

混合 H_2/H_∞ 鲁棒控制器设计

王进华

(福州大学电气工程系, 福建 福州 350002)

摘要: 在状态空间描述下, 定义了混合 H_2/H_∞ 控制的完整信息、完整控制、干扰顺馈、输出估计这 4 种典型情况. 在二次稳定意义上, 讨论了混合 H_2/H_∞ 的性能指标, 及这 4 种典型情况的混合 H_2/H_∞ 线性反馈控制器设计, 给出了充分必要条件. 在典型情况分析的基础上, 研究一般意义上的混合 H_2/H_∞ 反馈控制器设计. H_2 和 H_∞ 的干扰输入阵及性能评价函数各不相同时的混合 H_2/H_∞ 反馈控制器, 与 H_2 和 H_∞ 控制器设计相似, 归结为解两个 Riccati 方程. 但这两个 Riccati 方程含有参数, 最优解要通过搜索这两个参数得到. 结果包含了单纯的 H_2 和 H_∞ 设计, 可看作是 H_2 , H_∞ 和混合 H_2/H_∞ 的统一设计方法. 最后通过一个简单的例子, 说明了控制器设计方法的可行性.

关键词: 鲁棒控制; 性能指标; 不确定性; H_2/H_∞ 控制

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Design of mixed H_2/H_∞ controller

WANG Jin-hua

(Department of Electrical Engineering, Fuzhou University, Fujian Fuzhou 350002, China)

Abstract: In state space descriptions, four typical systems of mixed H_2/H_∞ control were defined. They are full information system, full control system, feedforward disturbance system and output estimation system. Their controllers were designed to optimize the performance based on a kind of quadratic stable. Mixed H_2/H_∞ control system was decomposed into an inner matrix and a mixed H_2/H_∞ output estimation system. The output feedback controller was deduced according to this decomposition. Mixed H_2/H_∞ controller delivered here are analog to H_2 and H_∞ controller in that they have the same controller structure, the same number of Riccati equations and similar Riccati equations. The given controllers including the H_2 and H_∞ cases, can be treated as unified controllers of H_2 , H_∞ and mixed H_2/H_∞ control. Finally, a simple example was given to illustrate the proposed methods.

Key words: robust control; performance; uncertain; H_2/H_∞ control

1 引言(Introduction)

优化控制理论中的两个最常用的指标是 H_2 和 H_∞ 范数, 与此对应控制系统设计也有 H_2 和 H_∞ 方法. 传统的 H_2 最优设计, 其控制效果完全依赖于描述被控对象的数学模型的准确性. 但是由于各种不确定因素的影响, 要想获得精确的数学模型几乎是不可能的, 从而影响了传统的 H_2 最优控制器在实际中的应用. H_∞ 问题自 20 世纪 80 年代中期兴起, 至今仍是控制理论及应用研究的热点问题之一. 但是 H_∞ 控制主要考虑系统的鲁棒稳定性, 而系统的其他性能指标则未加关注, 最终的系统性能仍难以满足要求. 综合利用两种设计方法各自的优点, 产生了应用混合 H_2/H_∞ 指标分析、设计控制系统的方

法, 且得到迅速发展.

有许多学者研究混合 H_2/H_∞ 性能问题, 一般是通过各种方法(如通过 Lagrange 乘子法, 将 H_∞ 约束下的 H_2 优化问题, 转化为一个无约束的 H_2 优化问题), 提出一个辅助 H_2 指标. 该辅助代价函数是系统 H_2 范数的一个上界. 通过对辅助代价函数进行优化, 来得到问题的解. 在文献[1]中, Bernstein 等研究了不确定系统, 在满足一定的 H_∞ 约束下的 LQG 控制器问题. 即在系统 H_2 和 H_∞ 干扰输入阵相同时, 设计控制器, 使其 H_2 和 H_∞ 评价指标满足要求. 在文献[2, 3]中, Zhou 等人研究了 Bernstein 等研究的对偶问题, 即在系统 H_2 和 H_∞ 干扰输入阵不同时, 设计控制器, 使系统从外界干扰输入 w_1 到评价函数

z 的传递函数的 H_∞ 范数满足要求,且使评价函数 z 的 H_2 范数极小.文献[1,3]中的控制器设计,需解3个耦合的 Riccati 和 Lyapunov 方程,计算非常复杂.为简化设计,文献[4]中 Khargonekar 等通过研究,得到了文献[1]问题的凸集优化方法,即3个耦合的 Riccati 和 Lyapunov 方程的解,可转化到凸集内优化得到. Paganini 在文献[5]中研究了系统具有不确定性时, H_2 性能指标的频域表达方式,并在文献[6]中,给出了设计控制器的凸集方法.虽然 Paganini 主要用频域的方法进行分析、综合,他也给出了状态空间描述的控制器的设计方法. Stoorvogel 在文献[8]中,研究了系统在不确定性最恶劣时, H_2 性能指标的分析方法,并将其转化为文献[3]中的辅助代价函数法进行系统综合.而 Scherer 在文献[9]中研究了系统对多个目标函数的控制器优化设计问题,即同时对 $d^j \rightarrow z^j$ 的传递函数阵 $T_{1j}^i + T_{2j}^i Q T_{3j}^i, j = 0, 1, \dots, k$ 进行优化,其中有一个优化目标是 H_∞ 范数.所有这些方法,在用状态空间来描述时,其控制器都可用 LMI 来参数化表达.

