文章编号: 1000-8152(2004)01-0120-05

模糊系统 H_∞ 控制器设计的 LMI 方法

刘晓东[1]，张庆灵[2]

(1.大连海事大学 数理系，辽宁 大连 116024；2.东北大学 理学院，辽宁 沈阳 110004)

摘要：应用LMI(线性矩阵不等式)方法，研究了T-S模糊系统 H_∞ 控制器的设计问题.首先给出了T-S模糊系统基于状态反馈 H_∞ 控制存在的两个新的充分条件.新条件不但简洁而且把模糊子系统间的相互作用表示为由子系统的系数矩阵构成的矩阵不等式.然后新条件被转化为可直接应用Matlab求解的线性矩阵不等式.最后应用线性矩阵不等式方法和Matlab，给出了T-S模糊系统 H_∞ 控制器的设计方法.

关键词：H_∞ 控制；T-S模糊系统；二次稳定；线性矩阵不等式(LMI)；状态反馈

中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

LMI-based H_∞-control design for T-S fuzzy systems

LIU Xiao-dong[1], ZHANG Qing-ling[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Dalian Maritime University, Liaoning Dalian 116024, China;
2. College of Sciences, Northeastern University, Liaoning Shenyang 110004, China)

Abstract: Using the LMI (linear matrix inequality) methods, the problem of H_∞ control design for T-S fuzzy systems was studied. Firstly two new sufficient conditions in terms of matrix inequalities, which guaranteed the existence of the state feedback H_∞ control for the T-S fuzzy systems, were proposed. The conditions were simple and also had the interactions among the fuzzy subsystems as matrix inequalities composed by the coefficient matrices of the subsystems. Secondly the new conditions were converted to the LMIs which could be solved by MATLAB. Finally applying the LMIs and Matlab, the controller designing method for the H_∞ controller of the T-S fuzzy systems was given.

Key words: H_∞-control; T-S fuzzy system; quadratic stability; linear matrix inequalities; state feedback

1 引言(Introduction)

T-S(takagi-sugeno)模糊系统模型是通过一些模糊规则给出一个实际非线性系统的局部线性表示. S G Cao等人在文献[1~3]中证明了T-S模糊系统可以以任意精度逼近 $\mathbb{R}^n$ 的致密集 U 上的连续实函数，并且应用线性不确定系统理论，把模糊系统的稳定性分析转化为其线性时变极值(extreme)子系统的稳定性分析.这些研究使人们可以利用线性系统的方法分析和设计模糊系统.近年基于模型的模糊控制已经成为处理非线性控制的一个有效的方法.许多学者注意到，以往T-S模糊系统与稳定性和 H_∞ 控制相关的研究中，更多地注意局部子系统的稳定而较少考虑子系统之间的相互作用[4,5]等，所以其条件过于保守.本文首先通过由各模糊子系统的系数矩阵构成的矩阵不等式，研究了子系统间的相互作用并且给出了简洁且更具整体性的模糊系统 H_∞ 控制存在的两个与文献[5~8]等不同的新条件，并且把该条件等价地转化为Matlab可解的线性矩阵不等式，进而解决相应的T-S模糊系统 H_∞ 控制器设计问题，为研究类似问题提出了一个新方法.

2 T-S模糊系统及其稳定条件(T-S fuzzy system and stability conditions)

首先简介T Takagi和M Sugeno[4,9]及E Kim和H Lee[10]给出的T-S模糊系统稳定条件.考虑如下的"IF-THEN"模糊规则：

IF ξ_1 is M_{1i} and…and ξ_p is M_{pi} THEN

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{1i} w(t) + B_{2i} u(t),$$

$$z(t) = C_i x(t) + D_i u(t),\ i = 1,2,\cdots,r.$$

$x \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量，$z \in \mathbb{R}^q$ 是输出向量，$w \in \mathbb{R}^l$ 是扰动向量，$u \in \mathbb{R}^m$ 是输入向量，$A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B_{1i} \in \mathbb{R}^{n\times l}$，$B_{2i} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$C_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$，$D_i \in \mathbb{R}^{q\times m}$，$\xi = (\xi_1,$

收稿日期：2001-12-31；收修改稿日期：2003-07-01.
基金项目：国家自然科学基金项目(60174014)；大连海事大学自选项目.

