

利用正反馈引导混沌系统到周期解

须文波, 徐振源, 蔡朝洪

(江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214036)

摘要: 提出了一种抑制混沌的方法, 通过对混沌动力系统增加一个基于系统变量的正反馈控制项, 成功而快速引导系统从混沌运动转化为低周期运动. 利用 Melnikov 方法分析了该控制方法在 Duffing 振子中实现混沌抑制的控制机理, 得到了结论: 正反馈项可以消除混沌系统的稳定流形和不稳定流形的横截相交. 仿真表明, 该方法简单而广泛适用.

关键词: 混沌抑制; Melnikov 方法; 周期解; Duffing 振子

中图分类号: TP271.72 **文献标识码:** A

Positive feedback control for directing chaos towards periodic motion

XU Wen-bo, XU Zhen-yuan, CAI Chao-hong

(School of Information & Control Engineering, Southern Yangtze University, Jiangsu Wuxi 214036, China)

Abstract: A method was proposed to suppress chaos by adding a positive feedback term to chaotic dynamics. Melnikov's perturbation method was used to explain the control mechanism of chaos suppression in the Duffing's oscillator. Numerical simulations demonstrated the effectiveness of Melnikov's analyses. It is concluded that the positive term can make the stable manifold and the unstable manifold non-transverse in the controlled dynamics, thus to suppress chaos.

Key words: chaos suppression; Melnikov's method; periodic orbits; Duffing's oscillator

1 引言 (Introduction)

混沌控制的主要方向之一是抑制混沌到周期解. 可以对混沌动力系统的参数施加微扰, 达到失稳周期轨道的稳定控制, 例如 OGY 法^[1]、弱周期扰动动力系统参数法^[2,3]; 还可以对混沌动力系统的变量实现反馈, 达到人们期望的目标周期轨道, 例如传统的负反馈控制法^[4]、延迟自反馈控制法^[5]等. 而在应用控制中, 则需要一种简单而易于推广的控制方法. 本文通过对混沌动力系统增加一个基于系统变量的正反馈控制项, 成功而快速地引导系统从混沌运动转化为期望的低周期运动, 并应用于许多典型的混沌系统, 显得简单而有效. 并利用 Melnikov 方法^[6]解释了在 Duffing 振子中实现混沌抑制的控制机理.

2 控制方法与控制机理分析 (Control technique and analysis of control mechanism)

考虑如下自治的 n 维动力系统:

$$\dot{x} = f(x(t), \alpha), \quad (1)$$

式中, 系统状态向量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, α 为系统的参数集,

$$f = (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n),$$

f_i 为非线性函数或线性函数, 但 f 中至少有一个函数是非线性函数. 设 $\dot{x}_k = f_k(x(t), \alpha)$ 是引起动力系统(1)出现混沌运动的关键的一个非线性函数, 给 f_k 加上一个基于系统变量的正反馈控制项, 则有

$$\dot{x}_k = f_k(x(t), \alpha) + Px_m, \quad k, m \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2)$$

其中, P 为反馈增益. 其余的 f_i 不变, $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$.

作者把上述方法用于控制一些典型的混沌或超混沌动力系统, 如 Duffing 振子、Duffing-Holmes 振子、强迫布鲁塞尔振子、Lorenz 系统、复数洛伦兹-哈肯超混沌系统等, 并进行仿真, 都取得了很好的控制效果. 本文以 Duffing 振子为例, 利用 Melnikov 方法详细分析正反馈项在 Duffing 振子中实现混沌抑制的作用.

考虑如下带负线性刚度项的 Duffing 振子:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\epsilon\gamma x_2 + (1+P)x_1 - x_1^3 + \epsilon f \cos \Omega t, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\Omega = 1, \epsilon\gamma = 0.25, \epsilon f \geq 0.27$, 反馈增益 $P = 0$ 时系统出现稳态混沌. 设 $\epsilon f = 0.30$, 则反馈增益 $P = 0.044$ 时, 受控系统很快从混沌态变为周期 1 解. 原系统与受控系统的相平面图如图 1 所示 (快速进入稳态周期 1 解).

