

文章编号: 1000-8152(2004)03-0357-05

线性多变量控制系统的干扰抑制性能极限: 信息论方法

章 辉, 孙优贤

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 浙江大学 控制科学与工程系 现代控制工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 考察了受随机干扰的线性离散多变量时不变反馈控制系统中的不确定性和信息传输, 从信息论的角度阐述了系统干扰抑制的性能极限. 讨论中采用熵率和信息率作为系统干扰抑制的性能函数. 针对调节问题, 利用 Bode 积分定理将控制系统中的熵率和系统开环不稳定极点结合起来, 修正了“变异度守恒定律”; 针对跟踪问题, 研究高斯系统中干扰与输出间的互信息率和系统闭环传递函数 H_∞ 熵的关系, 并在此基础上得出了系统干扰抑制的性能上界.

关键词: 信息率; Bode 积分; H_∞ 熵; 性能极限; 线性多变量系统; 随机干扰

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Performance limits of disturbance rejection in linear multivariable control systems: information theoretic approaches

ZHANG Hui, SUN You-xian

(National Laboratory of Industrial Control Technology and Institute of Modern Control Engineering,

Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: By investigating the transmission of uncertainty and information in linear time invariant multivariable control systems disturbed by stationary stochastic processes, performance limits of disturbance rejection were studied within the framework of information theory. Two measures of information and uncertainty, entropy rate and mutual information rate, were employed as performance functions of linear regulation system and linear tracking system, respectively. For linear regulation problem, the entropy rate of system output was computed by using Bode integral formula, then the performance limit of disturbance rejection was formulated in terms of unstable poles of open-loop transfer function, and the ‘conservation law of variety’ was revised. For linear tracking problem, a relation between H_∞ entropy of system closed-loop transfer function and mutual information rate of the pair of disturbance and output was deduced by using frequency calculation method of mutual information rate, and an upper bound of disturbance rejection performance in Gaussian systems was derived based on this relation.

Key words: information rates; Bode integral; H_∞ entropy; performance limit; linear multivariable system; stochastic disturbance

1 引言 (Introduction)

Bode 用解析函数理论研究了反馈控制系统的性能局限, 针对线性单变量连续系统得出了著名的 Bode 积分定理^[1]. 近年来, 这一成果已被推广到离散、多变量、非线性和时变系统等情形^[2-4].

从信息论的观点来看, 控制系统是一个信息和不确定性的传输通道. 控制论的先驱 Ashby 提出了用 Shannon 信息论中的熵函数描述的系统“变异度” (variety) 概念^[5]; Engell^[6] 则用“伪熵率” (pseudo entropy rate) 和熵率研究单变量线性反馈控制系统中的“变异度守恒定律” (the conservation law of vari-

ety). 这些成果是与系统的可达性能联系在一起的. 控制系统研究的信息论方法在近年来获得了进一步的关注^[7-9].

同样着眼于不确定性, 作为线性鲁棒控制系统的一个次优设计方法, 最小熵 H_∞ 控制理论获得了可喜的成果^[10-12]. 该方法采用 H_∞ 熵 (不同于 Shannon 信息熵) 作为性能指标, 在系统闭环传递函数的 H_∞ 范数有界条件下选择控制器使其 H_∞ 熵达到最小.

2 概念和引理 (Concepts and lemmas)

设离散随机过程 X 的一组序列为 $X^n = \{x_1,$

..., x_n }, 该过程的 Shannon 熵率为^[13]: $\bar{H}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X^n)$, 其中 $H(X^n)$ 是 X^n 的联合熵. 熵率描述了随机过程每单位时间的平均不确定性或信息量. 而两个离散随机过程 X 和 Y 间的互信息率^[13] $\bar{I}(X; Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n)$ 则描述了 X 和 Y 每单位时间的平均互信息, 同时也反映了其间的信息传输情况, 其中 $I(X^n; Y^n)$ 为 X^n 和 Y^n 的互信息, $Y^n = \{y_1, \dots, y_n\}$ 为 Y 的序列.

对于 $m \times m$ 传递函数矩阵 $G(z) \in \Xi H_\infty, \Xi H_\infty$ 表示所有稳定、正则、实有理的传递函数矩阵, $\|G(z)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}[G(e^{i\omega})] < \lambda, \bar{\sigma}$ 表示最大奇异值, 其 H_∞ 熵^[9,11] 定义为

$$H(G, \lambda) = \frac{-\lambda^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det[I - \lambda^{-2} G(e^{i\omega}) G^*(e^{i\omega})] d\omega. \quad (1)$$

其中 $G^*(e^{i\omega}) = G^T(e^{-i\omega})$.