已有的结论大都是对 w_0 和 w_1 的输入矩阵相同^[1],或者评价输出 z_0 和 z_1 相同^[2~3],这与实际系统是有差别的.虽然在系统分析方面,有 w_0 和 w_1, z_0 和 z_1 各不相同的成果,但未能用于系统综合方面.在进行系统综合时,要解耦合的 Riccati 和 Lyapunov 方程,计算极为困难,目前未有有效的方法.化为凸集优化,也只是简化了问题的复杂性.另外, H_2 和 H_∞ 控制的控制器结构相似、Riccati 方程相近,有明显的对应关系.但在已有的混合 H_2/H_∞ 控制成果中,这种相似性没有体现.因此,本文希望通过研究能进一步揭示混合 H_2/H_∞ 控制与 H_2 和 H_∞ 控制的关系,进而得到一种能适应大多数实际对象、且方法相对简单的混合 H_2/H_∞ 控制器设计方法.

系统鲁棒稳定的 H_2 范数求解问题,可等价地转化为一种特定的鲁棒二次稳定问题.通过鲁棒二次稳定问题的解,求出系统 H_2 鲁棒性能指标的上确界.本文根据这样的 H_2 鲁棒性能指标,研究混合 H_2/H_∞ 线性反馈控制器设计问题.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑图1所示的系统, G 为已知的线性、定常、有限维系统模型, Δ 为考虑系统建模过程中的线性化误差、低阶近似等不确定性及外界干扰造成的实际系统与系统模型 G 之间的误差. Δ 是系统的未知

部分,可能是非线性、时变的. K 是控制器.为研究方便,假定系统模型如下:

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_0 w_0 + B_1 w_1 + B_2 u, \\ z_0 = C_0 x + D_{02} u, \\ z_1 = C_1 x + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_{20} w_0 + D_{21} w_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量; $w_1 \in \mathbb{R}^m$ 为干扰系统的输出; $z_1 \in \mathbb{R}^p$ 为干扰系统的输入; $w_0 \in \mathbb{R}^l$ 为外界干扰输入,是有单位强度的零均值正态白噪声; $z_0 \in \mathbb{R}^q$ 是控制输出; $y \in \mathbb{R}^r$ 为观测量; $u \in \mathbb{R}^s$ 为控制输入. $A, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2, D_{02}, D_{12}, D_{20}, D_{21}$ 是相应维数的常数矩阵.

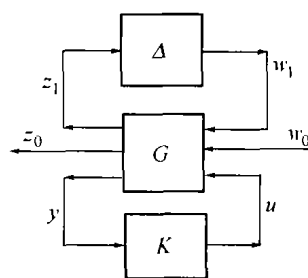


图1 有扰动 Δ 和反馈的系统 G

Fig. 1 System G with disturbance Δ and feedback

所谓混合 H_2/H_∞ 的鲁棒控制器设计问题,主要是指图1系统在有界扰动 $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma^{-1}$ 时,设计控制器,使系统鲁棒稳定,并使控制输出 z_0 的 H_2 范数最小.其中 H_2 和 H_∞ 范数,如文献[7]给出的定义.对上述系统,作如下假定:

- i) (A, B_0, C_0) 及 (A, B_1, C_1) 可稳定、可检测;
- ii) (A, B_2, C_2) 可稳定、可检测;
- iii) $D_{02}^T [C_0 \ D_{02}] = [0 \ I]$ 及 $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$;
- iv) $D_{02} [B_0^T \ D_{02}^T] = [0 \ I]$ 及 $D_{21} [B_1^T \ D_{21}^T] = [0 \ I]$.

假定 i)、ii) 是为了使混合 H_2/H_∞ 的鲁棒控制器设计问题对应的 Riccati 方程有正定解.假定 iii)、iv) 是正交性假定,且保证 D_{02} 和 D_{20} 正则、满秩.系统描述(1)及上述假定并不影响讨论问题的一般性,更一般的系统描述,可通过变换转化为上述形式.为简化标记,将(1)式系统简记为

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ u \end{bmatrix}.$$

对含有不确定性 Δ 的系统,直接求解其 z_0 的 H_2 范数是一个非常困难的任务.若系统鲁棒稳定,则其 z_0 的 H_2 范数有上界,因此在混合 H_2/H_∞ 问题中,常用这一上界来分析综合系统.对此假定鲁棒稳定系统描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 \\ C_0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中: $\|G_{z_1 w_1}\|_\infty = \gamma_0 < \gamma$, 且 $(A, B_0, C_0), (A, B_1, C_1)$ 是可稳定、可检测的,则有如下引理.

引理 1 假定系统如式(2)所示,若对任意满足 $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ 的 Δ , 对系统任意解的轨迹 $x(t)$, 存在对称正定阵 P , 使得

$$x^T(t)[A^T P + PA]x(t) + 2x^T(t)PB_1 w_1(t) \leq -\|z_0(t)\|^2, \quad (3)$$

则有

$$\sup \|z_0(t)\|_2^2 \leq \text{tr}(B_0^T P B_0). \quad (4)$$

证 参照文献[3]定理1的证法,取 $V(x) = x^T P x$, 利用其导数在系统解轨迹上的积分及系统鲁棒稳定,即可得证.

容易验证,若对任意满足 $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ 的 Δ , 对系统任意解的轨迹 $x(t)$, 有式(3)成立,则系统是渐近稳定的.式(3)也保证了系统的二次稳定性.根据引理1,可将系统的性能指标取为

$$J = \inf \{\text{tr}(B_0^T P B_0)\}. \quad (5)$$

其中 P 满足式(3).以后,将用 J 表示 z_0 的 H_2 性能指标.

引理 2 假定系统如式(2)所示,若对任意满足 $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ 的 Δ , 对系统任意解的轨迹 $x(t)$, 存在对称正定阵 P 满足式(3)的充分必要条件是 P 也是下式的解

$$A^T P + PA + \alpha^2 \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P + \frac{1}{\alpha^2} C_1^T C_1 + C_0^T C_0 \leq 0. \quad (6)$$

其中, α 是一个实数.