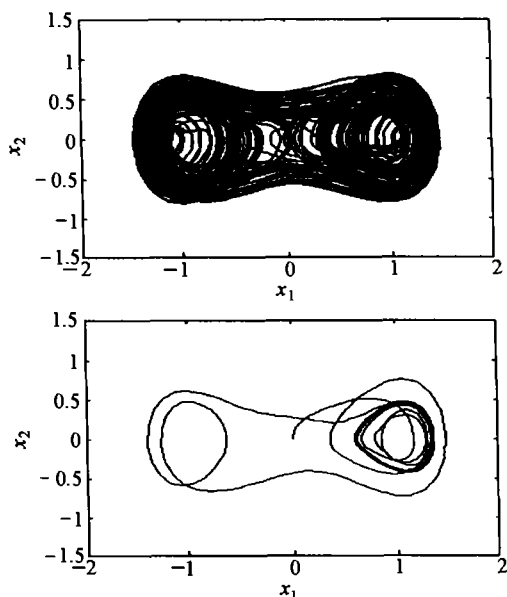


图 1 Duffing 振子的混沌吸引子与受控系统的相轨迹
Fig. 1 The chaotic attractor in Duffing's oscillator and the stable periodic resolution in the controlled system

Melnikov 方法已经广泛用于解析混沌控制的机理. 有关 Melnikov 方法的理论可参考文[6]和[7].

令 $Q = 1 + P$. 当 $\epsilon = 0$ 时, 式(3)为 Hamilton 系统, 并存在一个双曲鞍点 p^0 以及一条连结 p^0 的同宿轨道 $q^0(t) = (x_1^0(t), x_2^0(t))$, 其中

$$\begin{aligned} x_1^0(t) &= \pm \sqrt{2Q} / \cos h \sqrt{Q}t, \\ x_2^0(t) &= \mp \sqrt{2Q} \tan h \sqrt{Q}t / \cos h \sqrt{Q}t, \end{aligned} \quad (4)$$

并且, 在 Γ^0 内部充满一族以 k 为参数的周期轨道 $q^k(t) = (x_1^k(t), x_2^k(t))$, 其中

$$\begin{aligned} x_1^k(t) &= \sqrt{\frac{2Q}{2-k^2}} \operatorname{dn} \left(\frac{\sqrt{Q}t}{\sqrt{2-k^2}}, k \right), \\ x_2^k(t) &= -\frac{Qk^2\sqrt{2}}{2-k^2} \operatorname{cn} \left(\frac{\sqrt{Q}t}{\sqrt{2-k^2}}, k \right) \operatorname{sn} \left(\frac{\sqrt{Q}t}{\sqrt{2-k^2}}, k \right), \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u$ 和 $\operatorname{dn} u$ 为雅可比椭圆函数, k 为椭圆函数的模, $0 < k < 1$. 轨道周期 T 满足

$$\frac{2k\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{Q}} = \frac{m}{n} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{m}{n} T(m, n \text{ 互质}).$$

计算同宿轨道 $q^0(t)$ 的 Melnikov 函数,

$$M(t_0) =$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^0(t) [f \cos \Omega(t+t_0) - \gamma x_2^0(t)] dt = \\ & -\frac{4Q^{3/2}}{3} \gamma \pm \sqrt{\frac{2}{Q}} \frac{\pi f \Omega}{\cos h(\Omega\pi/2\sqrt{Q})} \sin \Omega t_0, \end{aligned} \quad (6)$$

所以, 当系统的参数满足:

$$\frac{f}{\gamma} > R^c(Q) = \frac{4Q^{3/2}}{3\Omega\pi\sqrt{2}} \cos h \frac{\Omega\pi}{2\sqrt{Q}}, \quad (7)$$

$M(t_0)$ 具有不依赖 ϵ 的简单零点, 则对充分小的 ϵ , 系统(3) 的庞加莱映射 p_ϵ^1 具有斯梅尔马蹄变换意义下的混沌 (Smale-Birkhoff 同宿轨定理和 Plykin 定理). 若未加控制作用, 即 $p = 0$, 由式(7) 可算得 ϵf 出现混沌的临界值为 0.188; 数值仿真中, $\epsilon f = 0.19$ 时系统(3) 的庞加莱映射 p_ϵ^1 的稳定流形与不稳定流形相切, 但是, $\epsilon f \geq 0.27$ 时系统才出现稳态意义下的混沌, 如图 1 所示.

显然, $R^c(Q)$ 为 Q 的递增函数, 这说明正反馈项的引入可以提高系统(3) 产生混沌的参数阈值, 从而使系统的稳定流形和不稳定流形不再横截相交, 可能抑制混沌的产生, 代于周期运动 (称为 Newhouse 汇). 而实际上, 系统参数没有满足式(7) (对混沌运动的 Melnikov 判据无效) 并不意味着混沌吸引子已经被正反馈项破坏了. 因此, 有必要继续验证周期轨道的存在性.