$\cdots,\xi_p)^{\mathrm{T}}$ 是前件变量,与 u 相互独立,一般可设 $\xi=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, M_{ij} 是模糊集.并且定义 T-S 模糊系统如下:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))(A_i x(t)+\\ \qquad B_{1i}w(t)+B_{2i}u(t)), \qquad (1)\\ z(t)=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))(C_i x(t)+D_i u(t)).\end{cases}$$

其中

$$\lambda_i(\xi(t))=\frac{\beta_i(\xi(t))}{\sum\limits_{j=1}^{r}\beta_j(\xi(t))},$$

$$\beta_i(\xi(t))=\sum_{j=1}^{p}M_{ji}(\xi(t)),$$

$M_{ij}(\cdot)$ 是模糊集 M_{ij} 的隶属函数.总假设

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))=1,\ \lambda_k(\xi(t))\geqslant 0,$$
$$\forall k=1,2,\cdots,r,\ \forall t.$$

定义 1　对于系统(1),当 $w(t)\equiv 0, u(t)\equiv 0$ 时,若存在 $\alpha>0$ 及 $X>0$($X>0$ 表示 X 是正定对称阵)使得, $\forall t>0, \dot{V}(x(t))\leqslant -\alpha x^{\mathrm{T}}(t)x(t)$,其中 $V(x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)Xx(t)$,则称系统(1)是二次稳定的(quadratically stable).

引理 1　若存在 $X>0$ 使得

$$\begin{bmatrix}\Lambda_{11}^{\mathrm{T}}X+X\Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r}^{\mathrm{T}}X+X\Lambda_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Lambda_{r1}^{\mathrm{T}}X+X\Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr}^{\mathrm{T}}X+X\Lambda_{rr}\end{bmatrix}<-\alpha I,$$

$\alpha>0$,

其中 $\Lambda_{ii}=A_i+B_{2i}F_i, 2\Lambda_{ij}=A_i+B_{2i}F_j+A_j+B_{2j}F_i$(易验证($\Lambda_{ij}=\Lambda_{ji}$),则状态反馈

$$u(t)=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(\xi(t)F_j x(t), \qquad (2)$$

使模糊系统(1)当 $w(t)\equiv 0$ 时所产生的闭环系统

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))\lambda_j(\xi(t))((A_i+B_{2i}F_j)x(t)) \qquad (3)$$

是二次稳定的.

引理 1 的条件与文献[11]的条件:存在 $X>0$ 使得 $i,j=1,2,\cdots,r$,

$$P_{ij}=\frac{1}{2}(A_i+A_j+B_iF_j+B_jF_i)^{\mathrm{T}}X+X\frac{1}{2}(A_i+A_j+B_iF_j+B_jF_i)<0 \qquad (4)$$

相比较取消了

$$(A_i+B_{2i}F_j)^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}(A_i+B_{2i}F_j)<0,$$
$$i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,r$$

的限制.并且 E Kim and H Lee 在文献[10]中证明了引理 1 的稳定条件放宽了以往如文献[11,12]的模糊系统的稳定条件.

3　T-S 模糊系统的 H_∞ 控制(H_∞ control of T-S fuzzy system)

定义 2　对于式(1),当 $u(t)\equiv 0$ 时,若 $\forall(w(t)\in L^2(0,\infty;\mathbb{R}^l)$(平方可积函数空间), $z(t)\in L_2(0,\infty;\mathbb{R}^q)$,则式(1)被称为输入-输出稳定的.对于给定的正数 γ,若此时式(1)是二次稳定的,且在 0 初始条件下,存在正数 d, $0<d<\gamma$, $\|z\|_2\leqslant d\|w\|_2$,其中

$$\|x(t)\|_2=(\int_0^\infty x^{\mathrm{T}}(t)x(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$$

为 L_2 范数.此时称式(1)的 H_∞ 范数小于 γ.