证 很容易有由式(6)推得式(3),即引理充分性、必要性证明如下.式(3)等价于

$$x^T(t)[A^T P + PA + C_0^T C_0]x(t) \leq -2x^T(t)PB_1 w_1(t).$$

考虑到 $w_1 = \Delta \cdot C_1 x$, 上式可记成

$$\begin{aligned} & x^T(t)[A^T P + PA + C_0^T C_0]x(t) \leq \\ & -2x^T(t)PB_1 \Delta \cdot C_1 x(t) = \\ & -2\gamma^{-1} x^T(t)PB_1 \bar{\Delta} \cdot C_1 x(t). \end{aligned}$$

其中 $\bar{\Delta} = \gamma \Delta$. 根据文献[8]的定理4.1的证明过程中的论述,在 $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ 时,对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 上式等价于

$$\begin{aligned} & x^T(t)[A^T P + PA + C_0^T C_0]x(t) \leq \\ & -2\gamma^{-1} \|B_1^T P x(t)\| \cdot \|C_1 x(t)\|. \end{aligned}$$

两边平方,可得

$$\begin{aligned} & \{x^T(t)[A^T P + PA + C_0^T C_0]x(t)\}^2 \geq \\ & 4\gamma^{-2} x^T(t)PB_1 B_1^T P x(t) \cdot x^T(t)C_1^T C_1 x(t) = \\ & [\alpha^2 \gamma^{-2} x^T(t)PB_1 B_1^T P x(t) + \alpha^{-2} x^T(t)C_1^T C_1 x(t)]^2 - \\ & [\alpha^2 \gamma^{-2} x^T(t)PB_1 B_1^T P x(t) - \alpha^{-2} x^T(t)C_1^T C_1 x(t)]^2 \geq \\ & [\alpha^2 \gamma^{-2} x^T(t)PB_1 B_1^T P x(t) + \alpha^{-2} x^T(t)C_1^T C_1 x(t)]^2. \end{aligned}$$

因对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 上式成立,即可推得式(6).

3 典型系统定义 (Definition of typical systems)

参照文献[7]中对 H_2 和 H_∞ 控制典型系统的描述,定义如下混合 H_2/H_∞ 的典型系统.

定义 1 完整信息, FI (full information) 问题.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ \left[\begin{smallmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] & \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{smallmatrix} \right] & \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{smallmatrix} \right] & 0 \end{bmatrix}.$$

在这个问题中,所有状态和外界干扰都可以得到.本文仅考虑状态反馈,控制器并未用到干扰信号.另外系统满足如下假定:

- i) (A, B_0, C_0) 及 (A, B_1, C_1) 可稳定、可检测;
- ii) (A, B_2) 可稳定;
- iii) $D_{02}^T [C_0 \ D_{02}] = [0 \ I]$ 及 $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$.

定义 2 完整控制, FC (full control) 问题.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & \left[\begin{smallmatrix} I & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \\ C_0 & 0 & 0 & \left[\begin{smallmatrix} 0 & I & 0 \end{smallmatrix} \right] \\ C_1 & 0 & 0 & \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & I \end{smallmatrix} \right] \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

在这个问题中,控制信号可以直接施加到所有状态变量和控制输出.同样,本文也仅考虑对状态变量进行控制.系统满足如下假定:

- i) (A, B_0, C_0) 及 (A, B_1, C_1) 可稳定、可检测;
 ii) (C_2, A) 可检测;
 iii) $D_{20}[B_0^T \ D_{20}^T] = [0 \ I]$ 及 $D_{21}[B_1^T \ D_{21}^T] = [0 \ I]$.

定义 3 干扰顺馈, DF (disturbance feedforward) 问题.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_1 & B_2 \\ C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ C_2 & I & I & 0 \end{bmatrix}.$$

在这个问题中,假定干扰信号 w_0, w_1 通过同样的途径作用到系统中,即 $B_0 = B_1, D_{20} = D_{21} = I$. 这个问题考虑的系统描述与文献[4]中研究问题的系统描述相似. 另外假定:

- i) (A, C_0) 及 (A, C_1) 可检测, $A - B_1 C_2$ 是稳定的;
 ii) (A, B_2) 可稳定;
 iii) $D_{02}^T[C_0 \ D_{02}] = [0 \ I]$ 及 $D_{12}^T[C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$.

定义 4 输出估计, OE (output estimation) 问题.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 & I \\ C_1 & 0 & 0 & I \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

在这个问题中,假定针对 H_2 和 H_∞ 性能的控制输出信号 z_0, z_1 相同,即 $C_0 = C_1, D_{02} = D_{12} = I$. 这个问题考虑的系统描述与文献[7]中研究问题的系统描述相似. 另外假定:

- i) (A, B_0) 及 (A, B_1) 可稳定, $A - B_2 C_1$ 是稳定的;
 ii) (A, C_2) 可检测;
 iii) $D_{20}[B_0^T \ D_{20}^T] = [0 \ I]$ 及 $D_{21}[B_1^T \ D_{21}^T] = [0 \ I]$.

上述 4 种问题与 H_2 和 H_∞ 控制中的相应问题有明显的相似点,各问题的假定条件也相同. 因此,上述 4 种问题在 H_2/H_∞ 控制中的重要性也与相似问题在 H_2 和 H_∞ 控制中的重要性相同. 另外,上述问题中,很明显 FC, OE 问题是 FI, DF 问题的对偶问题.

