

广义代数 Riccati 方程和最优调节器的研究

张维海

(山东轻工业学院 计算机科学技术系, 山东 济南 250100)

摘要: 利用能稳性和精确能观性, 对广义代数 Riccati 方程和相关的随机最优调节器问题进行了深入的研究. 对广义代数 Riccati 方程得到了下列结果: 如果随机系统既是能稳定的又是精确能观的, 则广义代数 Riccati 方程有一个最大解, 同时也是一个反馈镇定解. 在精确能观性的假设下, 广义代数 Riccati 方程的所有非负定解(如果存在的话)必是正的反馈镇定解. 作为应用, 最优调节器问题, 广义代数 Riccati 方程的最大解, 反馈镇定解三者之间的关系获得了澄清. 所有这些结果在随机控制和随机稳定性理论中是有意义的.

关键词: 广义代数 Riccati 方程; 精确能观性; 能稳性; 调节器问题

中图分类号: TP13; O175.13 **文献标识码:** A

Study on generalized algebraic Riccati equations and optimal regulators

ZHANG Wei-hai

(Department of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Light Industry, Shandong Jinan 250100, China)

Abstract: By means of stabilization and exact observability, the generalized algebraic Riccati equation (GARE) and related stochastic optimal regulator problem were studied extensively. For GARE, it was shown that, if the stochastic system was both stabilizable and exactly observable, GARE had a maximal solution, which was also a feedback stabilizing solution. If only exact observability was imposed, all the nonnegative definite solutions of GARE, if existed, must be positive definite feedback stabilizing solutions. As applications, the relation among the optimal regulator problem, the maximal solution and feedback stabilizing solution of GARE had been clarified. All there obtained consequences are valuable in the study of stochastic control and stability theory.

Key words: generalized algebraic Riccati equation; exact observability; stabilization; regulator problems

1 引言(Introduction)

本文研究下列广义代数 Riccati 方程(GARE)

$$\begin{cases} PA + A^T P + C^T P C - (PB + \\ C^T P D) N^{-1} (B^T P + D^T P C) + Q = 0, \\ N = R + D^T P D > 0, \end{cases} \quad (1)$$

这里 A, B, C, D 分别是 $n \times n, n \times m, n \times n, n \times m$ 的实矩阵. $Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0$. 此处及行文的后面, 约定 $P \geq 0 (P > 0)$ 表示非负定的矩阵, (相应地, 正定矩阵), 方程(1)是熟知的确定性代数 Riccati 方程

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2)$$

的推广形式(取 $C = D = 0$, 方程(1)退化为方程(2)), 在随机控制理论, 特别是调节器理论、滤波和随机稳定性等诸多领域的研究中发挥重要的作用, 因此吸引了众多学者的注意力, 成为近几年控制理

论界的一个热门研究课题, 见文献[1~7]. 特别指出的是, 该方程是研究无限时间随机最优调节器问题的一个有效途径. 所谓无限时间的随机最优调节器问题, 也就是在约束条件为随机控制系统

$$\begin{cases} dx = (Ax + Bu)dt + (Cx + Du)dw, \\ x(t_0) = x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3)$$

下, 优化指标

$$\begin{aligned} V^*(t_0, \infty) &= \inf_{u \in U_{ad}^\infty} V(t_0, \infty, u(\cdot)) = \\ &= \inf_{u \in U_{ad}^\infty} E \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

这里 w 是定义于概率空间 (Ω, F, P) 上的标准一维 Brown 运动(不失一般性, 可设 w 为多维的), F_t 是由 w 生成的自然滤波, 即

$$F_t = \sigma(w(s): 0 \leq t_0 \leq s \leq t).$$

$x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入. U_{ad}^∞ 表示一切关于 F_t 可测适应的过程 $u(\cdot)$, 满足

$$E \int_{t_0}^{\infty} |u(t)|^2 dt < \infty,$$

而且相应的轨道(3)是均方稳定的. 若有 $u^*(\cdot) \in U_{ad}^\infty$, 使式(4)取最小值, 则称 $u^*(\cdot)$ 是一个最优控制.

文献[5]用半定规划的方法, 对 GARE(1)进行了深入的研究, 特别是对 Q, R 不定号时 GARE(1)的可解性和调节器问题的适定性的研究, 揭示了随机控制和确定性控制的一些本质区别. 作为文献[5]的一般工作的推论, 对于 $Q > 0, R > 0$ 这种标准情形, 得到了 GARE(1)反馈镇定解的存在性条件和调节器问题(3), (4)的最优指标值(文献[5]的推论4和定理12). 本文的目的在于利用随机系统精确能观性的概念, 将文献[5]关于 $Q > 0, R > 0$ 的工作推广到 $Q \geq 0, R > 0$ 的情形, 并且得到了更强的结论.