引理 1 设线性有限维多变量系统的传递函数矩阵 $G(z) \in \Xi H_\infty$, 系统输入 $x \in \Xi^m$ 为零均值的平稳随机向量序列, 其有理谱密度阵为 $\Phi_x(\omega)$. 则系统输出 $y \in \Xi^m$ 的熵率为

$$\bar{H}(y) = \bar{H}(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\det G(e^{i\omega})| d\omega. \quad (2)$$

其中 $\bar{H}(x)$ 为输入的熵率:

$$\bar{H}(x) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e)^m + \frac{m}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \Phi_x(\omega) d\omega. \quad (3)$$

证明见附录.

引理 2^[14] 设两个联合高斯平稳随机过程 $x(k) \in \Xi^n, y(k) \in \Xi^m$ 具有谱密度 $\Phi_x, \Phi_y, \eta(k) = [x^T(k) y^T(k)]^T \in \Xi^{n+m}$ 具有谱密度 $\Phi_\eta, k = 0, 1, 2, \dots$. 则 $x(k)$ 和 $y(k)$ 的互信息率为

$$\bar{I}(x; y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\det \Phi_x(\omega) \det \Phi_y(\omega)}{\det \Phi_\eta(\omega)} d\omega. \quad (4)$$

3 受随机干扰的调节系统 (Regulation systems with stochastic disturbance)

考虑图 1 所示离散线性有限维时不变控制系统.

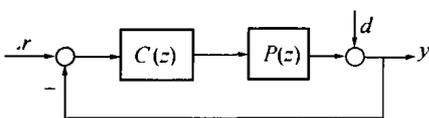


图 1 线性受扰系统

Fig. 1 Linear system with disturbance

图中: $r, d, y \in \Xi^n$ 分别为系统参考输入、干扰

和输出; $C(z), P(z)$ 为 $n \times n$ 正则有理传递函数矩阵.

假定 1 干扰 d 为零均值离散平稳随机过程; 参考输入 r 为确定性的, 不失一般性, 设 $r \equiv 0$. 系统开环传递函数 $L(z) = P(z)C(z)$ 为严格正则的, 即矩阵 $L(z)$ 的每个元素皆为严格正则的传递函数(分子的阶次小于分母的阶次); 系统是良定和闭环稳定的.

对图 1 所示系统, 在假定 1 条件下系统唯一的外来输入为干扰 d , 输出 y 的不确定性是由 d 传输而来. 如前所述, 随机过程的熵率描述了其平均不确定性. 因而作为系统的目标函数, y 的熵率反映了系统的干扰抑制性能.

干扰 d 到输出 y 的闭环传递函数为 $S(z) = (I + L(z))^{-1}$. 据引理 1, y 的熵率为

$$\bar{H}(y) = \bar{H}(d) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\det S(e^{i\omega})|^2 d\omega. \quad (5)$$

其中 $\bar{H}(d)$ 为干扰的熵率. 根据多变量系统的 Bode 积分定理^[3], 当 $L(z)$ 为严格正则时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln |\det S(e^{i\omega})| d\omega = 2\pi \sum_{j=1}^m \ln |p_j| \geq 0. \quad (6)$$

其中 $p_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 为 $L(z)$ 的单位圆外的极点. 由式(5)、(6)可得如下结论:

定理 1 设图 1 所示系统满足假定 1 所述条件, 则输出 y 的熵率为

$$\bar{H}(y) = \bar{H}(d) + \sum_{j=1}^m \ln |p_j|. \quad (7)$$

其中 $p_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 为 $L(z)$ 的单位圆外的极点.

定理 1 从信息论的角度反映了线性反馈控制系统干扰抑制的性能极限: 由式(7)可知, 对于开环严格正则的线性时不变反馈控制系统, 系统输出的平均不确定性总是大于或等于外来干扰的平均不确定性, 即 $\bar{H}(y) \geq \bar{H}(d)$; 开环不稳定极点加大了系统输出的不确定性. 对于单变量系统(图 1 中 $n = 1$) 该结论同样成立, 见文献[7].

除了信息和不确定性之外, Ashby^[5] 和 Engell^[6] 给熵和熵率赋予另一个含义——“变异度”, 即关于过程可能的状态量或“随机度”的度量. Engell 还提出了控制系统中的“变异度守恒定律”. 根据其结论^[6], 对于图 1 所示单变量系统, 在假定 1 条件下输出 y 的变异度与干扰 d 的变异度是恒等的, 即 $\bar{H}(y)$

$\equiv \bar{H}(d)$. 然而由定理 1 可知, 变异度守恒是有条件的: 只有当系统开环传递函数为严格正则和稳定时该定律才成立. 定理 1 对变异度守恒定律进行了修正, 并推广到多变量系统.

