

Lipschitz 非线性系统观测器设计新方法

马克茂, 马 萍

(哈尔滨工业大学 仿真中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 考虑了非线性项满足 Lipschitz 条件的非线性系统观测器设计问题, 利用 Lyapunov 方法给出了新的判断观测误差稳定性的条件, 并由所给的条件通过求解线性矩阵不等式来设计观测器. 通过算例与其它方法进行的比较, 说明了所提方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 观测器; Lyapunov 方法

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Novel observer design method for Lipschitz nonlinear systems

MA Ke-mao, MA Ping

(Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Harbin 150001, China)

Abstract: The observer design of the systems with nonlinear terms satisfying Lipschitz conditions was considered. The Lyapunov approach was utilized to stabilize the observer error dynamics, and new stable conditions were constructed. Based on the conditions, observers were designed through solving a set of linear matrix inequalities. An illustrative example was given to compare the proposed method with other methods, and the results justify the method.

Key words: nonlinear systems; observers; Lyapunov approach

1 引言(Introduction)

正如已有研究^[1~4]中所指出的, 许多非线性系统满足 Lipschitz 条件, 如含有三角函数非线性项的机器人或飞行器控制系统, 而且在研究局部性质时, 许多连续非线性系统也可看作 Lipschitz 非线性系统, 因而有关这类系统的研究具有相当大的实用性. 作为状态反馈的实施手段, 有关观测器的研究是十分必要的.

关于 Lipschitz 非线性系统的观测器设计问题, 目前一般采用 Lyapunov 理论来获得观测误差的稳定性条件^[1], 文献[3]利用 Bellman-Gronwall 引理, 在无重特征值的情况下给出了用特征值表示的稳定性条件, 并通过特征结构配置理论给出了设计方法; 文献[2]通过矩阵测度给出了稳定条件, 克服了需要考虑重特征值的限制. 但文献[2, 3]中所提方法均需引入相应的优化算法才能完成. 文献[1]中通过判断矩阵的奇异值条件给出了观测误差的稳定条件, 但不便于设计观测器的增益矩阵.

本文利用 Lyapunov 方法, 给出了新的观测误差

的稳定条件, 并将观测器的设计问题转化为一组线性矩阵不等式的求解问题. 由于线性矩阵不等式的求解为一凸规划问题, 现已有成熟的计算方法及软件可以利用, 因而观测器的设计十分简便, 而且不必考虑观测器的特征值是否有重根等限制条件^[1~3]. 本文通过算例对所提出的方法和其它方法进行比较发现, 采用本文方法设计观测器, 允许的 Lipschitz 常数上限大于其它方法所给出的上限.

本文中规定矩阵与向量的范数均为 2-范数, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示矩阵的最小特征值, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵的最大特征值, 并给出如下引理^[5].

引理 1 对于正定对称矩阵 P , 存在 $F = F^T$, 使得 $P = F^2$.

引理 2 对于 $\xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n$, 下述关系成立.

$$2\xi^T\eta \leq \xi^T\xi + \eta^T\eta. \quad (1)$$

2 观测器设计(Observer design)

Lipschitz 非线性系统可描述如下

$$\dot{x} = Ax + \Phi(x, u), \quad (2)$$

$$y = Cx, \quad (3)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{C}^m, A, C$ 为具有适当维数的实矩阵, 满足可观性条件, $\Phi(x, u)$ 为 Lipschitz 非线性项, 满足

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|. \quad (4)$$

式中 $\gamma > 0$ 称为 Lipschitz 常数. 设计其观测器如下:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \Phi(\bar{x}, u) - L(y - C\bar{x}). \quad (5)$$

其中 $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为观测器增益矩阵. 定义观测误差为 $\tilde{x} = x - \bar{x}$, 则由式(2), (3)和(5)可得观测误差动态方程如下:

$$\dot{\tilde{x}} = (A + LC)\tilde{x} + \Phi(x, u) - \Phi(\bar{x}, u). \quad (6)$$

关于观测误差(6)的稳定性, 有如下结论.

