

全程快速非线性跟踪-微分器

王新华, 陈增强, 袁著祉
(南开大学 自动化系, 天津 300071)

摘要: 设计一种快速收敛的非线性跟踪-微分器, 使系统在远离平衡点和接近平衡点都能自动快速地向平衡点收敛, 并采用线性与非线性组合的连续函数形式, 而不需要切换函数, 从而防止了系统的抖振现象.

关键词: 收敛; 非线性跟踪-微分器; 平衡点; 切换函数; 抖振

中图分类号: TP13; O231.2 **文献标识码:** A

Nonlinear tracking-differentiator with high speed in whole course

WANG Xin-hua, CHEN Zeng-qiang, YUAN Zhu-zhi
(Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: A fast-paced nonlinear tracking-differentiator was designed. It could guarantee that the state converges automatically to the equilibrium point with high speed under the condition that the state was far away from the equilibrium point or near to it. The continuous-function combination of linearity and nonlinearity was adopted, instead of the switching control by switch functions. As a result, this nonlinear tracking-differentiator prevented the chattering of the system.

Key words: converge; nonlinear tracking-differentiator; equilibrium point; switch function; chattering

1 引言 (Introduction)

对于非线性跟踪-微分器的研究是目前的一大研究热点课题. 文[1]中给出了非线性跟踪-微分器的一些设计及分析过程, 取代了原有的差分方法, 具有快速性和高精度的特点, 并且根据非线性跟踪-微分器的特性, 将其用于各种控制系统, 如文[1~5]. 但是, 在跟踪信号的过程中具有抖振的现象, 而且收敛速度慢. 文[6]中所设计的非线性跟踪-微分器系统状态在平衡点处的收敛速度快, 但是系统状态在远离平衡点时, 收敛速度慢, 从而导致初始阶段跟踪曲线抖振严重. 本文针对这种情况设计一种系统状态在远离和接近平衡点时都能自动以较快速度收敛的非线性跟踪-微分器. 在系统状态远离平衡点处, 引入的线性环节起主导作用; 在接近平衡点附近时, 引入的非线性环节起主导作用. 使系统状态始终保持快速收敛. 状态变化如图 1 所示.

设坐标原点为平衡点. 系统设计是使得状态首先沿着直线部分向平衡点移动, 当接近平衡点时, 再沿曲线部分向平衡点移动, 如图中实线部分的线路

运动过程. 系统状态迅速收敛到平衡点, 避免了抖振现象发生.

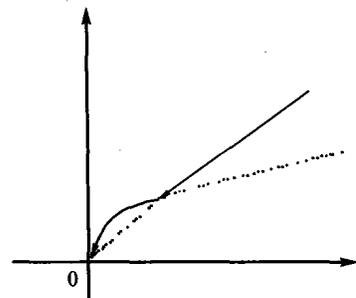


图 1 系统状态收敛示意图

Fig. 1 Convergent sketch map of state variable

2 快速非线性跟踪-微分器设计 (Design of high-speed nonlinear tracking-differentiator)

先给出如下引理.

引理 如下所示系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -a_0 z_1 - a_1 z_1^{m/n} - b_0 z_2 - b_1 z_2^{m/n}. \end{cases} \quad (1)$$

如果 $a_0, a_1, b_0, b_1 > 0, m, n$ 均为大于 0 的奇数, 且

$m < n$, 那么系统(1)在(0,0)点是渐近稳定的,即满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1 = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} z_2 = 0$.

证 选取如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(z_1, z_2) = \frac{2a_1 n}{m+n} z_1^{m/n} + a_0 z_1^2 + z_2^2, \quad (2)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2) &= 2a_1 z_1^{m/n} z_2 + 2a_0 z_1 z_2 + 2z_2(-a_0 z_1 - \\ & a_1 z_1^{m/n} - b_0 z_2 - b_1 z_2^{m/n}) = \\ & -2b_0 z_2^2 - 2b_1 z_2^{(m+n)/n} \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

如果 $\dot{V}(z_1, z_2) \equiv 0$ 时,由式(3)得 $z_2 \equiv 0, \dot{z}_2 \equiv 0$. 代入式(1)中,得 $z_1 = 0, \dot{z}_1 = 0$. 所以,只有在平衡点(0,0)处, Lyapunov 函数的导数才为 0. 所以可知上述系统(1)只有在(0,0)处是渐近稳定的. 即满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1 = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} z_2 = 0$. 证毕.

上述系统(1)实际上分为两个阶段.