4 受随机干扰的跟踪系统 (Tracking systems with stochastic disturbance)

本节在假定 2 条件下考虑如图 1 所示的跟踪控制系统.

假定 2 参考输入 r 和干扰 d 为相互独立的离散零均值高斯平稳过程, 其有理谱密度为 $\Phi_r(\omega)$, $\Phi_d(\omega)$, 为讨论方便设 $\Phi_d(\omega) = I$; 系统是良定和闭环稳定的.

系统输出闭环传递矩阵分别为 $S(z) = (I + L(z))^{-1}$, $T(z) = L(z)[I + L(z)]^{-1}$, 则 y 的谱密度为

$$\Phi_y(\omega) = T(e^{i\omega})\Phi_r(\omega)T^*(e^{i\omega}) + S(e^{i\omega})\Phi_d(\omega)S^*(e^{i\omega}).$$

而 r, d 与 y 的互谱密度分别为

$$\begin{aligned} \Phi_{ry}(\omega) &= \Phi_r(\omega)T^*(e^{i\omega}), \\ \Phi_{dy}(\omega) &= \Phi_d(\omega)S^*(e^{i\omega}). \end{aligned}$$

另设 $y_r(z) = T(z)r(z)$.

考察上述系统中干扰 d 和输出 y 间的互信息率, 有:

引理 3 设图 1 所示系统满足假定 2 所述条件, 则干扰 d 和输出 y 的互信息率为

$$\begin{aligned} \bar{I}(d; y) &= \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [I - \Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})] d\omega = \\ &= \bar{H}(y) - \bar{H}(y_r). \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\bar{H}(y), \bar{H}(y_r)$ 为 y, y_r 的熵率.

证 设 $\xi(k) = [d^T(k) \ y^T(k)]^T$, ξ 的谱密度为

$$\Phi_\xi(e^{i\omega}) = \begin{bmatrix} \Phi_d(\omega) & \Phi_{dy}(\omega) \\ \Phi_{dy}^*(\omega) & \Phi_y(\omega) \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} \det \Phi_\xi(\omega) &= \\ &= \det \Phi_d(\omega) \det [\Phi_y(\omega) - \Phi_{dy}^*(\omega)\Phi_d^{-1}(\omega)\Phi_{dy}(\omega)] = \\ &= \det \Phi_y(\omega) \det [I - \Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})]. \end{aligned}$$

根据引理 2 得

$$\bar{I}(d; y) =$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [I - \Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})] d\omega.$$

另一方面

$$\det \Phi_\xi(\omega) = \det [T(e^{i\omega})\Phi_r(\omega)T^*(e^{i\omega})],$$

则

$$\bar{I}(d; y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\det \Phi_y(\omega)}{\det [T(e^{i\omega})\Phi_r(\omega)T^*(e^{i\omega})]} d\omega.$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned} \bar{I}(d; y) &= \\ &= \bar{H}(y) - \bar{H}(r) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\det T(e^{i\omega})| d\omega = \\ &= \bar{H}(y) - \bar{H}(y_r). \end{aligned}$$

输出 y 由两部分构成: 由 r 通过系统传递到输出的部分, 和由 d 到输出的部分. $\bar{H}(y) = \bar{I}(d; y) + \bar{H}(y_r)$ 描述了输出的总体不确定性, $\bar{H}(y_r)$ 则描述 y 中由 r 传递来的信息. 若此时仍以 $\bar{H}(y)$ 作为最小化性能函数, 则有可能造成输出 y “丢失”关于 r 的跟踪信息. $\bar{I}(d; y)$ 反映了系统中不确定性从 d 到 y 的传输情况, 为抑制干扰, 显然 $\bar{I}(d; y)$ 越小越好. 因而合理的选择是给 $\bar{H}(y)$ 限定某个恰当的上界 (对高斯系统 $\bar{H}(y)$ 的界——对应于输出方差的界^[13]), 而使 $\bar{I}(d; y)$ 达到最小. $\bar{I}(d; y)$ 反映了系统的干扰抑制性能.

由于 y 为高斯平稳过程, 根据谱分解定理^[15], 存在有理函数阵 $F_y(z), \det F_y(z)$ 的零极点都在单位圆内, 使得 $\Phi_y(\omega) = F_y(e^{i\omega})F_y^*(e^{i\omega})$. 另由奇异值分解, 存在单位阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}, U^*U = I$, 使得 $\Phi_y = U^* \Lambda U$, 其中 $\Lambda = \text{diag}[\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2], \sigma_i (i = 1, \dots, n)$ 为 $F_y(z)$ 的奇异值. 且 $\det \Phi_y = \det(U^* \Lambda U) = \det \Lambda$.

