

MIMO 离散时间系统混合 l_1/H_2 控制

李昇平

(汕头大学 机械电子工程系, 广东 汕头 515063)

摘要: 研究了 MIMO (多输入多输出) 离散时间系统的混合 l_1/H_2 优化问题, 该问题可描述为最优化一个传递函数矩阵的 l_1 范数同时保证另一个传递函数矩阵的 H_2 范数满足预定的指标. 研究了最优目标函数值关于 H_2 范数指标的连续性. 证明了 MIMO 系统混合 l_1/H_2 控制问题最优解的存在性. 由于基于标度-Q (scaled-Q) 方法求解 MIMO 混合 l_1/H_2 问题, 避免了进行零点插值运算的困难. 通过求解有限维非线性规划问题可得到最优目标值的收敛的上下界.

关键词: MIMO 系统; 离散时间系统; 混合 l_1/H_2 优化

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Mixed l_1/H_2 control for MIMO discrete-time systems

LI Sheng-ping

(Department of Mechantronics Engineering, Shantou University, Guangdong Shantou 515063, China)

Abstract: The mixed l_1/H_2 optimization problem for MIMO discrete-time systems was presented. This problem was formulated as minimizing the l_1 -norm of a closed-loop transfer matrix while maintaining the H_2 -norm of another closed-loop transfer matrix at prescribed index. The existence of the optimal solutions of mixed l_1/H_2 problem is proved. A solving method of the mixed l_1/H_2 problem was given based on the scaled-Q method. A numeric simulation example indicated the effectiveness of the method.

Key words: MIMO system; discrete-time systems; mixed l_1/H_2 optimization

1 引言 (Introduction)

在很多控制工程实际中, 要求设计控制器同时满足几个性能指标, 这些性能指标常常是不相容的, 优化其中一个性能会降低其他性能. 因此多目标控制问题引起了人们的关注.

随着选取信号度量范数的不同, 系统的性能用闭环传递函数的相应的诱导范数进行描述, 形成了不同的优化控制问题. H_2 , l_1 和 H_∞ 范数常用来作为系统的性能度量, 相应地产生了 H_2 , l_1 和 H_∞ 控制. 这些以单个度量指标优化作为设计目标的优化控制理论在过去的 20 年中得到了广泛的研究. 值得强调的是, 针对某一种范数性能的优化往往会导致另一种范数性能变坏^[1]. 解决这个问题的一个自然的想法是在优化一种范数性能的同时使得其他的范数性能满足预定的指标, 这导致了对混合性能优化控制问题的研究. 一类重要的混合控制问题为 H_2/H_∞ 控制^[2], 其目标是在优化闭环传递函数 (如灵敏度函

数) 的 H_2 范数的同时保证相应传递函数的 H_∞ 范数满足预定的指标. 另一类混合控制问题是以闭环传递函数的混合 H_2 和 l_1 范数为性能指标的优化控制问题, 这类问题包括: H_2/l_1 控制^[3~6] 和 l_1/H_2 控制^[7,8]. 在 l_1/H_2 控制方面, 文献[7]对单输入单输出 (SISO) 离散时间系统提出了混合 l_1/H_2 控制方法, 在优化某闭环传递函数 l_1 范数的同时保证同一闭环传递函数的 H_2 范数满足预定的指标. 文献[8]对 SISO 离散时间系统提出了混合不同闭环传递函数的 l_1 和 H_2 范数的 l_1/H_2 控制方法, 考虑不同闭环传递函数的混合控制是有意义的, 这使得作者可以考虑诸如以鲁棒稳定性和扰动抑制为性能的多目标控制问题. 但文献[8]限于处理单变量系统, 只给出了混合优化问题的次优解因而不能估计次优解对最优解的逼近程度.

本文研究 MIMO 系统的混合 l_1/H_2 控制问题, 该问题可描述为最优化一个传递函数矩阵的 l_1 范数

同时保证另一个传递函数矩阵的 H_2 范数满足预定的指标的多目标控制问题. 利用标定-Q (scaled-Q) 方法^[9]引入一个辅助优化问题代替原问题进行求解. 避免了零点插值条件引起的困难. 证明了 MIMO 系统混合 l_1/H_2 控制问题最优解的存在性. 在此基础上, 通过截断处理构造有限维次优问题和超最优问题分别从上下两方向分别逼近最优目标值, 从而可确定次优目标值以任意精度逼近最优目标值.

本文用到下列记号:

$\hat{x}(\lambda)$: 单边实序列 $x = (x(k))_{k=0}^{\infty}$ 的 λ -变换, 定义为 $\hat{x}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\lambda^k$, 下文中记 $\hat{x}$ 为 x 的 λ -变换, 并约定 $\hat{x}$ 的范数取相应的 x 的范数.

l_1 : 单边绝对和有界的实序列构成的线性赋范空间, 范数定义为 $\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|$.