1) 当 $|z| > 1$ 时,由于 $m < n$,有 $|z| > |z^{m/n}|$. 所以,系统状态在远离平衡点时 $|z| \gg |z^{m/n}|$, 系统(1)中起主导作用的形式如下

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -a_0 z_1 - b_0 z_2. \end{cases} \quad (4)$$

由文[6]中的引理的证明,可以看出系统(4)仍然是渐近稳定的,且保持快速的收敛速度,其收敛速度与 z_1, z_2 值的绝对值成正比.

2) 当 $|z| < 1$ 时,由于 $m < n$,有 $|z| < |z^{m/n}|$. 当系统状态接近于平衡点时, $|z| \ll |z^{m/n}|$ 成立,系统(1)中起主导作用的形式如下

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -a_1 z_1^{m/n} - b_1 z_2^{m/n}. \end{cases} \quad (5)$$

同样,由文[6]中的引理的证明,系统(5)也是稳定的,并且保持快速收敛性.

下面设计快速收敛的非线性跟踪-微分器,并给出如下定理.

定理 如下所示的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = R^2(-a_0(x_1 - v(t)) - a_1(x_1 - \\ v(t))^{m/n} - b_0 \frac{x_2}{R} - b_1 \left(\frac{x_2}{R}\right)^{m/n}), \\ y = x_1(t). \end{cases} \quad (6)$$

如果 $R, a_0, a_1, b_0, b_1 > 0, m, n$ 均为大于0的奇数,且 $m < n$, 那么对于任意输入信号 $v(t) \in [0, +B]$ ($0 < B < +\infty$), 满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} x_1(t) = v(t). \quad (7)$$

证 对输入信号 $v(t)$ 分两种情况进行讨论:

a) 当 $v(t)$ 为常数时,即 $v(t) = c$ (c 为常数), 式(6)变形为

$$\begin{cases} \frac{d(x_1(t) - c)}{dRt} = R^{-1} x_2(t), \\ \frac{d(R^{-1} x_2(t))}{dRt} = -a_0(x_1(t) - c) - a_1(x_1(t) - c)^{m/n} - \\ b_0(R^{-1} x_2(t)) - b_1(R^{-1} x_2(t))^{m/n}. \end{cases} \quad (8)$$

令 $H = Rt, z_1(h) = x_1(t) - c, z_2(h) = R^{-1} x_2(t)$, 则式(8)与式(1)具有相同的形式,所以对于任意时刻 t_0 有

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} |x_1(t) - c| dt &= \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\int_{Rt_0}^{Rt_0+RT} |z_1(Rt)| d(Rt)}{R} &= \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\int_{Rt_0}^{Rt_0+RT} |z_1(h)| dh}{R}. \end{aligned} \quad (9)$$

当 $\int_{Rt_0}^{Rt_0+RT} |z_1(h)| dh$ 有界时,上式左端为 0; 当

$\int_{Rt_0}^{Rt_0+RT} |z_1(h)| dh \rightarrow +\infty$ 时,由罗毕塔法则,得

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} |x_1(t) - c| dt &= \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} (|z_1(Rt_0 + RT)| (t_0 + T) - |z_1(Rt_0)| t_0). \end{aligned} \quad (10)$$

由引理中 $\lim_{h \rightarrow +\infty} z_1(h) = 0$, 所以

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} |x_1(t) - c| dt = 0. \quad (11)$$

由以上分析可知,当 $v(t)$ 为常数、 $R \rightarrow +\infty$ 时, $x_1(t)$ 弱收敛于 $v(t)$; 而 $x_2(t)$ 跟踪 $v(t)$ 的微分信号.

b) 当 $v(t) \in L[0, +\infty)$ 时,任给 $\varepsilon > 0$, 存在一个阶梯函数 $\varphi_M(t)$ (不需要文[1]中收敛于输入信号的连续函数列的条件,而是可以直接找到收敛于输入信号的阶梯函数 $\varphi_M(t)$) 满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |v(t) - \varphi_M(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

令 $I = [t_0, t_0 + T]$, $\varphi_M(t)$ 在每一个 I_i ($I = \bigcup_{i=1}^{m_1} I_i$, 且 $I_i \cap I_j \neq 0 (i \neq j), i, j = 1, \dots, m_1$) 中均为常数. 所以由式(11)知,对式(12)中任给的 $\varepsilon >$

0, 存在 R_0 , 使得当 $R > R_0$ 时, 满足

$$\int_{I_i} |x_1(t) - \varphi_M(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2m_1}, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (13)$$

所以

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x_1(t) - v(t)| dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{I_i} |x_1(t) - \varphi_M(t)| dt + \int_{t_0}^{t_0+T} |v(t) - \varphi_M(t)| dt < \varepsilon, \quad (14)$$

从而

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} |x_1(t) - v(t)| dt = 0. \quad (15)$$

即 $R \rightarrow +\infty$ 时, 当 $v(t) \in L[0, +\infty)$, $x_1(t)$ 弱收敛于 $v(t)$; 而 $x_2(t)$ 跟踪 $v(t)$ 的微分.