4 典型系统的控制器 (Controllers of typical systems)

本文今后将反复用到如下两个 Riccati 方程,其中 α, β 为实数.

$$R_\alpha(X) :=$$

$$A^T X + X A + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} X B_1 B_1^T X -$$

$$\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} X B_2 B_2^T X + \frac{1}{\alpha^2} C_1^T C_1 + C_0^T C_0 = 0,$$

$$R_\beta(Y) :=$$

$$A Y + Y A^T + \frac{\beta^2}{\gamma^2} Y C_1^T C_1 Y -$$

$$\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} Y C_2^T C_2 Y + \frac{1}{\beta^2} B_1 B_1^T + B_0 B_0^T = 0.$$

定理 1 (FI 问题) 存在线性状态反馈控制器, 使得 $\|G_{z_1 u_1}\|_\infty < \gamma$ 且使 z_0 的 H_2 性能指标最小的充分必要条件是存在数 α 使得 $R_\alpha(X) = 0$ 有对称正定解 X , 则相应的最优反馈阵为

$$K = -\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} B_2^T X \quad (7)$$

及 z_0 的 H_2 性能指标为

$$J = \inf_\alpha \{ \text{tr} (B_0^T X B_0) \}. \quad (8)$$

证 由引理 1 和引理 2, 容易证明定理的充分性, 必要性证明如下.

设最优的反馈增益阵为 K , 由此构成的闭环系统为

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 K & B_0 & B_1 \\ C_0 + D_{02} K & 0 & 0 \\ C_1 + D_{12} K & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}.$$

由引理 2, 若存在 α 使下式有对称正定解 X ,

$$(A + B_2 K)^T X + X (A + B_2 K) + \alpha^2 \gamma^{-2} X B_1 B_1^T X + \frac{1}{\alpha^2} (C_1 + D_{12} K)^T (C_1 + D_{12} K) + (C_0 + D_{02} K)^T (C_0 + D_{02} K) \leq 0, \quad (9)$$

则有

$$J = \inf_\alpha \text{tr} (B_0^T X B_0).$$

将具有(9)式约束的 J 的极值问题, 通过 Lagrange 乘子法转化为无约束的极值问题并对 K 求极值, 即可解得 K . 因为 $D_{02}^T[C_0 \ D_{02}] = [0 \ I]$ 及 $D_{12}^T[C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$, 可解得最优时有如式(7)及

$$A^T X + X A + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} X B_1 B_1^T X - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} X B_2 B_2^T X + \frac{1}{\alpha^2} C_1^T C_1 + C_0^T C_0 \leq 0. \quad (10)$$

显然, 使 J 最优的解矩阵 X , 应在式(10)取等号时得到.

定理 2(FC 问题) 存在线性反馈控制器,使得 $\|G_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 且使 z_0 的 H_2 性能指标最小的充分必要条件是存在数 β 使得 $R_\beta(Y) = 0$ 有对称正定解 Y , 则相应的最优反馈阵为

$$K = -\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} Y C_2^T \quad (11)$$

及 z_0 的 H_2 性能指标为

$$J = \inf_{\beta} \{ \text{tr}(C_0 Y C_0^T) \}. \quad (12)$$

证 根据对偶原理,由定理 1 即可得证.

定理 3(DF 问题) 存在线性反馈控制器,使得 $\|G_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 且使 z_0 的 H_2 性能指标最小的充分必要条件是存在数 α 使得 $R_\alpha(X) = 0$ 有对称正定解 X , 相应的最优反馈控制器为

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 K - B_1 C_2 & B_1 \\ \hline K & 0 \end{array} \right].$$

其中: K 如式(7)所示, z_0 的 H_2 性能指标如式(8)所示.

证 设有如下的 FI 和 DF 问题

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{FI}(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_1 & B_1 & B_2 \\ \hline C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ \hline I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{array} \right], \\ G_{DF}(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_1 & B_1 & B_2 \\ \hline C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & I & I & 0 \end{array} \right]. \end{array} \right. \quad (13)$$

如果它们有控制器 K_{FI} 和 K_{DF} , 相应的闭环传递矩阵为 T_{FI} 和 T_{DF} . 构造 K_{DF} 如图 2 所示, 其中

$$P_{DF} = \left[\begin{array}{c|ccc} A - B_1 C_2 & B_1 & B_1 & B_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \\ \hline I & 0 & 0 & 0 \\ \hline -C_2 & I & I & 0 \end{array} \right].$$

若将 K_{DF} 与 G_{DF} 构成闭环系统, 用 x 表示 G_{DF} 的状态, $\hat{x}$ 表示 P_{DF} 的状态, 则用 $\hat{x}$ 和误差 $e := x - \hat{x}$ 表示的系统如下:

$$\left[\begin{array}{c} e \\ \hat{x} \\ x \\ z_0 \\ z_1 \\ \hat{y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} A - B_1 C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline B_1 C_2 & A & B_1 & B_1 & B_2 \\ \hline C_0 & C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_1 & C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ \hline 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_2 & 0 & I & I & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} e \\ \hat{x} \\ w_0 \\ w_1 \\ \dot{u} \end{array} \right].$$

由上式可知, 状态 e 是不可控的. 因假定 $A - B_1 C_2$ 是稳定的, 所以系统存在反馈控制器使 $\|G_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 且使 $\|z_0\|_2$ 极小, 等价于存在状态反馈控制器使上式右下分块系统(按实线分块)满足 $\|T_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 且 $\|z_0\|_2$ 极小. 因此, K_{DF} 使 G_{DF} 内部稳定的充分必要条件是 K_{FI} 使 G_{FI} 内部稳定, 此时有 $T_{DF} = T_{FI}$.

根据上述 DF 问题的反馈控制器与 FI 问题的反馈控制器的关系, 将定理 1 得到的 FI 问题的控制器应用到图 2, 即可得出定理 3 的结果.

