_{ij}(t)\dot{u}_j(t)\right)\exp\left\{\int_{t_0}^t[h_i(r)-a_{ii}(r)]dr\right\}. \end{aligned}$$

又

$$D^+|w_i(t)|=\begin{cases} \dot{w}_i(t)\text{sign } w_i(t), & w_i(t)\neq 0, \\ |\dot{w}_i(t)|, & w_i(t)=0, \end{cases}$$

从而 $\sum_{i=1}^n|w_i(t)|$ 沿式(1.5)的解的右上 Dini 导数

$$\begin{aligned} D^+\sum_{i=1}^n|w_i(t)|\leq \\ J(t)\sum_{i=1}^n|w_i(t)|+ \\ \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m|b_{ij}(t)\dot{u}_j(t)|\exp\left\{\int_{t_0}^t[h_i(r)-a_{ii}(r)]dr\right\}\right). \end{aligned}$$

又对 $\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$,

$$\begin{aligned} |z_k(t)\exp\left\{\int_{t_0}^t[h_k(r)-a_{kk}(r)]dr\right\}|\leq \\ \sum_{i=1}^n|w_i(t)|. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} |z_k(t)|\leq \\ \exp\left\{\int_{t_0}^t I(s)ds+\int_{t_0}^t J(s)ds\right\}\|z(t_0)\|+ \\ \exp\left\{\int_{t_0}^t I(s)ds\right\}\int_{t_0}^t\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m|b_{ij}(s)\dot{u}_j(s)|\times \right. \end{aligned}$$

$$\exp \left\{ \int_{t_0}^s [h_i(r) - a_{ii}(r)] dr \right\} \exp \left\{ \int_s^t J(r) dr \right\} ds.$$

由条件2)知结论成立.

注1 当 $\|B(t)\dot{u}(t)\| \equiv 0, R(t, z(t)) \equiv 0$ 时, 本定理改进了文献[8,9]对线性时变系统稳定性的相应结果.

推论1 若将定理1的条件2)改成

2') 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$\int_{t_0}^t [I(s) + J(s)] ds \rightarrow -\infty;$$

$$\exp \left\{ \int_{t_0}^t I(s) ds \right\} \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |b_{ij}(s) \dot{u}_j(s)| \times \right.$$

$$\left. \exp \left\{ \int_{t_0}^s [h_i(r) - a_{ii}(r)] dr \right\} \exp \left\{ \int_s^t J(r) dr \right\} ds \right.$$

$\rightarrow 0$,

其余条件不变, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_\infty \in \Gamma$, 则系统(1.1)的解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y(u_\infty)$.

推论2 若存在常数 $\gamma \geq 0, \beta > 0$, 使 $\forall t > t_0$, 有

$$\|R(t, z(t))\| \leq \gamma, \quad (2.1)$$

$$\max \{a_{jj}(t) + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(t)|, \\ j = 1, \dots, n\} + \gamma \leq -\beta, \quad (2.2)$$

且 $\int_{t_0}^{+\infty} \|B(s)\dot{u}(s)\| ds$ 存在, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_\infty \in \Gamma$, 则系统(1.1)的解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y(u_\infty)$.

证 取 $h_i(t) = a_{ii}(t), i = 1, \dots, n$, 由式(2.1), 式(2.2)和定理1知系统(1.5)的解 $z(t)$ 满足

$$|z_k(t)| \leq e^{-\beta(t-t_0)} \|z(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|B(s)\dot{u}(s)\| e^{-\beta(t-s)} ds. \quad (2.3)$$

又由 $\int_{t_0}^{+\infty} \|B(s)\dot{u}(s)\| ds$ 存在知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \|B(s)\dot{u}(s)\| e^{-\beta(t-s)} ds = 0.$$

从而由 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_\infty \in \Gamma$ 和式(2.3)知系统(1.1)的解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y(u_\infty)$.

注2 定理1和推论1, 推论2放宽了文献[3]对 $\|\dot{u}(t)\|$ 的限制式(1.2), 推论1和推论2去掉了文献[3]推论所要求的 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}(t) = 0$ 的条件.

定理2 若存在常数 $\alpha > 0$, 使对 $\forall t > t_0$,

$$\max \{a_{jj}(t) + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(t)|, j = 1, \dots, n\} \leq -\alpha, \quad (2.4)$$

$$\text{则 } \forall \rho > 0, \exists \delta_1(\rho), \delta_2(\rho), \eta > 0, \eta < \alpha, \text{ 当} \\ \|x_0 - y(u(t_0))\| \leq \delta_1 \quad (2.5)$$

和

$$\int_{t_0}^t \|B(s)\dot{u}(s)\| e^{(-\alpha+\eta)(t-s)} ds < \delta_2(\rho) \quad (2.6)$$

时, 系统(1.1)的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t) - y(u(t))\| < \rho$.