2 关于 GARE 的解(On solutions of GARE)

为表述本文的定理, 首先给出一些定义:

定义 2.1 系统(3)称为是能稳的(在均方意义下), 如果存在一个反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$, 使得闭环系统

$$\begin{cases} dx = (A + BK)xdt + (C + DK)x dw, \\ x(t_0) = x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (5)$$

是均方稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} E x(t)x^T(t) = 0$, 其中 K 是适当维数的常数矩阵. 当系统(3)是能稳的, 亦简称 $(A, B; C, D)$ 是能稳的.

定义 2.2 GARE(1)的一个实对称解 P 称为反馈镇定解, 如果令

$$\begin{aligned} u(t) &= Kx(t) = \\ &= -(R + D^T P D)^{-1} (B^T P + D^T P C)x(t), \end{aligned}$$

所得闭环系统(5)是均方稳定的.

文献[4]对确定性系统的完全能观性的概念进行了推广, 给出了随机系统精确能观性的定义. 考虑下列带观测方程的随机控制系统

$$\begin{cases} dx = (Ax + Bu)dt + (Cx + Du)dw, \\ y(t) = Qx(t). \end{cases} \quad (6)$$

定义 2.3^[4] 对于系统(6), 初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 称为是精确不能观的, 如果令 $u(t) \equiv 0$, 必有

$$y(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0, T],$$

这里 $T \geq t_0$ 是任意固定的正数. 如果除了零初始状态外, 不存在精确不能观的初始状态, 则系统(6)称为是精确能观的, 简称 $[A, C | Q]$ 是精确能观的.

本节的主要结论是:

定理 2.1 设 $[A, C | Q]$ 是精确能观的, $(A, B; C, D)$ 是能稳的, 则

- 1) GARE(1)有最大解 $P^* > 0$, 即对于 GARE(1)的任何实对称解 P , 都有 $P^* \geq P$.
- 2) P^* 也是一个反馈镇定解.

证 1) 由文献[5]知, 在 $(A, B; C, D)$ 能稳的条件下, GARE(1)有最大解 $P^* \geq 0$. 今证 $P^* > 0$. 若不然, 存在 $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 使 $P^* x_0 = 0$, 注意到 GARE(1)可以写成

$$\begin{cases} P^*(A + BK) + (A + BK)^T P^* + \\ (C + DK)^T P^* (C + DK) = -Q - K^T R K, \\ K = -(R + D^T P^* D)^{-1} (B^T P^* + D^T P^* C), \\ R + D^T P^* D > 0, \end{cases} \quad (7)$$

记 $x(\cdot)$ 是随机微分方程(5)的解, 其中 K 由式(7)给出. 利用 Ito 公式, 对任何固定的 $T > t_0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq E x^T(T) P^* x(T) = \\ &= x_0^T P^* x_0 - E \int_{t_0}^T x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt = \\ &= -E \int_{t_0}^T x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

由于 $Q \geq 0, R > 0$, 从式(8)可以得到

$$Qx(t) \equiv 0, Kx(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0, T].$$

根据定义 2.3, 上式表示 $[A, C | Q]$ 是精确不能观的, 与已知条件矛盾, 故必有 $P^* > 0$.

2) 证 P^* 是反馈镇定解, 也就是证明(5)的解满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} E x(t)x^T(t) = 0$. 对任意固定的 $T > t_0$, 例如, 取 $T = t_0 + 1$, 由文献[8]知下列广义微分 Riccati 方程在 $[t_0, t_0 + 1]$ 上有唯一的全局半正定解 $H(t)$.

$$\begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} + H(t)(A + BK) + (A + BK)^T H(t) + \\ (C + DK)^T H(t) (C + DK) + Q + K^T R K = 0, \\ H(t_0 + 1) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

利用 Ito 公式并结合式(9), 有

$$E \int_{t_0}^{t_0+1} x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt = x_0^T H(t_0) x_0. \quad (10)$$

由于 $[A, C | Q]$ 是精确能观的, 类似于上面 $P^* > 0$ 的证明, 可以得 $H(t_0) > 0$. 由于系统(5)是线性时不变系统, 容易证明式(10)可以做以下推广: 对任

意的 $T_2 > T_1, T_2 - T_1 = T - t_0 = 1$, 都有

$$\begin{aligned} E \int_{T_1}^{T_2} x^T(t) (Q + K^T R K) x(t) dt = \\ E x^T(T_1) H(t_0) x(T_1). \end{aligned} \quad (11)$$