$l_1^{m \times n}$: 单边实矩阵序列构成的线性赋范空间, 范数定义为 $\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n \|x_{ij}\|_1$, x_{ij} 为矩阵 (x_{ij}) 的 i -th 行 j -th 列的元素.

l_2 : 单边有界的实序列构成的线性赋范空间, 范数定义为 $\|x\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} [\sum_{k=0}^{\infty} x(k)^2]^{1/2}$.

$l_2^{m \times n}$: 单边实矩阵序列构成的线性赋范空间, 范数定义为 $\|x\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} [\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|x_{ij}\|_2^2]^{1/2}$.

H_2 : λ -变换下 l_2 的象空间, 范数定义为 $\|\hat{x}(\lambda)\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_2$, 因 λ -变换为同构映射, H_2 与 l_2 等距同构.

T_N : 定义在序列空间上的 N 阶截断算子, $T_N(x(0), x(1), x(2), \dots) = (x(0), x(1), \dots, x(N), 0, \dots)$.

2 问题描述 (Problem statement)

考虑图 1 所示系统, w_1, w_2 为输入向量, z_1, z_2 为输出向量; G 为被控对象, 控制器 C 基于量测 y 确定控制律 u . 令 $n_{w_1}, n_{w_2}, n_{z_1}, n_{z_2}, n_y, n_u$ 分别表示 w_1, w_2, z_1, z_2, y, u 的维数. 控制器设计的目标是: 在闭环系统稳定的条件下使持续信号 w_1 对 z_1 的幅值影响最小, 同时保证白噪声信号 w_2 对 z_2 的方差影响满足预定的性能指标. 如果 w_1 和 z_1 之间连接了系统的模型摄动 Δ , Δ 的 l_1 范数有界, 与上述设计目标等价的问题是: 在保证白噪声信号 w_2 对 z_2 的方差影响满足预定的性能指标使系统对 Δ 具有最优鲁棒稳定性.

用 Youla 参数化方法^[1]设计镇定控制器 C , 则所有从 $(w_1^T w_2^T)^T$ 到 $(z_1^T z_2^T)^T$ 的稳定闭环传递矩阵均可写成如下一般形式^[1]:

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} \hat{Q} [\hat{V}_1 \quad \hat{V}_2].$$

式中: $\hat{x}$ 表示 x 的 λ 变换 (下文总采用此约定), $H_{ij} \in l_1^{n_i \times n_j}$ ($i, j = 1, 2$), $Q \in l_1^{n_u \times n_y}$, $\hat{U}_i$ 和 $\hat{V}_i$ 为多项式矩阵 ($i = 1, 2$), 其维数由 H_{ij} 和 Q 确定. 定义

$$\zeta(\gamma) = \{Q \mid \|H_{22} - U_2 * Q * V_2\|_2 \leq \gamma, Q \in l_1^{n_u \times n_y}\}, \quad (1)$$

$$\gamma_0 = \inf_{Q \in l_1^{n_u \times n_y}} \|H_{22} - U_2 * Q * V_2\|_2. \quad (2)$$

控制器的设计目标归结为如下混合 l_1/H_2 控制问题:

$$\mu(\gamma) = \inf_{Q \in \zeta(\gamma)} \|H_{11} - U_1 * Q * V_1\|_1. \quad (3)$$

显然问题(3)仅当 $\gamma_0 < \gamma < \infty$ 才有意义, 下文总假设该条件成立. 对被控对象作如下假设:

假设 1 $\hat{U} = [\hat{U}_1^T \quad \hat{U}_2^T]^T$ 和 $\hat{V} = [\hat{V}_1 \quad \hat{V}_2]$ 均不含单位圆上零点.

假设 2 列满秩, $\hat{V}_1$ 行满秩.

假设 3 H_2 问题(2)存在最优解, 记为 Q_0 .

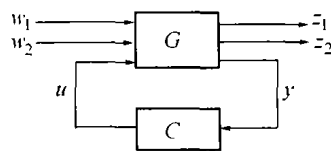


图 1 闭环系统

Fig. 1 Closed-loop system

3 辅助优化问题 (Auxiliary optimization problem)

文献[9]表明, 引入一个辅助优化问题来处理 4 块 l_1 优化问题可避免繁琐的零点插值运算. 为避免直接求解混合 l_1/H_2 控制问题(3)时遇到的零点插值运算的困难, 本文利用相同的方法, 定义问题(3)的辅助问题如下:

$$\nu(\gamma) = \inf_{\substack{Q \in \zeta(\gamma) \\ \|Q\|_1 \leq \beta}} \|H_{11} - U_1 * Q * V_1\|_1. \quad (4)$$

式中, β 为适当选取的正的常数.

在第 5 节中将用问题(4)代替问题(3)进行求解. 下面的定理揭示了问题(4)与问题(3)的关系.

定理 1 假设 $\mu(\gamma) < \infty$, 则存在常数 $M > 0$, 使得问题(4)中取 $\beta \geq M$ 时有 $\nu(\gamma) = \mu(\gamma)$.