引理 2　对于给定的正数 $\gamma>0$,如果存在矩阵 $F_i(i=1,\cdots,r)$ 和共同的 $X>0$ 满足下列矩阵不等式

$$\begin{cases}H_k=\\ \begin{bmatrix}Q_{11} & \cdots & Q_{1r} & C_1^{\mathrm{T}}+F_k^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} & C_r^{\mathrm{T}}+F_k^{\mathrm{T}}D_r^{\mathrm{T}}\\ C_1+D_1F_k & \cdots & C_r+D_rF_k & -I\end{bmatrix}<0,\\ k=1,2,\cdots,r,\end{cases} \qquad (5)$$

其中:

$$Q_{ii}=(A_i+B_{2i}F_i)^{\mathrm{T}}X+X(A_i+B_{2i}F_i)+\gamma^{-2}XB_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}X,$$

$$2Q_{ij}=(A_i+B_{2i}F_j+B_{2j}F_i+A_j)^{\mathrm{T}}X+X(A_i+B_{2i}F_j+B_{2j}F_i+A_j)+2\gamma^{-2}XB_{1i}B_{1j}^{\mathrm{T}}X,\ i,j=1,\cdots,r,$$

则对于式(1),状态反馈(2)产生的闭环系统

$$\dot{x}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))\lambda_j(\xi(t))(A_ix(t)+B_{2i}F_jx(t)+B_{1i}w(t)),$$

$$z(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))\lambda_j(\xi(t))(C_i+D_iF_j)x(t) \qquad (6)$$

的 H_∞ 范数小于 γ.

证　设 $\Lambda_{ii}=A_i+B_{2i}F_i, 2\Lambda_{ij}=A_i+A_j+B_{2i}F_j+B_{2j}F_i$(易验证 $\Lambda_{ij}=\Lambda_{ji}$).首先证明当 $w(t)\equiv 0$ 时,闭环系统(6)是二次稳定的.由式(5)和 Schur 补公式,对任意的 $k=1,2,\cdots,r$,有

$$0 > \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{r1}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ \vdots \\ C_r^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ \vdots \\ C_r^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T} \end{bmatrix}^{\mathrm T} + \frac{1}{\gamma^2}\begin{bmatrix} XB_{11} \\ \vdots \\ XB_{1r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} XB_{11} \\ \vdots \\ XB_{1r} \end{bmatrix}^{\mathrm T} \geqslant \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{r1}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr}^{\mathrm T}X + X\Lambda_{rr} \end{bmatrix}.$$

由引理1知系统(6) 当 $w(t) \equiv 0$ 时是二次稳定的.

由于式(5)和

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(\xi(t)) = 1,\ \lambda_k(\xi(t)) \geqslant 0,\quad \forall k = 1,2,\cdots,r,\ \forall t.$$

所以对任意 $t > 0$,有

$$0 > \sum_{k=1}^{r}\lambda_k H_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} & \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_1^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} & \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_r^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T}) \\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_1 + D_1F_k) & \cdots & \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_r + D_rF_k) & -I \end{bmatrix}.$$

由上式和 Schur 补公式, 有

$$0 > \begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_1^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_r^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_1^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_r^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T}) \end{bmatrix}^{\mathrm T}.$$

因此,任意 $t > 0$, 对状态向量 $x(t) \neq 0$, 有

$$0 > \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_r x \end{bmatrix}^{\mathrm T}\left(\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_1^{\mathrm T}+F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_r^{\mathrm T}+F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_1^{\mathrm T}+F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k(C_r^{\mathrm T}+F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T}) \end{bmatrix}^{\mathrm T}\right)\begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_r x \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j x^{\mathrm T}Q_{ij}x + z^{\mathrm T}z. \tag{7}$$

由式(5)和 Schur 补公式,对任意的 $k = 1,2,\cdots,r$, 有

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} < -\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ \vdots \\ C_r^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ \vdots \\ C_r^{\mathrm T} + F_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T} \end{bmatrix}^{\mathrm T} \leqslant 0.$$

因此,存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} < -\alpha I,$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j x^{\mathrm T}Q_{ij}x < -\alpha x^{\mathrm T}x. \tag{8}$$