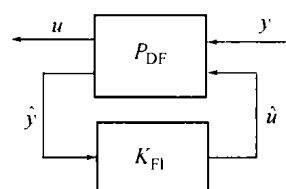


图 2 DF 问题的反馈控制器

Fig. 2 Feedback controller of DF problem

定理 4(OE 问题) 存在线性反馈控制器,使得 $\|G_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 且使 z_0 的 H_2 性能指标最小的充分必要条件是存在数 β 使得 $R_\beta(Y) = 0$ 有对称正定解 Y , 相应的最优反馈控制器为

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + K C_2 - B_2 C_1 & K \\ \hline C_1 & 0 \end{array} \right].$$

其中: K 如式(11)所示, z_0 的 H_2 性能指标如式(12)所示.

证 根据对偶原理,由定理 3 即可得证.

上述定理表明,对这几种特殊的问题,混合 H_2/H_∞ 控制器与 H_2 和 H_∞ 控制器的结构完全相同. 但是在 H_2 和 H_∞ (给定 γ) 控制中,解出对应的 Riccati 方程,就可得到相应的反馈增益阵;而对混合 H_2 和 H_∞ 控制,必须搜索 Riccati 方程中的参数 α (或 β), 才能得到最优的反馈控制律.

5 混合 H_2/H_∞ 控制系统的分解问题 (Decomposition of mixed H_2/H_∞ control)

如果传递函数矩阵 $U(s) \in H_\infty$ 满足 $U^T(-s)U(s) = I$, 则称 $U(s)$ 为内矩阵. 如果传递函数矩阵 $U(s)$ 是内矩阵, 那么, 对任意 $P(s) \in H_\infty$, $X(s) \in H_2$, 有 $\|U(s)P(s)\|_\infty = \|P(s)\|_\infty$ 及 $\|U(s)X(s)\|_2 = \|X(s)\|_2$, 即内矩阵有保范特性. 关于内矩阵有如下引理.

引理 3^[7] 设 $U(s) = \{A, B, C, D\}$, D 列满秩, (A, C) 可检测. 如果存在半正定阵使 $X \geq 0$ 使得

$$\begin{cases} XA + A^T X + C^T C = 0, \\ D^T C + B^T X = 0, \\ D^T D = I, \end{cases}$$

则 A 为稳定阵且 $U(s)$ 为内矩阵.

引理 4^[7] 考虑图 3 反馈系统

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \in \Xi H_\infty.$$

如果 P 是内矩阵, 且 $P_{21}^{-1} \in \Xi H_\infty$, Q 是一个有理矩阵. 那么, 下列条件是等价的.

- i) 系统内部稳定且 $\|T_{zu}(s)\|_\infty < \gamma$;
- ii) $Q \in \Xi H_\infty$ 且 $\|Q\|_\infty < \gamma$.

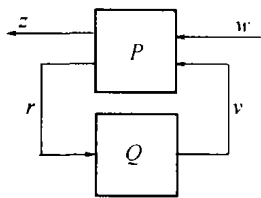


图 3 反馈系统

Fig. 3 Feedback system

下面讨论系统(1)在满足第一节的假定条件下的分解问题.

定理 5 设系统(1)满足相应假定条件, 若存在实数 α 及对称正定阵 X 使得 $R_\alpha(X) = 0$, 则如下定义的传递函数阵是内矩阵:

$$P(s) = \begin{bmatrix} A_F & 0 & \frac{\alpha}{\gamma} B_1 & \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} B_2 & \frac{\alpha}{1+\alpha^2} B_2 \\ C_{0F} & 0 & 0 & D_{02} & 0 \\ C_{1F}/\alpha & 0 & 0 & 0 & D_{12} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\gamma} B_1^T X & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

其中: $A_F = A + B_2 F$, $C_{0F} = C_0 + D_{02} F$, $C_{1F} = C_1 + D_{12} F$,

$$F = -\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} B_2^T X. \quad (15)$$

证 直接验证 $P(s)$ 满足引理 3 即可.

另一方面, 若系统(1)满足定理 5, 则可构造输出估计系统如下:

$$G_{OE}(s) = \begin{bmatrix} A_w & B_0 & B_1 & B_2 \\ -F & 0 & 0 & I \\ -F & 0 & 0 & I \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其中 $A_w = A + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X$, 而 F 如式(15)所示, 则有

如下结论:

定理 6 若存在一个实数 α 及一个对称正定阵 X 使得 $R_\alpha(X) = 0$, 则式(1)系统可等价地表示为图 4 所示的组合系统, 图中 $P(s)$ 如式(14)所示, G_{OE} 如式(16)所示.

证 由于存在一个实数 α 及一个对称正定阵 X 使得 $R_\alpha(X) = 0$, 可以按式(14)、(16)分别构造 $P(s)$ 和 $G_{OE}(s)$. 将 $P(s)$ 和 $G_{OE}(s)$ 按图 4 连接起来, 构成组合系统. 记 $P(s)$ 的状态变量为 x 而 $G_{OE}(s)$ 的状态变量为 $\hat{x}$, 则用 $\hat{x}$ 和 $e = x - \hat{x}$ 表示的组合系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\hat{x}} \\ z_0 \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X & 0 & -B_0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X & A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_{0F} & C_0 & 0 & 0 & D_{02} \\ C_{1F} & C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{20} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \hat{x} \\ w_0 \\ w_1 \\ u \end{bmatrix}. \quad (17)$$

从式(17)可看出, 状态变量 e 是不可控的, 由于 Riccati 方程 $R_\alpha(X) = 0$ 有对称正定解 X , $A_F + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X$ 是稳定阵, 状态 e 将趋于零. 因此组合系统等价于式(17)的右下分块系统, 即系统(1).