计算系统周期闭轨道的 Melnikov 函数:

$$\begin{aligned} M^{m/n}(t_0) &= \\ & \int_0^{mT} [-\gamma(x_2^k(t))^2 + f \cos \Omega(t+t_0)x_2^k(t)] dt = \\ & -\gamma J_1(m, n) - f J_2(m, n, \Omega) \sin \Omega t_0, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} J_1(m, n) &= \frac{2Q^{3/2}[2(2-k^2)E(k) - 4k'^2K(k)]}{3(2-k^2)^{3/2}}, \\ J_2(m, n, \Omega) &= \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \sqrt{2Q}\pi\Omega \sec h \frac{\pi m K'(k)}{K(k)}, & n = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$K(k)$ 和 $E(k)$ 分别为第一、二类完全椭圆积分. 显然, 若系统参数满足

$$\frac{f}{\gamma} > R(Q) = \frac{J_1}{J_2}, \quad (9)$$

系统将有周期闭轨道存在. 对于固定的 k (周期固定), $R(Q)$ 是 Q 的递增函数, 这说明正反馈量的增加应该是适当的, 而且, 太大的反馈增益将严重改变系统的动力结构, 也失去了工程意义.

需要指出, Melnikov 方法可以用来判断马蹄意义下的混沌鞍点, 这说明 Melnikov 函数只是暂态意

义下的混沌运动的近似判据. Melnikov 分析所预测的产生混沌的参数值与数值仿真中的稳态混沌的参数值是有一定的差距的, 这点已在以往的研究工作中得到了验证. 另外, 次谐轨道的 Melnikov 函数已证实了系统(3)的周期轨道的存在性. 其稳定性分析过程可以参考文[6]和文[7], 比较复杂. 但实际上, 仿真结果已表明系统(3)的周期轨道(见图1)是可以稳定存在的. 若要预测产生不同低周期轨道(如周期1, 周期2, 或周期4等)的系统参数值间细微差别, 估计目前还没有比较精细的数学判定方法, 这也是个非常有趣的课题. 但可以认为上述的 Melnikov 分析已经很好地解释了正反馈控制 Duffing 振子的数学机理.

3 结论(Conclusions)

通过对混沌动力系统增加一个简单的基于系统变量的正反馈控制项, 小量的反馈增益就可成功而快速地引导系统从混沌运动转化为期望的低周期运动. 控制仿真结果表明, 该方法简单而广泛适用. 另外, 本文还利用 Melnikov 方法在严格意义下解释了该方法实现混沌控制的数学机理. Melnikov 分析发现, 正反馈项实质是一作用明显的扰动项, 使得系统的稳定流形和不稳定流形不再横截相交, 破坏了原系统的斯梅尔马蹄意义下的混沌. 本文还证明了低周期解的存在性. Ashhab 在文[8]中提出了基于系统变量反馈抑制一个微悬臂装置的混沌运动, 并利用 Melnikov 方法粗略解释了其控制机理; 虽然其控制方法与本文有所差异, 但这也说明了本文的方法在工程上具有潜在的应用背景.

参考文献(References):

[1] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos [J]. *Physi-*

cal Review Letters, 1990, 64(11): 1196 - 1199.

- [2] LIMA R, PETTINI M. Suppressing of chaos by resonant parameter perturbations [J]. *Physical Review A*, 1990, 41(2): 726 - 733.
- [3] BRAIMAN Y, GOLDBIRSHCH I. Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations [J]. *Physical Review Letters*, 1991, 66(20): 2545 - 2548.
- [4] CHEN G, DONG X. On feedback control of chaotic continuous systems [J]. *IEEE Trans on Circuit and System - I*, 1992, 40(4): 591 - 601.
- [5] USHIO T, YAMAMOTO S. Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems [J]. *Physical Letters A*, 1998, 247(1, 2): 112 - 118.
- [6] 刘曾荣. 混沌扰动原则[M]. 上海: 上海科学技术教育出版社, 1994.
- (LIU Zengrong. *Perturbation Criteria for Chaos* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technology Education Publishing House, 1994.)
- [7] 蔡朝虹, 徐振源, 须文波. 凹槽滤波反馈控制混沌系统[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 549 - 554.
- (CAI Chaohong, XU Zhenyuan, XU Wenbo. Notch filter feedback control for chaotic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(4): 549 - 554.)
- [8] ASHHAB M, SALAPAK M, DAHLEH M, et al. Dynamical analysis and control of microcantilevers [J]. *Automatica*, 1999, 35(10): 1663 - 1670.

作者简介:

须文波 (1946—), 男, 1981 年于清华大学自控系获工学硕士学位, 江南大学信息工程学院教授, 博士生导师. 研究方向为集散控制与非线性控制应用;

徐振源 (1946—), 男, 1981 年于北京大学数学力学系获理学硕士学位, 江南大学数理研究所教授. 研究方向为非线性、混沌动力学控制与无穷维动力学;

蔡朝洪 (1977—), 男, 现为江南大学信控学院硕士研究生. 目前研究方向为混沌控制.