证 考虑问题(3), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $Q_{\text{sub}} \in \zeta(\gamma)$ 使得

$$\|H_{11} - U_1 * Q_{\text{sub}} * V_1\|_1 < \mu(\gamma) + \varepsilon. \quad (5)$$

记 $R_{\text{sub}} = H_{11} - U_1 * Q_{\text{sub}} * V_1$,

由假设 2 可知 $\hat{U}_1$ 和 $\hat{V}_1$ 分别存在左逆和右逆, 分别记为 $(\hat{U}_1)^{-l}$ 和 $(\hat{V}_1)^{-r}$, 则

$$\hat{Q}_{\text{sub}} = (\hat{U}_1)^{-l}(\hat{H}_{11} - R_{\text{sub}})(\hat{V}_1)^{-r}.$$

由假设 1 可知 $(\hat{U}_1)^{-l}$ 和 $(\hat{V}_1)^{-r}$ 不含单位圆上极点. 令 $(\hat{U}_1)^{-l}$ 和 $(\hat{V}_1)^{-r}$ 分别为 $(\hat{U}_1)^{-l}$ 和 $(\hat{V}_1)^{-r}$ 的双边逆 λ -变换, 可知 $(\hat{U}_1)^{-l}, (\hat{V}_1)^{-r} \in l_1(D)$, 其中 $l_1(D)$ 为双边绝对可加序列空间. 因此

$$\begin{aligned} \|Q_{\text{sub}}\|_1 &= \|\hat{Q}_{\text{sub}}\|_1 = \|(\hat{U}_1)^{-l}(\hat{H}_{11} - \hat{R}_{\text{sub}})(\hat{V}_1)^{-r}\|_1 \leq \\ &\|(U_1)^{-l}\|_{l_1(D)} \|(\hat{V}_1)^{-r}\|_{l_1(D)} (\|H_{11}\|_1 + \mu(\gamma) + \varepsilon). \end{aligned} \quad (6)$$

最后一个不等式由式(5)得到. 因 $\mu(\gamma) < \infty$, 由式(6)可知存在 $M > 0$ 使得 $\|Q_{\text{sub}}\|_1 < M$.

今在问题(4)中取 $\beta \geq M$, 则 $\|Q_{\text{sub}}\|_1 < \beta$. 这表明 Q_{sub} 为优化问题(4)的可行解, 因此 $\nu(\gamma) \leq \|H_{11} - U_1 * Q_{\text{sub}} * V_1\|_1$, 结合式(5)可知 $\nu(\gamma) < \mu(\gamma) + \varepsilon$. 又由于问题(4)是由问题(3)增加约束所得, 显然有 $\mu(\gamma) \leq \nu(\gamma)$. 故 $\mu(\gamma) \leq \nu(\gamma) < \mu(\gamma) + \varepsilon$. 由 ε 的任意性可知 $\nu(\gamma) = \mu(\gamma)$.

注 1 定理 1 中 M 可由式(6)右端进行估计. 具体做法如下: 先分别由 $\hat{U}_1$ 和 $\hat{V}_1$ 的状态空间描述计算 $(U_1)^{-l}$ 和 $(V_1)^{-r}$, 再估算 $\|(U_1)^{-l}\|_{l_1(D)}$ 和 $\|(\hat{V}_1)^{-r}\|_{l_1(D)}$ 的上界; ε 取 1 或较大的数并计算 $\|H_{11}\|_1, \mu(\gamma)$ 的一个上界可取为 $\|H_{11} - U_1 * Q_0 * V_1\|_1$, 其中 Q_0 满足假设 3.

注 2 易知问题(3)的约束集包含问题(4)的约束集. 因此由定理 1, 问题(4)的最优解(问题(4)最优解的存在性将在第 5 节中证明)即为问题(3)的最优解.

4 辅助优化问题目标函数 $\nu(\gamma)$ 的连续性 (Continuity of the objective function $\nu(\gamma)$ of auxiliary optimization problem)

本节研究优化问题(4)的目标函数 $\nu(\gamma)$ 关于 γ 的连续性. 按照第 3 节的方法确定一个 M . 取 $\beta > \max\{M, \|Q_0\|_1\}$ (其中 Q_0 满足假设 3), 定义集合 $\zeta_0 = \{Q \in l_1^{n \times n} \mid \|Q\|_1 \leq \beta\}$, 显然, $Q_0 \in \zeta_0$. 则辅助优化问题(4)又可写成

$$\nu(\gamma) = \inf_{Q \in \zeta(\gamma) \cap \zeta_0} \|H_{11} - U_1 * Q * V_1\|_1. \quad (7)$$

引理 1 任意给定 γ_1, γ_2 满足 $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \infty$, 其中 γ_0 由式(2)给出, 则 $0 \leq \nu(\gamma_1) - \nu(\gamma_2) \leq 2\beta \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_0}$.