6 混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器 (Mixed H_2/H_∞ output feedback controller)

本节将在上面讨论的混合分解的基础上, 给出其输出反馈控制器的设计方法. 系统描述如式(1), 且满足相应的假定.

定理 7 若存在一个实数及一个对称正定阵 X 使得 $R_\alpha(X) = 0$, 则下面的论述是等价的.

- 1) $K(s)$ 是 $G(s)$ 的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器.
- 2) $K(s)$ 是 $G_{OE}(s)$ 的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器.

证 在定理条件下, $G(s)$ 等价于图 4 所示的组合系统. 混合 H_2/H_∞ 控制包括: 保证从 w_1 的 z_1 的传递函数的无穷范数小于 γ ; 保证控制输出 z_0 的 H_2 范数最优.

首先论述其内部稳定性是等价的, 由定理 5, $P(s)$ 是内矩阵, 将其分块为

$$\begin{bmatrix} z \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}.$$

其中: $z^T = [z_0 \quad z_1/\alpha]$, $r^T = [r_0 \quad \frac{\gamma}{\alpha} r_1]$, $w^T = [w_0 \quad \frac{\gamma}{\alpha} w_1]$, $v^T = [v_0 \quad v_1/\alpha]$, 则有

$$P_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} A_F + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$

如前所述, $A_F + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X$ 是稳定阵, 因而 $P_{21}^{-1} \in \mathbb{H}_\infty$. 由引理 4, $G(s)$ 和 $G_{OE}(s)$ 的 H_∞ 范数相同. 记系统 $G(s)$ 从 w_1 到 z_1 的传递函数为 $GT_{z_1 w_1}$, 记系统 $G_{OE}(s)$ 从 r_1 到 v_1 的传递函数为 $G_{OE}T_{v_1 r_1}$. 当考虑鲁棒稳定性时, 可以令 $w_0 = 0$. 则由式(14), 有 $r_0 = 0$; 由式(16), 可得到 $v_0 = v_1$, 进而可知 $\|GT_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 是等价于 $\|G_{OE}T_{v_1 r_1}\|_\infty < \gamma$.

上面证明了系统 $G(s)$ 与 $G_{OE}(s)$ 内部稳定是等价的, 下面将进一步论证其评价输出的 H_2 范数的等价性. 混合 H_2/H_∞ 控制问题可看作是在 $\|T_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 约束下, 优化控制输出 z_2 的 H_2 范数. 有约束条件的极值问题, 可通过 Lagrange 乘子法转化为无条件的极值问题. 设 Lagrange 乘子为 $1/\alpha^2$, 则优化指标为

$$J_{z_0} = \|z_0\|_2^2 + (\|z_1\|_2^2 - \gamma^2 \|w_1\|_2^2)/\alpha^2.$$

由定理 5 知 $P(s)$ 内矩阵, 内矩阵具有保范性, 参照图 4 可得到

$$\begin{aligned} \|z_0\|_2^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|z_2\|_2^2 + \|r_0\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \|r_1\|_2^2 = \\ \|w_0\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \|w_1\|_2^2 + \|v_0\|_2^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|v_1\|_2^2. \end{aligned}$$

由于 $r_0 = w_0$, 将上式重新排列, 可得

$$\begin{aligned} \|z_0\|_2^2 + (\|z_1\|_2^2 - \gamma^2 \|w_1\|_2^2)/\alpha^2 = \\ \|v_0\|_2^2 + (\|v_1\|_2^2 - \gamma^2 \|r_1\|_2^2)/\alpha^2, \end{aligned}$$

即

$$J_{z_0} = J_{v_0}.$$

上式说明 $G(s)$ 和 $G_{OE}(s)$ 评价输出的 H_2 范数相等.

综上所述, $K(s)$ 是 $G(s)$ 的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器, 等价于 $K(s)$ 是 $G_{OE}(s)$ 的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器.

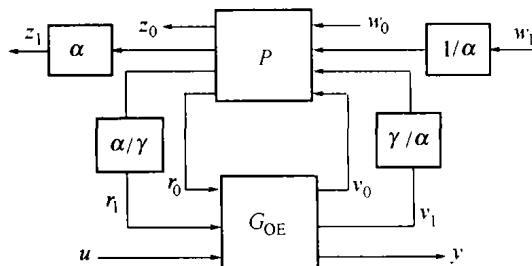


图 4 组合系统

Fig. 4 Combined system

定理 8 设系统(1)满足相应假定, 则存在输出反馈控制器 $K(s)$ 使得 $\|T_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ 且使控制输出 z_0 的 H_2 范数最优的充分必要条件是

i) 存在一个实数 α 和一个对称正定阵 X 使得

$$A^T X + XA + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} X B_1 B_1^T X - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} X B_2 B_2^T X +$$

$$\frac{1}{\alpha^2} C_1^T C_1 + C_0^T C_0 = 0. \quad (18)$$

ii) 存在一个实数 β 和一个对称正定阵 Y 使得

$$A_w Y + Y A_w^T + \frac{\beta^2}{\gamma^2} Y F^T F Y - \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} Y C_2^T C_2 Y + \frac{1}{\beta^2} B_1 B_1^T + B_0 B_0^T = 0. \quad (19)$$

iii) α, β 使得 $J = J_\alpha + J_\beta$ 达到极小.