记 $V(x(t)) = E x^T(t) P^* x(t)$, $t_n = nT = n(t_0 + 1)$, 则由式(8)可以知道 $V(x(t))$ 单调递减有下界, 极限存在, 所以

$$\begin{aligned} V(x(t_{n+1})) \leq V(x(t)) \leq V(x(t_n)), \\ t_n \leq t \leq t_{n+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

利用式(8), (11)可以得到

$$\begin{aligned} V(x(t_{n+1})) - V(x(t_n)) = \\ - E \int_{t_n}^{t_{n+1}} x^T(s) (Q + K^T R K) x(s) ds = \\ - E \dot{x}^T(t_n) H(t_0) x(t_n), \end{aligned} \quad (13)$$

因为 $V(x(t))$ 极限存在, $H(t_0) > 0$, 故从式(13)必然得 $\lim_{n \rightarrow \infty} E |x(t_n)|^2 = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = 0$, 再从式(12)得 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$, 由于 $P^* > 0$, 从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} E x(t) x^T(t) = 0$, 定理 2.1 得证.

由定理 2.1 的证明过程可以看出下列结论是成立的:

定理 2.2 在 $[A, C | Q]$ 是精确能观的条件下, 有

- 1) GARE (1) 的非负解必是正定的;
- 2) GARE (1) 的一切正定解都是反馈镇定解.

注 1 文献[5]在 $(A, B; C, D)$ 能稳, $Q > 0, R > 0$ 的情形下得到了定理 2.1 的结果. 需要指出的是, 由文献[4]的定理 4.2 可知: 当 $Q > 0$ 时, 必有 $[A, C | Q]$ 是精确能观的, 但反之不成立, 故定理 2.1 推广和改进了文献[5]的有关工作.

注 2 文献[4]在系统(3)是精确零能控的, $[A, C | Q]$ 是精确能观的条件下得到了 GARE(1)具有反馈镇定解, 但是精确零能控性是一个较 $(A, B; C, D)$ 能稳更强的条件, 故也改进了文献[4]的工作(精确零能控性的定义见文献[4]).

3 应用(Applications)

本节讨论 GARE (1) 的解与随机最优调节器问题的关系, 得到了下列结果:

定理 3.1 在定理 2.1 的条件下, 有 $V^*(t_0, \infty) = x_0^T P^* x_0$, 最优控制

$$\begin{aligned} u^*(t) = \\ - (R + D^T P^* D)^{-1} (B^T P^* + D^T P^* C) x(t), \end{aligned}$$

这里 P^* 是 GARE (1) 的最大解.

证 由文献[5]的定理 12, 定理的前半部分成

立, 即 $V^*(t_0, \infty) = x_0^T P^* x_0$. 其次由定理 2.1 知, P^* 是反馈镇定解. 根据定义 2.2, 相应于

$$\begin{aligned} u(t) = u^*(t) = Kx(t) = \\ - (R + D^T P^* D)^{-1} (B^T P^* + D^T P^* C) x(t) \end{aligned}$$

的闭环轨道(5)是均方稳定的. 根据文献[9]的引理 4.3(第 207 页), 定常系统(5)也是指数 2-稳定的, 即存在常数 $A > 0, \alpha > 0$, 使下式成立:

$$E |x(t)|^2 \leq A |x_0|^2 \exp \{-\alpha(t - t_0)\}.$$

从上式可以得知 $u^*(t)$ 是均方可积的, 所以 $u^*(\cdot) \in U_{ad}^\infty$. 从下列定理 3.2 的证明过程可以看出, $V(t_0, \infty, u^*(\cdot)) = x_0^T P^* x_0 = V^*(t_0, \infty)$, 所以 $u^*(t)$ 是一个最优控制, 定理得证.

在定理 2.1 中证明了 GARE (1) 的最大解是一个反馈镇定解, 但反之如何? 下面的定理给出了肯定的回答. 它虽然是关于方程解的一个性质, 但用调节器的方法来证明更加简单.

定理 3.2 GARE (1) 的反馈镇定解也是它的最大解, 从而得知反馈镇定解若存在必定唯一.