当 $w(t)$ 不恒为0时,构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = x^{\mathrm T}(t)Xx(t),$$

$$\begin{aligned}
\dot V(t) = {} & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j x^{\mathrm T}(A_i^{\mathrm T}X + F_j^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}X + XA_i + XB_{2i}F_j + \\
& \frac{1}{\gamma^2}XB_{1i}B_{1j}^{\mathrm T}X)x - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j x^{\mathrm T}\frac{1}{\gamma^2}XB_{1i}B_{1j}^{\mathrm T}Xx + \\
& \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(w^{\mathrm T}B_{1i}^{\mathrm T}Xx + x^{\mathrm T}XB_{1i}w) = \\
& \begin{bmatrix} \lambda_1(\xi(t))x(t) \\ \vdots \\ \lambda_r(\xi(t))x(t) \end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(\xi(t))x(t) \\ \vdots \\ \lambda_r(\xi(t))x(t) \end{bmatrix} - \\
& \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx)^{\mathrm T}(\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx) + \\
& w^{\mathrm T}(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx) + (\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx)^{\mathrm T}w = \\
& \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j x^{\mathrm T}Q_{ij}x + \gamma^2 w^{\mathrm T}w - (\gamma w - \\
& \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx)^{\mathrm T}(\gamma w - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx).
\end{aligned} \tag{9}$$

由式(7~9)对任意的 $t>0$, 有

$$\dot V(t) < -z^{\mathrm T}z + \gamma^2 w^{\mathrm T}w - \Big(\gamma w - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big)^{\mathrm T}\Big(\gamma w - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big),$$

$$\dot V(t) < -\alpha x^{\mathrm T}x + \gamma^2 w^{\mathrm T}w - \Big(\gamma w - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big)^{\mathrm T}\Big(\gamma w - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i B_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big).$$

设 $x(0)=0$. 此时 $V(x(0))=0$. 上面的不等式两端同时对 t 从 0 到 $T>0$ 积分有

$$0 \leqslant -\|z(t)\|_2^2 + \gamma^2\|w(t)\|_2^2 - \gamma^2\Big\|w(t) - \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\xi(t))B_{1i}^{\mathrm T}Xx(t)\Big\|_2^2 \Rightarrow$$

$$\|z(t)\|_2^2 \leqslant \gamma^2\|w(t)\|_2^2,$$

$$0 \leqslant -\alpha\|x(t)\|_2^2 + \gamma^2\|w(t)\|_2^2 - \gamma^2\Big\|w(t) - \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\xi(t))B_{1i}^{\mathrm T}Xx(t)\Big\|_2^2 \Rightarrow$$

$$\alpha\|x(t)\|_2^2 \leqslant \gamma^2\|w(t)\|_2^2.$$

其中 α 为一大于 0 的常数.　　证毕.

定理 1　对于给定的正数 $\gamma>0$, 如果存在矩阵 $M_i(i=1,2,\cdots,r)$ 和共同的 $Y>0$, 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} & B_{11} & YC_1^{\mathrm T}+M_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} & B_{1r} & YC_r^{\mathrm T}+M_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T} \\ B_{11}^{\mathrm T} & \cdots & B_{1r}^{\mathrm T} & -\gamma^2 I & 0 \\ C_1Y+D_1M_k & \cdots & C_rY+D_rM_k & 0 & I \end{bmatrix} < 0,\ k=1,2,\cdots,r. \tag{10}$$

其中

$$P_{ii} = A_iY + YA_i^{\mathrm T} + M_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T} + B_{2i}M_i,$$

$$2P_{ij} = A_iY + YA_i^{\mathrm T} + M_j^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T} + B_{2i}M_j + A_jY + YA_j^{\mathrm T} + M_i^{\mathrm T}B_{2j}^{\mathrm T} + B_{2j}M_i,$$

$i,j=1,2,\cdots,r$, 若令 $F_i=M_iY^{-1}$, $i=1,2,\cdots,r$, 则状态反馈(2)使模糊系统(1)所产生的闭环系统的 H_∞ 范数小于 γ.

证　由 Schur 补公式, 对于 $k=1,2,\cdots,r$, 式(10)等价于

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{\mathrm T}C_1^{\mathrm T}+M_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ \vdots \\ Y^{\mathrm T}C_r^{\mathrm T}+M_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y^{\mathrm T}C_1^{\mathrm T}+M_k^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T} \\ \vdots \\ Y^{\mathrm T}C_r^{\mathrm T}+M_k^{\mathrm T}D_r^{\mathrm T} \end{bmatrix}^{\mathrm T} + \frac{1}{\gamma^2}\begin{bmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{1r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{1r} \end{bmatrix}^{\mathrm T} < 0. \tag{11}$$

式(11)左右分别乘 $\mathrm{diag}((Y^{-1})^{\mathrm T}\cdots(Y^{-1})^{\mathrm T})$, $\mathrm{diag}(Y^{-1}\cdots Y^{-1})$ 后, 令 $X=Y^{-1}$, $F_i=M_iY^{-1}$, $i,j=1,2,\cdots,r$, 对任意 $k=1,2,\cdots,r$, 所得的矩阵不等式等价于式(5), 由引理 2 知状态反馈(2)使闭环系统的 H_∞ 范数小于 γ.　　证毕.