此时, 输出反馈控制器为

$$K(s) = \begin{bmatrix} A + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X + B_2 F + L C_2 & -L \\ F & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

其中

$$J_\alpha = \sup \|z(t)\|_2^2 = \inf_\alpha \{ \text{tr}(B_0^T X B_0) \},$$

$$J_\beta = \sup \|z(t)\|_2^2 = \inf_\beta \{ \text{tr}(F Y F^T) \},$$

$$F = -\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} B_2^T X, \quad L = -\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} Y C_2^T,$$

$$A_w = A + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} B_1 B_1^T X.$$

证 充分性. 在定理条件 i) 下, 系统 $G(s)$ 可按定理 6 分解为 $P(s)$ 和 $G_{OE}(s)$, 此时 $G(s)$ 和 $G_{OE}(s)$ 的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器相同 (定理 7 的结论). 根据系统的假定和定理条件 i), $G_{OE}(s)$ 满足定义 4 输出估计系统的假定. 由定理 4, 在定理条件 ii) 下, $G_{OE}(s)$ 的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器由式 (20) 给出, 最优 H_2 的性能指标通过搜索参数 α 和 β 得到.

必要性. 若系统存在混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器 $K(s)$, 则必存在混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器. 即系统的完整信息问题有解, 由定理 1, 可得到定理条件 i).

在定理条件 i) 下, 由定理 6、定理 7、定理 4, 可得到定理条件 ii), 定理条件 iii) 是显然的.

几点说明:

1) 与 H_2 和 H_∞ 的控制的情形相似, 在混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制中, 状态反馈和状态估计有分离的结构. 状态反馈增益阵由式 (18) 给出, 状态估计的增

益阵由式(19)给出,但是在混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制中,Riccati 方程是带有参数的,且状态反馈增益阵 F 出现在方程(19)中.

2) J_α 对应了系统在状态反馈时的混合 H_2/H_∞ 性能, J_β 对应了系统在状态估计时的混合 H_2/H_∞ 性能,因而, $J = J_\alpha + J_\beta$ 是利用状态估计实现反馈控制时的混合 H_2/H_∞ 性能.

3) 由于 Riccati 方程(18)和(19)是带参数的,满足条件的控制器要通过搜索参数 α 和 β 得到.因为式(18)和(19)并不是完全耦合的,且 Riccati 方程(18)和(19)是参数 α 和 β 的凸函数,因此定理 8 给出的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器设计方法比现有的方法简单.

4) 最优的控制器要通过搜索参数 α 和 β 得到,这是一个优化问题,本文不进一步讨论.在后面的例子中,使用对分法进行优化的.即首先对适当给定的 α ,可通过式(18)解出相应的状态反馈增益阵 F ,将其代入式(19),即可通过对分法调节参数 β ,得到优化的 J_β ;然后利用对分法,改变 α ,重复上述过程,直到 $J = J_\alpha + J_\beta$ 最优.

5) 定理 8 也包含了 H_2 和 H_∞ 控制的情形,即有下述两个性质:

性质 1 当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时,定理 8 给出的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器等于 LQG 输出反馈控制器.

性质 2 当最优的性能指标值 J 在 $\alpha, \beta \rightarrow 0$ 得到时,定理 8 给出的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器等于 H_∞ 输出反馈控制器.

6) 不论是对典型系统还是对一般的系统,本文给出的混合 H_2/H_∞ 控制器,都包含了 H_2 和 H_∞ 控制的情形,可以看作是混合 H_2/H_∞ , H_2 和 H_∞ 控制的统一形式.

7 举例(Example)

本节将给出一个简单的例子,说明本文的控制器设计方法.设系统模型如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_0 = C_2 = [1 \quad 0],$$

$$D_{02} = D_{20} = 1, D_{21} = [0 \quad 1].$$

设计控制器使得 $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$ 且使 $\|z_0\|_2$ 最优.

这是一个简单的系统,容易算出当 $\gamma > \gamma_0 = \sqrt{2}$, 其完整控制的 H_∞ 控制问题有解.由式(13)可知,这也是存在混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器的一个

条件,在本例中,取 $\gamma = 4$ 进行计算.根据定理 8 很容易得到其混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器.图 5 是 $\gamma = 4$ 时,性能指标 J 与参数 α 和 β 的关系曲线.为了作图方便,将 $J > 300$ 一律取为 $J = 300$.最小的性能指标值在 $\alpha = 0.3751$ 和 $\beta = 0.6435$ 处得到.混合 H_2/H_∞ , H_2 和 H_∞ 输出反馈控制器的增益阵如表 1 所示.表中 $\|G_{z_1 w_1}\|_\infty$ 是闭环系统 w_1 从 z_1 到的传递函数;而 $\|z_0\|_2^2$ 是闭环后中心系统(即不考虑系统的不确定性),评价输出 z_0 的 H_2 范数.3 种控制方式下的单位阶跃响应曲线如图 6 所示.在仿真过程中,不确定干扰按 $\Delta = c \operatorname{diag} \{\sin x_1, \sin x_2\}$ 作用到系统中.仿真时取的不同的值,见图 6 所示.

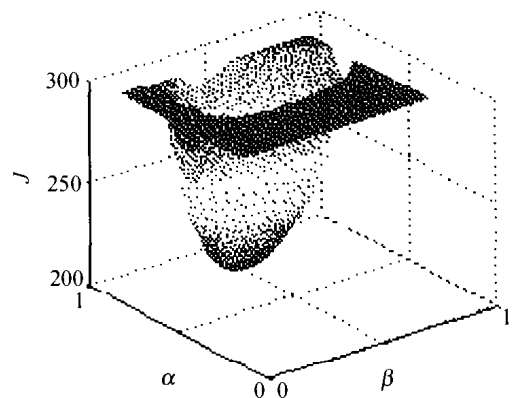


图 5 指标 J 与 α 和 β 的关系

Fig. 5 Relationship of performance J to α and β

计算及仿真结果表明:

1) 闭环系统从 w_1 到 z_1 的传递函数的无穷范数 $\|G_{z_1 w_1}\|_\infty$, H_∞ 控制器比 H_2 控制器的小,而混合 H_2/H_∞ 控制器的更小.这表明这三种控制器按表 1 从上到下的顺序,对系统中的不确定性越来越不敏感,即其鲁棒性越来越好.