证 令 $\rho = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_0}$, 显然 $0 < \rho < 1$. 任取 $Q_2 \in \zeta(\gamma_2) \cap \zeta_0$, 定义 $Q_1 = \rho Q_0 + (1 - \rho) Q_2$. 因

$\zeta(\gamma_2) \cap \zeta_0$, 定义 $Q_1 = \rho Q_0 + (1 - \rho) Q_2$. 因

$$\|H_{22} - U_2 * Q_1 * V_2\|_2 =$$

$$\|\rho H_{22} + (1 - \rho) H_{22} - U_2 * (\rho Q_0 + (1 - \rho) Q_2) * V_2\|_2 \leq$$

$$\rho \|H_{22} - U_2 * Q_0 * V_2\|_2 +$$

$$(1 - \rho) \|H_{22} - U_2 * Q_2 * V_2\|_2 \leq$$

$$\rho \gamma_0 + (1 - \rho) \gamma_2 = \gamma_1.$$

上式表明 $Q_1 \in \zeta(\gamma_1)$. 又容易验证集合 ζ_0 是凸的, 即 $Q_1 \in \zeta_0$. 故 $Q_1 \in \zeta(\gamma_1) \cap \zeta_0$, 即 Q_1 为优化问题 $\nu(\gamma_1)$ 的可行解. 因此有

$$\nu(\gamma_1) - \|H_{11} - U_1 * Q_2 * V_1\|_1 \leq$$

$$\|H_{11} - U_1 * Q_1 * V_1\|_1 - \|H_{11} - U_1 * Q_2 * V_1\|_1 \leq$$

$$\|U_1 * (Q_1 - Q_2) * V_1\|_1 \leq \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 \|Q_1 - Q_2\|_1, \quad (8)$$

又

$$\|Q_1 - Q_2\|_1 =$$

$$\|\rho(Q_0 - Q_2)\|_1 \leq \rho(\|Q_0\|_1 + \|Q_2\|_1) \leq 2\beta\rho. \quad (9)$$

结合式(8)和式(9), 得

$$\nu(\gamma_1) - \|H_{11} - U_1 * Q_2 * V_1\|_1 \leq$$

$$2\beta \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_0}.$$

因 Q_2 为 $\zeta(\gamma_2) \cap \zeta_0$ 中任意元素, 故

$$\nu(\gamma_1) - \nu(\gamma_2) =$$

$$\nu(\gamma_1) - \inf_{Q_2 \in \zeta(\gamma_2) \cap \zeta_0} \|H_{11} - U_1 * Q_2 * V_1\|_1 \leq$$

$$2\beta \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_0}.$$

另外, 由 $\zeta(\gamma_1) \cap \zeta_0 \subseteq \zeta(\gamma_2) \cap \zeta_0$ 可知, $\nu(\gamma_1) \geq \nu(\gamma_2)$.

证毕.

定理 2 对任意 $\gamma > \gamma_0$, $\nu(\gamma)$ 是 γ 的连续函数.

证 对任意 $\varepsilon > 0$, 在区间 $(0, \gamma - \gamma_0)$ 中存在 δ 使得 $0 < \delta < \frac{\gamma - \gamma_0}{2\beta \|U_1\|_1 \|V_1\|_1} \varepsilon$. 由引理 1 可有

$$0 \leq \nu(\gamma) - \nu(\gamma + \delta) \leq$$

$$2\beta \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 \frac{\delta}{\gamma + \delta - \gamma_0} <$$

$$2\beta \|U_1\|_1 \|V_1\|_1 \frac{\delta}{\gamma - \gamma_0} < \varepsilon.$$

同理, $0 \leq \nu(\gamma - \delta) - \nu(\gamma) < \varepsilon$. 由此可知, $\nu(\gamma)$ 是

γ 的连续函数. 证毕.

5 混合 l_1/H_2 问题的近似求解方法 (Approximative solution approach of mixed l_1/H_2 problem)

上一节的分析表明, 本文可以用辅助问题(4)来代替原问题(3)进行求解. 但是, 问题(4)是一个无穷维凸规划问题, 难以直接求解. 下面, 本文构造问题(4)的有限维次优问题使得次优目标值从“上”逼近问题(4)的最优目标值, 同时构造有限维超最优问题使得超最优目标值从“下”逼近问题(4)的最优目标值, 由此可以估计次优值对最优值的逼近程度.

5.1 有限维超最优问题 (Finite dimensional super-optimization problem)

构造如下有限维优化问题:

$$\begin{aligned} \nu_N(\gamma) = \inf \quad & \|T_N(H_{11} - U_1 * Q * V_1)\|_1 \quad (10) \\ \text{s.t.} \quad & \|T_N(H_{22} - U_2 * Q * V_2)\|_2 \leq \gamma, \\ & \|Q\|_1 \leq \beta, \\ & Q(k) = 0, \quad k > N. \end{aligned}$$

式中 β 同辅助问题(4). 问题(10)为有限维非线性规划问题, 其中 $\|T_N(H_{11} - U_1 * Q * V_1)\|_1$ 和 $\|Q\|_1$ 可利用文献[10]提出的方法, 通过引入松弛变量化为线性函数, 问题(10)的求解过程将在算例中给出.