应用引理 2, 用与定理 1 相同的方法可以得到如下结果.

推论 1　对于给定的正数 $\gamma>0$, 如果存在矩阵 $M_i(i=1,2,\cdots,r)$ 和共同的矩阵 $Y>0$, 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} & B_{11} & Y^{\mathrm T}C_k^{\mathrm T}+M_1^{\mathrm T}D_k^{\mathrm T} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} & B_{1r} & Y^{\mathrm T}C_k^{\mathrm T}+M_r^{\mathrm T}D_k^{\mathrm T} \\ B_{11}^{\mathrm T} & \cdots & B_{1r}^{\mathrm T} & -\gamma^2 I & 0 \\ C_kY+D_kM_1 & \cdots & C_kY+D_kM_r & 0 & I \end{bmatrix} < 0,\ k=1,2,\cdots,r, \tag{12}$$

$i,j=1,2,\cdots,r$, 若令 $F_i=M_iY^{-1}$, $i=1,2,\cdots,r$, 则状态反馈(2)使模糊系统(1)所产生的闭环系统的 H_∞ 范数小于 γ.

4　例子(Example)

考虑如下模糊系统

$$\dot x(t) = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i(x(t))(A_ix(t)+B_{1i}w(t)+B_{2i}u(t)),$$

$$z = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i(x(t))(C_ix(t)+D_iu(t)).$$

其中: $\lambda_1=(2-0.5|x_1|)/2$, $\lambda_2=1-\lambda_1$, 当 $|x_1|\leqslant 4$; $\lambda_1=\lambda_2=0$, 当 $|x_1|>4$.

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ B_{11}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

$$C_1=[1\ \ 1],\ D_1=0.5,\ C_2=[2\ \ 1],\ D_2=0.3.$$

令 $\gamma=1$, 应用 Matlab 解定理 1 的两个线性矩阵不等式, 解得

$$Y=\begin{bmatrix}1.1180 & -1.4315\\ -1.4315 & 4.8648\end{bmatrix},$$

$$M_1=[-2.2473\quad -4.6343],$$

$$M_2=[-1.7449\quad -2.9570],$$

$$F_1=[-5.1819\quad -2.4774],$$

$$F_2=[-3.7527\quad -1.7121].$$

令 $\gamma=1$, 应用 Matlab 解推论 1 的两个线性矩阵不等式, 解得

$$Y=\begin{bmatrix}1.9099 & -1.8427\\ -1.8427 & 4.0328\end{bmatrix},$$

$$M_1 = [-3.0144 \quad -3.8252],$$
$$M_2 = [-3.0169 \quad -4.1326],$$
$$F_1 = [-4.4594 \quad -2.9861],$$
$$F_2 = [-4.5932 \quad -3.1235].$$