2) 闭环后中心系统的 $\|z_0\|_2^2$,按表 1 从上到下的顺序,是越来越大,这表明系统鲁棒性的提高,是牺牲了中心系统二次型性能.

3) 中心系统的二次型性能变差,并不表示在有不确定性时,其 H_2 性能也一定会变差.由图 6 可看出,在不确定性达到一定程度时,按表 1 从上到下的顺序,系统的混合 H_2/H_∞ 性能是越来越好的.这表明混合 H_2/H_∞ 控制的 H_2 评价指标 $\|z_0\|_2^2$,随不确定性的变化较小,即 $\|z_0\|_2^2$ 与 $\|\Delta\|_\infty$ 的关系曲线,用混合 H_2/H_∞ 控制器要比其他两种控制器平缓.

4) 按表 1 从上到下的顺序,从综合性能来看是越来越好的,但性能的提高是通过增加控制器增益得到的.由表 1 可看出, H_2 , H_∞ 、混合 H_2/H_∞ 控制的

反馈增益阵逐次增大,特别是 L 阵,其变化更明显.

5) 对系统控制而言,控制成本与控制性能总是问题的两个对立面.混合 H_2/H_∞ 控制可得到较好的综合控制性能,但控制器增益较大.在实际系统控制中,大增益会带来许多其他方面的问题,如大增益系统不易实现、易带来非线性问题.因此,在实际系统控制中,采用何种控制器,应根据实际需要来确定,不能一味追求某一方面的性能.

通过计算也表明,本文给出的混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器设计方法是有效的.

表1 控制器的增益阵

Table 1 Gain matrix of controller

	F	L^T	$G_{z_1 u_1, \infty}$	$z_0 \ \frac{z}{s}$
H_2	[1.0000, 1.4142]	[1.4142, 1.0000]	5.3493	2.8284
H_∞	[1.1429, 1.8952]	[3.9799, 3.2000]	3.7115	15.8763
H_2/H_∞	[1.1604, 1.8831]	[6.8938, 5.8910]	3.4218	62.6194

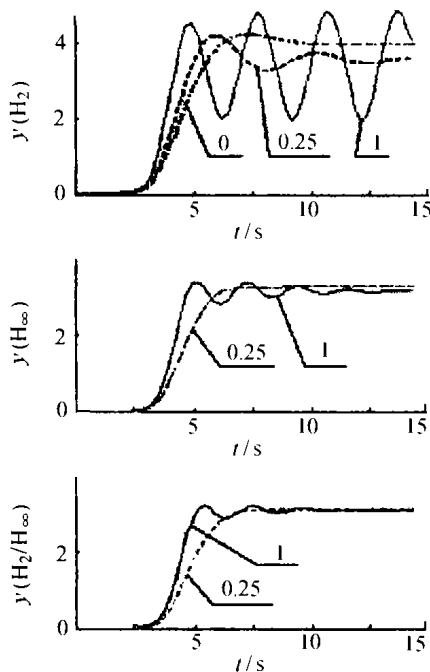


图6 系统的响应曲线

Fig. 6 Curve of system response

8 结论(Conclusions)

文中给出了4种混合 H_2/H_∞ 控制的典型系统,这4种典型系统是 H_2 和 H_∞ 控制典型系统的推广.这4种典型系统的控制器设计,也与 H_2 和 H_∞ 控制相似,仅需解一个 Riccati 方程.但是这个 Riccati 方程带有参数,求解过程需要对这个参数寻优.

混合 H_2/H_∞ 控制系统,可分解为一个内矩阵与一个输出估计系统.混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器,可通过这种分解,由典型系统的控制器设计方法得到.混合 H_2/H_∞ 输出反馈控制器也有状态反馈与输出估计的分离结构,其参数化控制器表达式可通过解两个带参数的 Riccati 方程得到.不论是对典型系统还是对输出反馈系统,本文给出的混合 H_2/H_∞ 控制器,随着参数的变化,包含了 H_2 和 H_∞ 控制的情形,可看作是 H_2 , H_∞ 和混合 H_2/H_∞ 控制的统一表达式.最后,通过一个简单的例子,说明本文的控制器设计方法相对简单、易行,简化了现有的混合 H_2/H_∞ 控制器设计方法.

参考文献(References):

- [1] BERNSTEIN D S, HADDAD W M. LQG control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(3):293–305.
- [2] ZHOU K, GLOVER K, BODENHEIMER B, et al. Mixed H_2 and H_∞ performance objectives I: robust performance analysis [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(8):1564–1574.
- [3] DOYLE J, ZHOU K, GLOVER K, et al. Mixed H_2 and H_∞ performance objectives II: robust performance analysis [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(8):1575–1587.
- [4] KHARGONEKAR P P, ROTEA M A. Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(7):824–837.
- [5] PAGANINI F. Frequency domain conditions for robust H_2 performance [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1):38–49.
- [6] PAGANINI F. Convex methods for robust H_2 analysis of continuous-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(2):239–252.
- [7] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P P, et al. Francis, state-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8):831–847.
- [8] STOORVOGEL A A. The robust H_2 control problem: a worst case design [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(9):1358–1370.
- [9] SCHERER C W. Multi-objective H_2/H_∞ control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(6):1054–1062.
- [10] 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京:清华大学出版社, 1996:1–295.
(SHEN Tielong. *H_\infty Control Theory and Its Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.)

作者简介:

王进华 (1963—),男,副教授.2001年毕业于西北工业大学自动控制系,获工学博士学位.主要研究方向:非线性系统, H_∞ 控制,鲁棒控制.
E-mail: jinhua-wang@263.net.