定理 3 对于问题(10)与辅助问题(4), 对任意 N 有 $\nu_N(\gamma) \leq \nu_{N+1}(\gamma) \leq \nu(\gamma)$.

证 定义优化问题

$$\pi_N(\gamma) = \inf_{Q \in l_1^{u \times n}} \|T_N(H_{11} - U_1 * Q * V_1)\|_1 \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad \|T_N(H_{22} - U_2 * Q * V_2)\|_2 \leq \gamma, \\ \|Q\|_1 \leq \beta.$$

令 Q_{N+1} 为 $\pi_{N+1}(\gamma)$ 的最优解, 由

$$\begin{aligned} \|T_N(H_{22} - U_2 * Q_{N+1} * V_2)\|_2 &\leq \\ \|T_{N+1}(H_{22} - U_2 * Q_{N+1} * V_2)\|_2 &\leq \gamma \end{aligned}$$

可知 Q_{N+1} 为 $\pi_N(\gamma)$ 的可行解. 于是

$$\begin{aligned} \pi_N(\gamma) &\leq \|T_N(H_{11} - U_1 * Q_{N+1} * V_1)\|_1 \leq \\ \|T_{N+1}(H_{11} - U_1 * Q_{N+1} * V_1)\|_1 &= \pi_{N+1}(\gamma), \end{aligned}$$

即 $\pi_N(\gamma) \leq \pi_{N+1}(\gamma)$. 因为

$$\begin{aligned} \|T_N(H_{22} - U_2 * Q * V_2)\|_2 &\leq \|H_{22} - U_2 * Q * V_2\|_2, \\ \text{所以对任意 } Q \in \zeta(\gamma) \text{ 有 } \|T_N(H_{22} - U_2 * Q * V_2)\|_2 &\leq \gamma. \text{ 综上可得 } \pi_N(\gamma) \leq \pi_{N+1}(\gamma) \\ &\leq \nu(\gamma). \text{ 因此只需证明 } \nu_N(\gamma) = \pi_N(\gamma). \end{aligned}$$

令 Q_N 为式(11)的最优解. 因

$$\|T_N(H_{22} - U_2 * T_N Q_N * V_2)\|_2 =$$

$$\|T_N(H_{22} - U_2 * Q_N * V_2)\|_2 \leq \gamma,$$

及

$$\|T_N Q_N\|_1 \leq \|Q_N\|_1 \leq \beta,$$

可见, $T_N Q_N$ 为问题(10)的可行解. 所以

$$\begin{aligned} \nu_N(\gamma) &\leq \|T_N(H_{11} - U_1 * T_N Q_N * V_1)\|_1 = \\ \|T_N(H_{11} - U_1 * T_N Q_N * V_1)\|_1 &= \pi_N(\gamma). \end{aligned}$$

另一方面, 比较问题(10)和问题(11)显然有 $\pi_N(\gamma) \leq \nu_N(\gamma)$, 故 $\nu_N(\gamma) = \pi_N(\gamma)$. 证毕.

下面利用超最优问题证明辅助问题(4)的最优解的存在性, 并且证明随着截断阶数 N 增大 $\nu_N(\gamma)$ 逼近 $\nu(\gamma)$.

定理 4 若辅助问题(4)的约束集非空, 则辅助问题(4)存在最优解, 并且 $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N(\gamma) = \nu(\gamma)$.

证 令 $\{Q_N\}$ 为优化问题(10)当 N 从 0 到 ∞ 的解序列. 对任意 N 有 $\|Q_N\|_1 \leq \beta$. 根据巴拿赫-阿劳格鲁定理^[11], 存在 $\{Q_N\}$ 的子列 $\{Q_{N_i}\}$ 弱星收敛于 Q_w , 且

$$\|Q_w\|_1 \leq \beta. \quad (12)$$

由此可得 $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_{N_i}(k) = Q_w(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. 进一步有 $\lim_{i \rightarrow \infty} T_N(U_2 * Q_{N_i} * V_2) = T_N(U_2 * Q_w * V_2)$. 又, 对任意 N 及 $N_i > N$ 有 $\|T_N(H_{22} - U_2 * Q_{N_i} * V_2)\|_2 \leq \gamma$, 所以 $\|T_N(H_{22} - U_2 * Q_w * V_2)\|_2 \leq \gamma$. 再由 N 的任意性有