定理 1 对于误差系统(6), 针对给定的正定对称矩阵 Q , 如果存在矩阵 L 和正定矩阵 P , 使得如下矩阵方程

$$(A + LC)^T P + P(A + LC) + P + Q = 0 \quad (7)$$

成立, 且 γ 满足如下条件

$$\gamma^2 < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}, \quad (8)$$

则系统(6)是渐近稳定的.

证 对于满足矩阵方程(7)的矩阵 L 和正定对称矩阵 P , 建立式(6)的 Lyapunov 函数

$$V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x},$$

其导数为

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T ((A + LC)^T P + P(A + LC)) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P (\Phi(x, u) - \Phi(\bar{x}, u)). \quad (9)$$

由引理 1, 令 $\xi = Fx, \eta = F(\Phi(x, u) - \Phi(\bar{x}, u))$, 代入引理 2 中式(1), 则由式(9)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) &\leq \tilde{x}^T ((A + LC)^T P + P(A + LC)) \tilde{x} + \tilde{x}^T P \tilde{x} + \\ &(\Phi(x, u) - \Phi(\bar{x}, u))^T P (\Phi(x, u) - \Phi(\bar{x}, u)) \leq \\ &\tilde{x}^T ((A + LC)^T P + P(A + LC) + P) \tilde{x} + \\ &\lambda_{\max}(P) \|\Phi(x, u) - \Phi(\bar{x}, u)\|^2. \end{aligned}$$

考虑到式(4), 式(7), 由上式可得

$$\dot{V}(\tilde{x}) \leq -\tilde{x}^T (Q - \lambda_{\max}(P) \gamma^2 I) \tilde{x}.$$

令 $\epsilon = \lambda_{\min}(Q) - \gamma^2 \lambda_{\max}(P)$, 可得

$$\dot{V}(\tilde{x}) \leq -\epsilon \tilde{x}^T \tilde{x}. \quad (10)$$

由条件(8)可得 $\epsilon > 0$, 故由式(10)可知定理成立.

在定理的证明过程中, 由于利用引理 1, 2 对式(9)中的最后一项进行了分解, 因而所得的稳定性条件与其它采用 Lyapunov 方法所得到的条件不同^[2]. 这里对于给定的 Lipschitz 常数 γ , 利用以上所建立的稳定性条件可以通过求解一组线性矩阵不等

式直接设计观测器的增益矩阵. 为此, 有如下定理.

定理 2 如果如下线性矩阵不等式

$$A^T P + PA + C^T W^T + WC + P + qI < 0, \quad (11)$$

$$\gamma^2 P < qI, \quad (12)$$

$$P > 0, \quad (13)$$

其中 $q \in \mathbb{R}$, 存在可行解, 则选取观测器增益矩阵如下:

$$L = P^{-1} W, \quad (14)$$

可以使观测误差(6)稳定.

证 如定理中所给线性矩阵不等式存在可行解, 即存在 P, W 使得式(11) ~ (13)成立, 则由式(12)可得

$$\gamma^2 < \frac{q}{\lambda_{\max}(P)}. \quad (15)$$

记

$$Z = -(A^T P + PA + C^T W^T + WC + P + qI). \quad (16)$$

由式(11)显然 Z 正定. 令 $Q = qI + Z$, 显然 Q 正定, 并考虑到式(14), 则可得到形如(7)的等式. 由于 Z 正定, 因而对于这里所定义的矩阵 Q , 显然有

$$\lambda_{\min}(Q) > q. \quad (17)$$

将上式代入式(15), 则可得到式(8), 故结论成立.

上述定理给出了观测器增益矩阵的设计方法, 而线性矩阵不等式(11) ~ (13)可以方便地利用现有计算机软件求解, 如利用 Matlab 的 LMI 工具箱中 $\text{feas } p(\cdot)$ 函数求解.