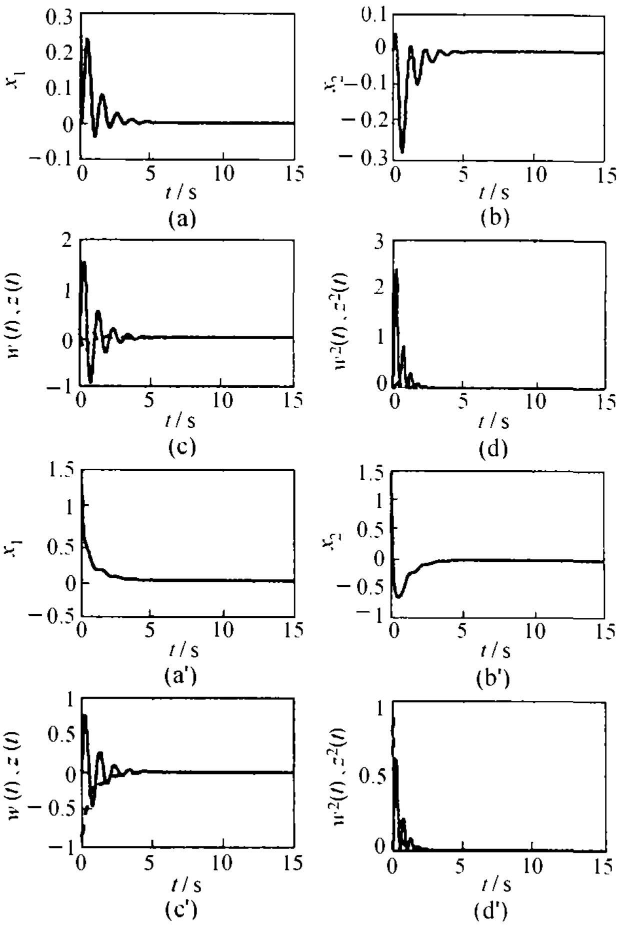

图 1 仿真结果

Fig. 1 Simulation results

仿真表明,由定理 1 和推论 1 求出的反馈 $u = \lambda_1 F_1 x(t) + \lambda_2 F_2 x(t)$ 使得闭环稳定且 H_∞ 范数小于 γ. 限于篇幅, 这里只给出由定理1得到的仿真结果. 图 1 中 $w(t)$ 为实线, $z(t)$ 为虚线, $w^2(t)$ 为实线, $z^2(t)$ 为虚线. 子图 1(d)中, $w(t) = 2e^{-t}\sin 6t$, $0 \leqslant t \leqslant 15$, $x(0) = [0,0]$. 由图 1(d)知 $\|z\|_2 < \|w\|_2$. 子图 1(d')中, $w(t) = e^{-t}\sin 6t$, $0 \leqslant t \leqslant 15$, $x(0) = [1.5,1.5]$.

5 结论(Conclusion)

本文的主要结果:给出了一般形式的 T-S 模糊系统存在 H_∞ 控制的两个新的用矩阵不等式表示的充分条件及与之等价的可用 Matlab 求解的线性矩阵不等式的充分条件. 不仅为研究 T-S 模糊系统提出了一个新的方法, 而且可用 Matlab 和 LMIs 设计一般形式 T-S 模糊系统的 H_∞ 控制器.

参考文献(References):

[1] FENG G, CAO S G, REES N W, et al. Design of fuzzy control systems with guaranteed stability [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 85(1): 1 - 10.

[2] CAO S G, REES N W, FENG G. Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems [J]. *Int J Control*, 1996, 64(6): 1069 - 1087.

[3] CAO G S, REES N W, FENG G. Analysis and design for a class of complex control systems: Part I, II [J]. *Automatica*, 1997, 33(6): 1017 - 1028.

[4] TAKAGI T, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 45(1): 135 - 156.

[5] CAO G, REES W, FENG G. H_∞ control of nonlinear continuous-time systems based on dynamical fuzzy models [J]. *Int J of Systems Science*, 1996, 27(9): 821 - 830.

[6] FENG G, CAO G, REES W. An approach to H_∞ control of a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1469 - 1474.

[7] MASUBUCHI, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997, 32(3): 669 - 673.

[8] TANAKA K, IKEDE T, WANG H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1 - 13.

[9] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 - 132.

[10] KIM E, LEE H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 523 - 533.

[11] YONEYAMA J, MASAHIRO N, HITOSHI K, et al. Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 111(2): 253 - 266.

[12] TANAKA K, IKEDE T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-baesd design [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250 - 265.

[13] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14 - 23.

[14] TANAKA K, IKEDE T, WANG H O. An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions [C]// *Proc of IEEE Int Conf Fuzzy Systems*. Barcelona: [s. n.], 1997: 171 - 176.

[15] BOYD S, EL G, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[16] PETERSEN I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear system [J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(2): 351 - 357.

作者简介:

刘晓东 (1963 —), 男, 东北大学信息工程学院博士研究生, 大连海事大学教授. 目前研究方向为模糊系统和模糊控制理论及应用. E-mail: xiaodongliu-chn@163.net;

张庆灵 (1956 —), 男, 东北大学理学院院长, 教授, 博士生导师. 研究方向为广义大系统的鲁棒控制、广义系统的 H_2/H_∞ 控制等.