$$\|H_{22} - U_2 * Q_w * V_2\|_2 \leq \gamma. \quad (13)$$

式(12)和式(13)表明 Q_w 为辅助问题(4)的可行解. 此外, 由定理 3 可知, 对任意 N 及 $N_i > N$,

$$\|T_N(H_{11} - U_1 * Q_{N_i} * V_1)\|_1 \leq$$

$$\|T_{N_i}(H_{11} - U_1 * Q_{N_i} * V_1)\|_1 \leq \nu(\gamma).$$

由 N 及 $N_i > N$ 的任意性可知 $\|H_{11} - U_1 * Q_w * V_1\|_1 \leq \nu(\gamma)$, 故 Q_w 为辅助问题(4)的最优解, 即

$$\|H_{11} - U_1 * Q_w * V_1\|_1 = \nu(\gamma).$$

另外, 对任意 N 及 $N_i > N$, 有

$$\|T_N(H_{11} - U_1 * Q_{N_i} * V_1)\|_1 \leq$$

$$\|T_{N_i}(H_{11} - U_1 * Q_{N_i} * V_1)\|_1 = \nu_{N_i}(\gamma).$$

于是, $\|T_N(H_{11} - U_1 * Q_w * V_1)\|_1 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \nu_{N_i}(\gamma)$.

上式由 N 的任意性有 $\nu(\gamma) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \nu_{N_i}(\gamma)$. 再由定理 3 有 $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu_{N_i}(\gamma) \leq \nu(\gamma)$, 即 $\nu(\gamma) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \nu_{N_i}(\gamma) \leq \nu(\gamma)$. 再由 $\{\nu_N\}$ 的单调性, 得 $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N(\gamma) = \nu(\gamma)$.

证毕.

注3 由定理3和定理4,可以用有限维超最优问题(10)的最优目标值从“下”逼近问题(4)的最优目标值.此外,结合注2可直接证明混合 l_1/H_2 优化问题(3)最优解的存在性.

5.2 有限维次优问题 (Finite dimensional sub-optimization problem)

定义辅助问题(4)的近似问题:

$$\begin{aligned} \nu^N(\gamma) = \inf_{\substack{Q \in \mathcal{Z}(\gamma) \\ Q^{-1} \leq \beta}} \|H_{11} - U_1 * Q * V_1\|_1 \\ \text{s.t. } Q(k) = Q, k > N. \end{aligned} \quad (14)$$

问题(14)为有限维非线性规划问题,同问题(10)一样,其中 l_1 范数可通过引入松弛变量化为线性函数.求解过程将在算例中给出.

定理5 辅助问题(4)的近似问题(14),对所有 $N \geq 0$, 满足 $\nu^N(\gamma) \geq \nu^{N+1}(\gamma) \geq \nu(\gamma)$, 且 $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu^N(\gamma) = \nu(\gamma)$.

证 比较上述问题与辅助问题(4)可知,问题(14)为问题(4)增加约束 $Q(k) = 0, k > N$ 所得,并且 N 越大增加的约束个数越少,因此 $\nu^N(\gamma) \geq \nu^{N+1}(\gamma) \geq \nu(\gamma)$.

根据定理2,当 $\gamma > \gamma_0$ 时, $\nu(\gamma)$ 是 γ 的连续函数,所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, \gamma - \gamma_0)$ 使得

$$0 \leq \nu(\gamma - \delta) - \nu(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

设 $Q_{\gamma-\delta}$ 为辅助优化问题 $\nu(\gamma - \delta)$ 的最优解,则

$$\|H_{11} - U_1 * Q_{\gamma-\delta} * V_1\|_1 = \nu(\gamma - \delta), \quad (16)$$

$$\|H_{22} - U_2 * Q_{\gamma-\delta} * V_2\|_2 \leq \gamma - \delta, \quad (17)$$

以及 $\|Q_{\gamma-\delta}\|_1 \leq \beta$. 由于 $Q_{\gamma-\delta} \in l_1^{n_u \times n_y}$, 存在足够大的 L 当 $N \geq L$ 时,由式(16)、(17)可得

$$|\|H_{11} - U_1 * (T_N Q_{\gamma-\delta}) * V_1\|_1 - \nu(\gamma - \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &|\|H_{22} - U_2 * (T_N Q_{\gamma-\delta}) * V_2\|_2 - \\ &\|H_{22} - U_2 * Q_{\gamma-\delta} * V_2\|_2| < \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(15)和(18)得

$$\|H_{11} - U_1 * (T_N Q_{\gamma-\delta}) * V_1\|_1 - \nu(\gamma) < \varepsilon. \quad (20)$$

由式(17)和式(19)得

$$\|H_{22} - U_2 * (T_N Q_{\gamma-\delta}) * V_2\|_2 \leq \gamma - \frac{\delta}{2},$$

进一步写成

$$\|H_{22} - U_2 * (T_N Q_{\gamma-\delta}) * V_2\|_2 \leq \gamma.$$

又 $\|Q_{\gamma-\delta}\|_1 \leq \beta$ 意味着 $\|T_N Q_{\gamma-\delta}\|_1 \leq \beta$. 综上所述, $T_N Q_{\gamma-\delta}$ 为问题(14)的可行解,并且由式(20)可

得 $\nu^N(\gamma) - \nu(\gamma) < \varepsilon$. 由 ε 任意性, $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu^N(\gamma) = \nu(\gamma)$. 证毕.