当 $v(t) \in L[0, +\infty)$ 时, 由式(15), 取 $t_0 = 0$, 及任意 $T \in (0, +\infty)$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 R_0 , 使得当 $R > R_0$ 满足

$$\int_0^T |x_1(t) - v(t)| dt \leq \varepsilon. \quad (16)$$

由 $|e^{j\omega t}| = 1$, 得

$$\int_0^T |x_1(t)e^{-j\omega t} - v(t)e^{-j\omega t}| dt \leq \varepsilon, \quad (17)$$

所以

$$0 \leq \left| \int_0^T x_1(t)e^{-j\omega t} dt - \int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt \right| < \int_0^T |x_1(t)e^{-j\omega t} - v(t)e^{-j\omega t}| dt \leq \varepsilon. \quad (18)$$

从而, 得

$$-\varepsilon \leq \left| \int_0^T x_1(t)e^{-j\omega t} dt \right| - \left| \int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \varepsilon. \quad (19)$$

若 $\int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt = 0$, 由系统(6)中 $y(t) = x_1(t)$, 则输出

$$Y(j\omega) = X_1(j\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T x_1(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (20)$$

由式(19)及 $T \in (0, +\infty)$ 任意性, 得

$$-\varepsilon \leq |Y(j\omega)| = |X_1(j\omega)| \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_0^T x_1(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \varepsilon, \quad (21)$$

所以可得 $\lim_{R \rightarrow +\infty} |Y(j\omega)| = 0$, 即系统稳定.

若 $\int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt \neq 0$, 则 $\left| \int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt \right| \neq 0$ (等于0时的证明过程类似), 则式(19)两边同时除以 $\left| \int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt \right|$, 且使得 $T \rightarrow +\infty$, 所以

$$1 - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon}{\left| \int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt \right|} \leq |G(j\omega)| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{\int_0^T x_1(t)e^{-j\omega t} dt}{\int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt} \right| \leq 1 + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon}{\left| \int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt \right|}, \quad (22)$$

可得

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = \lim_{\substack{T \rightarrow +\infty \\ R \rightarrow +\infty}} \left| \frac{\int_0^T x_1(t)e^{-j\omega t} dt}{\int_0^T v(t)e^{-j\omega t} dt} \right| = 1. \quad (23)$$

从上式可以看出, 在系统(6)中, 状态变量 $x_1(t)$ 在 $R \rightarrow +\infty$ 时逐点收敛于信号 $v(t)$, 即式(7)得证.

3 仿真 (Simulation)

1) 系统(4)状态变量的仿真曲线

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1 - z_2, \\ z_1(0) = 1, z_2(0) = -1, \end{cases}$$

系统状态曲线如图 2(a)所示.

2) 系统(5) 状态变量的仿真曲线.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^{m/n} - 1.14z_2^{m/n}, \\ z_1(0) = 1, z_2(0) = -1, \end{cases}$$

系统状态曲线如图 2(b)所示.

3) 系统(1)状态变量的仿真曲线.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1 - z_1^{m/n} - z_2 - 1.14z_2^{m/n}, \\ z_1(0) = 1, z_2(0) = -1, \end{cases}$$

系统状态曲线如图 2(c)所示.

4) 全程快速非线性跟踪-微分器仿真曲线.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 100^2 \left(-(x_1 - v(t)) - (x_1 - v(t))^{m/n} - \frac{x_2}{100} - 1.14 \left(\frac{x_2}{100} \right)^{m/n} \right), \\ y = x_1, \end{cases} \quad v(t) = \exp(-0.1t) \sin(0.5t),$$

仿真曲线如图 2(d)所示.

在上述各仿真曲线中, 对于图(a)~(c), 各实曲线分别为相应系统状态 $z_1(t)$, 各虚曲线分别为相应系统状态 $z_2(t)$. 对于图(d), 实曲线为状态 $x_1(t)$, 即输出 y , 虚曲线为状态 $x_2(t)$, 即输出信号 y 的微分.