在研究 Lipschitz 非线性系统的观测器设计问题时, 另一个受到关注的问题是对于给定的矩阵 A, C , 在保证观测误差稳定性的条件下如何设计观测器的增益矩阵 L , 使得允许的 Lipschitz 常数最大. 由以上定理可以得到如下给定矩阵 A, C 时寻求观测器增益矩阵以获得最大的 Lipschitz 常数的算法.

算法 LA:

1) 对于给定初值 γ_1 , 令 $i = 1$;

2) 求解如下线性矩阵不等式组

$$A^T P_i + P_i A + C^T W_i^T + W_i C + P_i + q_i I < 0,$$

$$\gamma_i^2 P_i < q_i I, \quad P_i > 0,$$

如果可行解存在, 则 $L_i = P_i^{-1} W_i$, 否则, 转 4);

3) 取

$$Q_i = -(A^T P_i + P_i A + C^T W_i^T + W_i C + P_i),$$

$$\gamma_{i+1} = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)}},$$

令 $i = i + 1$, 转 2);

4) 如果 $i = 1$, 取 $\gamma_1 = \frac{\gamma_1}{2}$, 转 2), 否则, 输出 $L = L_i, \gamma = \gamma_i$.

3 算例(Example)

考虑形如式(4), (5)的非线性系统, 其中^[1,2]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1],$$

文献[2]中给出的最大允许 Lipschitz 常数为 $\gamma = 0.49$ (同文献[1]中结果), 其观测器增益矩阵为

$$-L = [69.5523 \quad 11.5679]^T.$$

采用本文方法, 当 $\gamma = 0.49$ 时, 通过求解线性矩阵不等式, 得到的观测器增益矩阵为

$$L = [-7.2535 \quad -3.3846]^T.$$

显然增益矩阵的模较文献[2]中的增益矩阵的模要小得多, 因而有利于系统性能的改善, 而且采用本文所给的算法 LA, 可得最大允许的 Lipschitz 常数为 $\gamma = 0.78$, 较文献[1,2]有了显著的提高. 对其它算例进行的比较分析都得到了类似结果.

4 结论(Conclusions)

本文采用 Lyapunov 方法讨论了 Lipschitz 非线性系统的观测器设计问题, 建立了新的观测器误差收敛条件, 并给出了通过求解一组线性矩阵不等式得到观测器增益矩阵的设计方法, 设计简便. 在算例中对本文方法与其它方法进行了比较, 发现采用本文方法可以显著提高最大允许的 Lipschitz 常数, 而

在相同给定的 Lipschitz 常数下, 利用本文方法设计的增益矩阵的模相对较小.

参考文献(References):

- [1] RAJESH R. Observer for Lipschitz nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(3):397-400.
- [2] 刘祖润, 张志飞, 张兢. Lipschitz 非线性系统观测器设计[J]. *电机与控制学报*, 1999, 3(4):231-234.
(LIU Zu-ren, ZHANG Zhi-fei, ZHANG Jing. Observer design for Lipschitz nonlinear system [J]. *Electric Machines and Control*, 1999, 3(4):231-234.)
- [3] 马克茂, 王子才, 史小平. 一类非线性系统的观测器设计[J]. *控制理论与应用*, 1998, 15(3):443-446.
(MA Kemao, WANG Zicai, SHI Xiaoping. Observer design for a class of nonlinear systems [J]. *Control Theory and Applications*. 1998, 15(3):443-446.)
- [4] ZAK S H. On the stabilization and observation of nonlinear uncertain dynamic systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(5):865-868.
- [5] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
(HUANG Lin. *Linear Algebraic in System and Control Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1984.)

作者简介:

马克茂 (1970—), 男, 博士, 副教授. 研究方向为非线性系统控制, 不确定系统的控制, 系统仿真. E-mail: makemao@up369.com;

马 萍 (1970—), 女, 副教授. 主要研究方向为分布式仿真, 培训仿真系统, 控制系统设计.