注4 由于 $\nu^N(\gamma) \geq \nu(\gamma)$, 称问题(14)为辅助问题(4)的次优问题,也为混合 l_1/H_2 问题(3)的次优问题. $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu^N(\gamma) = \nu(\gamma) = \mu(\gamma)$ 意味着可用次优目标值从“上”逼近混合 l_1/H_2 问题的最优目标值. 问题(14)的解为辅助问题的可行解,因此可作为混合 l_1/H_2 优化问题的次优解.

6 算例 (Example)

考虑图1所示闭环系统,其中被控对象由下式给出:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\lambda) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} & \hat{G}_{13} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} & \hat{G}_{23} \\ \hat{G}_{31} & \hat{G}_{32} & \hat{G}_{33} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda-0.5)(\lambda+0.4)} & \frac{\lambda}{\lambda-0.5} & \frac{\lambda(\lambda-0.8)}{-0.4\lambda+1} \\ \frac{\lambda(\lambda+0.6)}{-0.5\lambda+1} & \frac{4\lambda}{-0.5\lambda+1} & \frac{\lambda(\lambda-0.9)}{-0.9\lambda+1} \\ \frac{\lambda(-0.4\lambda+1)}{\lambda-0.5} & \frac{\lambda(\lambda-0.8)}{\lambda-0.7} & \lambda(-2\lambda+1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

令 $\hat{N}, \hat{D}, \hat{X}, \hat{Y}$ 为 $\hat{G}_{11}$ 的互质分解,即 $\hat{G}_{11} = \hat{N}\hat{D}^{-1}$, $\hat{N}\hat{X} + \hat{D}\hat{Y} = 1$. 由 Youla 参数化方法,镇定控制器为 $\hat{C} = (\hat{X} + \hat{D}\hat{Q})(\hat{Y} - \hat{N}\hat{Q})^{-1}$. 因此, w_1 到 z_1 和 w_2 到 z_2 的闭环传递函数分别为

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11} - \hat{Q}\hat{V}_1 &= \hat{G}_{22} - \hat{G}_{21}\hat{C}(1 + \hat{G}_{11}\hat{C})^{-1}\hat{G}_{12} = \\ &(\hat{G}_{22} - \hat{G}_{21}\hat{D}\hat{X}\hat{G}_{12}) - \hat{Q}(\hat{G}_{21}\hat{D}^2\hat{G}_{12}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \hat{H}_{22} - \hat{Q}\hat{V}_2 &= \hat{G}_{33} - \hat{G}_{31}\hat{C}(1 + \hat{G}_{11}\hat{C})^{-1}\hat{G}_{13} = \\ &(\hat{G}_{33} - \hat{G}_{31}\hat{D}\hat{X}\hat{G}_{13}) - \hat{Q}(\hat{G}_{31}\hat{D}^2\hat{G}_{13}). \end{aligned}$$

代入参数得

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11} &= (-0.5\lambda + 1)^{-1}(1.3125\lambda^6 - 1.5687\lambda^5 - \\ &2.0537\lambda^4 - 0.1790\lambda^3 + 0.123\lambda^2 + 4\lambda), \\ \hat{H}_{22} &= -2.625\lambda^5 + 1.5625\lambda^4 + 0.635\lambda^3 - 2.164\lambda^2 + \lambda, \\ \hat{V}_1 &= \lambda^6 - 0.9\lambda^5 - 0.06\lambda^4 - 0.224\lambda^3 - 0.048\lambda^2, \\ \hat{V}_2 &= \lambda^6 - 0.5\lambda^5 - 0.48\lambda^4 + 0.112\lambda^3 + 0.064\lambda^2, \\ \hat{U}_1 &= 1, \hat{U}_2 = 1. \end{aligned}$$

为简便起见,记 $\Phi_1 = H_{11} - U_1 * Q * V_1, \Phi_2 = H_{22} - U_2 * Q * V_2$. 为了将 l_1 范数化为线性函数,引入松弛变量: $\phi_1^+(k), \Phi_1^-(k), Q^+(k), Q^-(k)$.

利用文献[10]提出的方法,超最优问题(10)可写成如下有限维非线性规划问题:

$$\nu_N(\gamma) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^N [\Phi_1^+(k) + \Phi_1^-(k)] \right\},$$

$$\text{s.t. } \Phi_1^+(k) - \Phi_1^-(k) =$$

$$H_{11}(k) - \sum_{j=0}^N [Q^+(j) - Q^-(j)] V_1(k-j),$$

$$\Phi_2(k) =$$

$$H_{22}(k) - \sum_{j=0}^N [Q^+(j) - Q^-(j)] V_2(k-j),$$

$$\sum_{j=0}^N [\Phi_2(j)]^2 \leq \gamma^2, \sum_{j=0}^N [Q^+(j) + Q^-(j)] \leq \beta,$$

$$\Phi_1^+(k) \geq 0, \Phi_1^-(k) \geq 0,$$

$$Q^+(k) \geq 0, Q^-(k) \geq 0,$$

$$k = 0, 1, \dots, N.$$

同理,可将次优问题(14)写成有限维非线性规划问题.