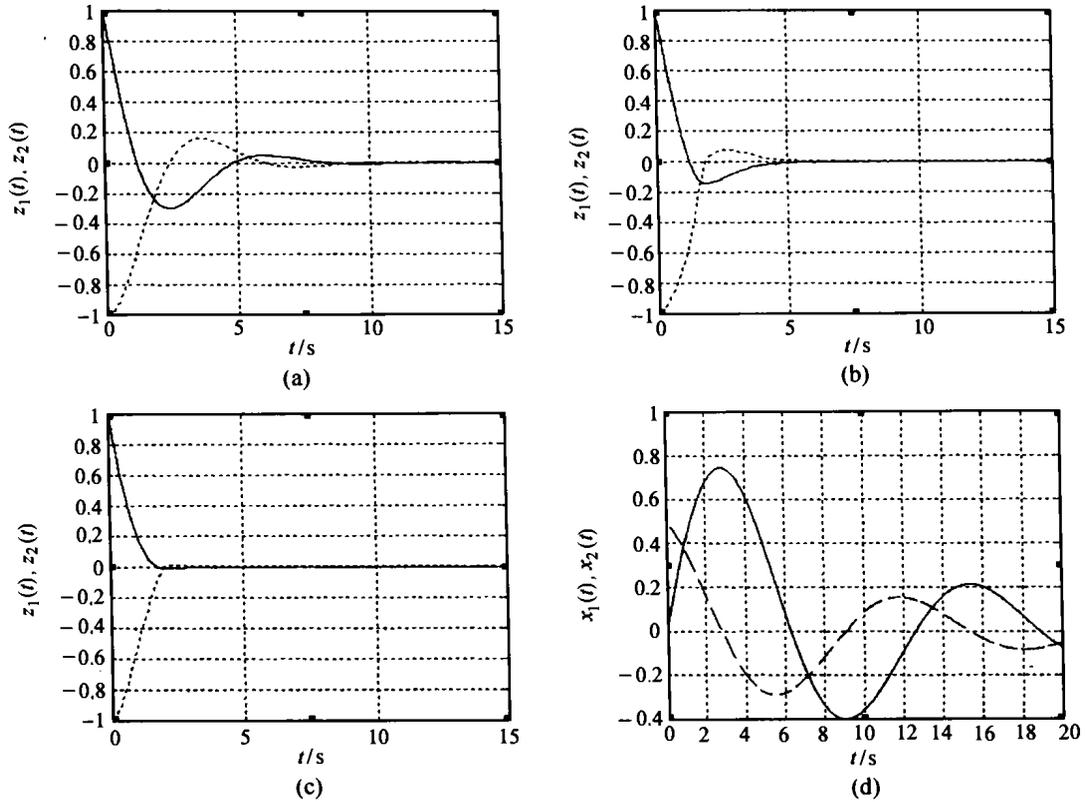


图2 各系统仿真曲线

Fig.2 Curves of systems

4 结论(Conclusion)

通过以上分析及仿真研究,可以看出改进后的非线性跟踪-微分器跟踪速度快,并且没有抖振现象,是一种十分有效的跟踪-微分器。

参考文献(References):

- [1] 韩京清,王伟.非线性跟踪-微分器[J].系统科学与数学,1994,14(2):177-183.
(HAN Jingqing, WANG Wei. Nonlinear tracking-differentiator [J]. *J System Science & Mathematical Sciences*, 1994, 14(2): 177-183.)
- [2] 韩京清.一种新型控制器—NLPID[J].控制与决策,1994,9(6):401-407.
(HAN Jingqing. A new type of controller: NLPID [J]. *Control and Decision*, 1994, 9(6): 401-407.)
- [3] 陈昶,王朝珠,韩京清.一种估计机动目标运动参数的方法[J].宇航学报,1995,16(1):30-34.
(CHEN Yong, WANG Caozhu, HAN Jingqing. A new approach to estimate the moving parameters for manoeuvring objects [J]. *J of Astronautics*, 1995, (1): 30-34.)
- [4] 韩京清.利用非线性特性改进PID控制律[J].信息与控制,1995,24(5):356-364.
(HAN Jingqing. Improved PID controller by the nonlinearity [J]. *Information and Control*, 1995, 24(5): 356-364.)
- [5] 韩京清.非线性PID控制器[J].自动化学报,1994,20(4):487-489.
(HAN Jingqing. Nonlinear PID controller [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1994, 20(4): 487-489.)
- [6] 王新华,陈增强.一种新型的非线性跟踪-微分器的设计及其稳定性分析[A].第21届中国控制会议[C].杭州:浙江大学出版社,2002:64-68.
(WANG Xinhua, CHEN Zengqiang. Design and stability analysis for a new nonlinear tracking-differentiator [A]. *The 21th Chinese Control Conf* [C]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2002: 64-68.)

作者简介:

王新华 (1975—),男,南开大学博士生,主要研究方向非线性自适应控制. E-mail: wang-xinhua@sina.com;

陈增强 (1964—),男,南开大学教授,博士生导师,主要从事非线性自适应控制,预测控制,智能控制研究. E-mail: chenqz@nankai.edu.cn;

袁著祉 (1937—),男,南开大学教授,博士生导师,主要从事非线性自适应控制,预测控制,过程控制研究. E-mail: aecyzz@public.tpt.tj.cn.