证 由假设1)和式(1.4)知对常数 $\xi \geq 0, \xi \leq \eta$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|z(t)\| \leq \delta$ 时, 对 $\forall t > t_0$ 有

$$\|R(t, z(t))\| \leq \xi. \quad (2.7)$$

$\forall \rho > 0$, 取 $\delta_1(\rho) = \delta_2(\rho) = \min \{\delta/2, \rho/2\}$, 当式(2.5)和式(2.6)成立时, 有

$$\|z(t)\| \leq \delta. \quad (2.8)$$

否则存在 $T > t_0$ 使 $\|z(T)\| = \delta$, 且当 $t \in [t_0, T)$ 时 $\|z(t)\| \leq \delta$, 由式(2.4), 式(2.7)和定理1的证明知

$$\|z(T)\| \leq e^{(-\alpha+\xi)(T-t_0)} \|z(t_0)\| + \int_{t_0}^T \|B(s)\dot{u}(s)\| e^{(-\alpha+\xi)(T-s)} ds.$$

又由 $\xi \leq \eta < \alpha$ 和式(2.5)知

$$\|z(T)\| < \frac{\delta}{2} + \int_{t_0}^T \|B(s)\dot{u}(s)\| e^{(-\alpha+\eta)(T-s)} ds \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

这与式(2.8)矛盾, 从而对 $\forall t > t_0$, 式(2.7)成立, 故系统(1.5)的解 $z(t)$ 对 $\forall t > t_0$ 满足

$$\|z(t)\| \leq e^{(-\alpha+\xi)(t-t_0)} \|z(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|B(s)\dot{u}(s)\| e^{(-\alpha+\xi)(t-s)} ds < \rho/2 + \rho/2.$$

即系统(1.1)的解 $x(t)$ 对 $\forall t > t_0$ 满足

$$\|x(t) - y(u(t))\| < \rho.$$

3 例子(Example)

考虑具输入信号的非线性系统

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 - |\sin t| & e^t \sin t \\ e^{-t} \sin t & -2 - |\sin t| \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 - |\sin t| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t). \quad (3.1)$$

当输入信号 $u(t)$ 取为 $(u_1(t), t)^T$, 对整数 $q = 1, 2, \dots$,

$$\dot{u}_1(t) = \begin{cases} t, & t = q, \\ g(t), & t \in (q - \frac{1}{q^3}, q + \frac{1}{q^3}), \\ e^{-t}, & t \in [q + \frac{1}{q^3}, q + 1 - \frac{1}{(q+1)^3}], \end{cases}$$

其中 $0 \leq g(t) \leq t$ 且保证 $\dot{u}_1(t)$ 连续. 取

$$h_1(t) = h_2(t) = -1 - |\sin t|,$$

由定理 1 知 $\forall \rho > 0, \exists \delta(\rho)$, 当

$$\|x_0 - y(u(t_0))\| \leq \delta_1$$

时, 系统(3.1)的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t) - y(u(t))\| < \rho$, 其中

$$y(u(t)) = \left(\frac{2 + |3 \sin t| + \sin^2 t}{2 + 3|\sin t|} u_1, 0 \right)^T.$$

参考文献(References):

- [1] MATEI K. A stability property [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(8): 766 - 768.
- [2] KHALIL H K, KOKOTOVIC P V. On stability properties of nonlinear systems with slowly-varying inputs [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(2): 229.
- [3] DOUGLAS A L, WILSON J R. On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(7): 860 - 864.
- [4] REBOULET C, CHAMPETIER C. A new method for linearizing non-linear systems: the pseudolinearization [J]. *Int J of Control*, 1984, 40(4): 631 - 638.
- [5] WANG J L, WILSON J R. Feedback linearization families for nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(10): 935 - 939.
- [6] WANG J L, WILSON J R. On the pseudo-linearization problem for nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 12(2): 161 - 167.
- [7] HUANG J, WILSON J R. On a nonlinear multivariable servomechanism problem [J]. *Automatica*, 1990, 26(6): 963 - 972.
- [8] MORI T, FUKUMA N, KUWAHARA M. A stability criterion for linear time-varying systems [J]. *Int J of Control*, 1981, 34(3): 585 - 591.
- [9] HARRIS C J, MILES J F. *Stability of linear systems: some aspects of kinematic similarity* [M]. New York: Academic Press, 1980: 140 - 142.

作者简介:

曾志刚 (1971 —), 男, 华中科技大学控制科学与工程系博士生, 湖北师范学院数学系副教授, 已发表学术论文 10 余篇. 研究领域: 非线性系统的稳定性. E-mail: zhigangzeng@163.com;

廖晓昕 (1938 —), 男, 华中科技大学控制科学与工程系教授, 博士生导师, 已在《中国科学》, 《国际控制论杂志》等刊物上发表论文 100 余篇, 中英文著作 5 部. 研究领域: 神经网络, 非线性控制系统.