求解二次规划问题(2)得 $\gamma_0 = 3.5822$. 在混合 l_1/H_2 问题中为满足 $\gamma > \gamma_0$ 取 $\gamma = 5$. 上述非线性规划问题取 $\beta = 10^4$ 并代入参数,对 $N = 0, 1, 2, \dots$ 分别求解这些优化问题,得 $\nu_N(5)$ 和 $\nu^1(5)$ 如表1所示.

表1表明,随着截断阶数 N 的增加,混合 l_1/H_2 问题的超最优值和次优值分别从“下”“上”两个方向单调逼近最优值.当 $N = 14$ 时,可估计混合 l_1/H_2 问题的最优值 $\nu(5)$ 的范围: $10.5699 \leq \nu(5) \leq 10.5772$.

上述结果的计算过程是用 Matlab 5.1 及优化工具箱实现的.

表1 超最优问题和次优问题的计算结果

Table 1 Calculation results of the superoptimal and suboptimal problem

N	0	1	2	3
$\nu_N(\gamma)$	0	0.0000	4.0000	5.0157
$\nu^1(\gamma)$	10.9943	10.6244	10.6153	10.5906
N	4	5	6	7
$\nu_N(\gamma)$	5.6927	5.8038	5.9013	6.5171
$\nu^1(\gamma)$	10.5858	10.5809	10.5793	10.5782
N	8	9	10	11
$\nu_N(\gamma)$	6.8180	7.8066	9.4260	10.2944
$\nu^1(\gamma)$	10.5777	10.5775	10.5774	10.5773
N	12	13	14	
$\nu_N(\gamma)$	10.5222	10.5487	10.5699	
$\nu^1(\gamma)$	10.5773	10.5772	10.5772	

7 结论(Conclusion)

本文研究了 MIMO 离散时间系统最优化一个

传递矩阵的 l_1 范数的同时保证另一个传递矩阵的 H_2 范数满足预定指标的混合 l_1/H_2 控制问题.证明了混合 l_1/H_2 控制问题最优解的存在性和最优目标函数值关于 H_2 指标的连续性.为了避免直接求解混合 l_1/H_2 问题时必须进行的零点插值运算,本文引入了一个辅助优化问题代替原问题.只需解有限维凸规划问题便可得到最优目标值的收敛的上下界,从而能以预定精度确保次优值逼近最优值.

参考文献(References):

- [1] DAHLEH M A, DIAZ-BOBILLO I J. *Control of Uncertain Systems: a Linear Programming Approach* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [2] KAMINAR I, KHARGONEKAR P P, ROTE A M A. Mixed H_2/H_∞ control for discrete-time systems via convex optimization [J]. *Automatica*, 1993, 29(1): 57-70.
- [3] VOULGARIS P G. Optimal H_2/l_1 control via duality theory [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(11): 1881-1888.
- [4] SALAPAKA M V, DAHLEH M, VOULGARIS P G. MIMO optimal control design: the interplay between the H_2 norm and the l_1 norm [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(9): 1374-1388.
- [5] WU J, CHU J. Approximation methods of scalar mixed H_2/l_1 problems for discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(10): 1869-1874.
- [6] SALAPAKA M V, KHAMMASH M, DAHLEH M. Solution of MIMO H_2/l_1 problem without zero interpolation [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1999, 37(9): 1865-1873.
- [7] SALAPAKA M V, DAHLEH M, VOULGARIS P G. Mixed objective control synthesis: optimal l_1/H_2 control [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1997, 35(9): 1672-1689.
- [8] WU J, CHU J. Mixed scalar l_1/H_2 problem for discrete-time systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(6): 910-913.
- [9] KHAMMASH M. A new approach to the solution of the l_1 control problem: the scaled-Q method [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(2): 180-187.
- [10] MENDLOVITZ M A. A simple solution to the optimization problem [J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 12(3): 461-463.
- [11] LUEBERGER G D. *Optimization by Vector Space Methods* [M]. New York: Wiley, 1969.

作者简介:

李昇平 (1966—),男,1995年毕业于华中理工大学自动控制工程系,获得工学博士学位,1997年在东北大学自动控制博士后流动站完成博士后研究出站,现为汕头大学机械电子工程系教授,系主任.感兴趣的研究领域为鲁棒控制,鲁棒辨识,自适应控制,智能控制理论与应用. E-mail: spli@mailserv.stu.edu.cn.