证 注意到对 GARE (1) 的任何实对称矩阵解 P , 在约束(3)下, 有下列恒等式成立:

$$\begin{aligned} V(t_0, T; u(\cdot)) = E \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt = \\ x_0^T P x_0 - E x^T(T) P x(T) + E \int_{t_0}^T [u - K_1 x]^T (R + \\ D^T P D) [u - K_1 x] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

上式中 $K_1 = -(R + D^T P D)^{-1} (B^T P + D^T P C)$, 若 P 是 GARE (1) 的反馈镇定解, 在式(13)中取 $u(t) = K_1 x(t)$, 并令 $T \rightarrow \infty$, 得到

$$\begin{aligned} V(t_0, \infty; u(\cdot)) = E \int_{t_0}^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt = \\ x_0^T P x_0 - \lim_{T \rightarrow \infty} E x^T(T) P x(T) = x_0^T P x_0. \end{aligned} \quad (14)$$

因为 GARE (1) 有反馈镇定解, 所以 $(A, B; C, D)$ 是能稳的. 令 P^* 是 GARE (1) 的最大解, 由文献[5]的定理 12, $V^*(t_0, \infty) = x_0^T P^* x_0$. 根据最优性和式(14), 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned} V^*(t_0, \infty) = x_0^T P^* x_0 \leq \\ V(t_0, \infty; u(\cdot)) = x_0^T P x_0. \end{aligned}$$

所以 $P^* \leq P$, 但因为 P^* 是最大解, 又有 $P^* \geq P$, 二式结合最终导致 $P^* = P$, 定理 3.2 得证.

需要注意的是, 在 $(A, B; C, D)$ 能稳的条件下, GARE (1) 的最大解必定存在, 但是反馈镇定解却不一定存在. 其次注意一下定理 2.1 的证明过程, 在

证明最大解是反馈镇定解时,用到了精确能观性的概念,而在证明反馈镇定解是最大解的过程中,却不需要任何的条件.在系统能稳和精确能观的假设下,二者等价且唯一.

4 结论(Conclusion)

本文主要借助于精确能观性的概念,讨论了 GARE (1) 的最大解和反馈镇定解,以及与最优调节器问题的关系.精确能观性是确定性系统完全能观性概念的推广,当 $C = 0$ 时,它退化为确定性系统的完全能观性;当 $C \neq 0$ 时,由 (A, Q) 的完全能观性可以得到 $[A, C | Q]$ 是精确能观的,反之不成立.其次所有非精确能观的初始状态构成一个线性子空间,所有这些断言限于篇幅,略而不证.与确定性代数 Riccati 方程的研究成果相比,作者对 GARE (1) 解的性质知之甚少,有待于进一步的研究.

参考文献(References):

- [1] de SOUZA C E, FRAGOSO M D. On the existence of maximal solution for generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control [J]. *Systems & Control Letters*, 1990, 14(3): 233 - 239.
- [2] 张维海. 无限时间随 L-Q 最优控制所导致的代数 Riccati 方程的研究[D]. 杭州: 浙江大学, 1998.
(ZHANG Weihai. *A study on algebraic Riccati equation arising from infinite horizon stochastic L-Q optimal control* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1998.)
- [3] CHEN S, LI X, ZHOU X Y. Stochastic linear quadratic regulars with indefinite control weight costs [J]. *SIAM J on Control and Optimization*, 1998, 36(5): 1685 - 1702.
- [4] 刘雅增. 倒向随机微分方程和随机控制系统[D]. 济南: 山东大学, 1999.
(LIU Yazeng. *Backward stochastic differential equation and stochastic control system* [D]. Jinan: Shandong University, 1999.)
- [5] AIT RAMI M, ZHOU X Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1131 - 1143.
- [6] 张维海. 随机系统能稳性的一个注记[J]. 工程数学学报, 2000, 17(1): 129 - 132.
(ZHANG Weihai. A note on the stabilizability of the stochastic systems [J]. *Chinese J of Engineering Mathematics*, 2000, 17(1): 129 - 132.)
- [7] LIM A E B, ZHOU X Y. Optimal stochastic LQR control with integral quadratic constraints and indefinite control weights [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(7): 1359 - 1369.
- [8] BENSOUSSAN A. Lecture on stochastic control, Part I [A]. In *Lecture Notes in Math* [M]. New York: Springer-Verlay, 1983.
- [9] HAS' MINSKII R Z. *Stochastic Stability of Differential Equations* [M]. Alphen aan den Rijn, the Netherlands: Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [10] GAO Z Y, AHMED N U. Feedback stabilizability of non-linear stochastic systems with state-dependent noise [J]. *Int J Control*, 1987, 45(2): 729 - 737.

作者简介:

张维海 (1965 —), 男, 1998 年获浙江大学博士学位, 2001 年 5 月至今在台湾清华大学电机系做博士后研究, 现为山东轻工业学院教授. 主要研究方向: 随机控制理论, 鲁棒和非线性 H_∞ 控制等.
Email: zwhtl@public.jn.sd.cn.