令 $\gamma = \|F_y(z)\|_\infty$, 有

$$\begin{aligned} \det \Phi_y &\leq \gamma^{2n}, \\ \det [\Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})] &\geq \\ &\geq \gamma^{-2n} \det [S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})], \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \det [I - \Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})] &\leq \\ \det [I - \gamma^{-2}S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})]. \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [I - \Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})] d\omega \geq \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [I - \gamma^{-2}S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})] d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

由于

$$\Phi_y(\omega) = T(e^{i\omega})\Phi_r(\omega)T^*(e^{i\omega}) + S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega}) \geq S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega}),$$

因而 $\Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega}) \leq I$. 若 $\Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega}) = I$, 由式(8)可知 $\bar{I}(d; y) = +\infty$. 同样由定理1, $\bar{I}(d; y) = \bar{H}(y) - \bar{H}(y_r)$, 由于平稳高斯过程的熵率存在^[13], 即 $\bar{H}(y), \bar{H}(y_r)$ 都小于 $+\infty$, 可知 $\bar{I}(d; y) < +\infty$. 所以 $\gamma^{-2}S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega}) \leq \Phi_y^{-1}(\omega)S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega}) < I$, 则

$$\|S(z)\|_\infty < \gamma. \quad (10)$$

由式(1)可知, 闭环传递函数 $S(z)$ 满足式(10)条件下的 H_∞ 熵为

$$H(S, \gamma) = -\frac{\gamma^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det[I - \gamma^{-2}S(e^{i\omega})S^*(e^{i\omega})] d\omega. \quad (11)$$

记 $C^- = \{c \in \mathbb{C}, |c| < 1\}$; 设对于矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{sp}(X)$ 表示 X 的特征值的集合. 根据 Stoorvogel 和 Schuppen^[8] 的研究成果, 设传递矩阵 $S(z)$ 具有状态空间实现:

$$S(z) = C(zI - A)^{-1}B + D, \text{sp}(A) \subset C^-. \quad (12)$$

其中 A, B, C 和 D 为相应的实矩阵. 当 $\|S(z)\|_\infty < \gamma$ 时, 下列方程存在唯一解 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{cases} Q = A^T Q A + C^T C + (A^T Q B + C^T D) E^{-1} (B^T Q A + D^T C), \\ Q = Q^T \geq 0, \\ E = \gamma^{-2} I - B^T Q B - D^T D > 0, \\ \text{sp}(A + B E^{-1} (B^T Q A + D^T C)) \subset C^-. \end{cases} \quad (13)$$

且 $H(S, \gamma) = -\frac{1}{2} \ln \det(I - \gamma^2 B^T Q B - \gamma^2 D^T D)$.

由引理3和上述分析可得:

定理2 设图1所示系统满足假定2所述条件, 则

$$\gamma^2 \bar{I}(d; y) \geq H(S, \gamma) = -\frac{1}{2} \ln \det(I - \gamma^2 B^T Q B - \gamma^2 D^T D). \quad (14)$$

由于 γ 反映了输出 y 的“大小”, 也同 $\bar{H}(y)$ 一一对应, 所以 $\gamma^2 \bar{I}(d; y)$ 较 $\bar{I}(d; y)$ 更全面地衡量了系统干扰抑制性能. 定理2表明, 系统敏感函数的 H_∞ 熵是系统干扰抑制性能指标函数 $\gamma^2 \bar{I}(d; y)$ 的下界. 结合方程(13)可得出了这个下界的时域计算结果. 而当选择控制器使系统 H_∞ 熵达到最小^[10, 11] 时,

则由式(14)得到系统干扰抑制的性能极限.

文献[8]针对辨识问题研究了辨识误差和标准白噪声间的互信息率和 H_∞ 熵的等价关系. 而这里研究的是控制系统闭环传递函数的 H_∞ 熵与该传递函数输入和输出间的互信息率的关系. 本文所得出的结果也与文献[8]不同.

5 结论(Conclusion)

本文考察了受随机干扰的线性多变量时不变控制系统中的不确定性和信息传输, 分别针对调节问题和跟踪问题, 从信息论的角度阐述了反馈控制系统的干扰抑制性能极限, 并对“变异度守恒定律”进行了修正. 本文所得出的信息率(熵率和互信息率)与 Bode 积分和 H_∞ 熵的关系表明, 信息论中的有关概念和方法在控制系统的性能分析中有其独到的优势.

参考文献(References):

- [1] BODE H W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* [M]. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1945.
- [2] CHEN J. Sensitivity integrals and transformation techniques: a new perspective [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 1037 - 1042.
- [3] IGLESIAS P A. Tradeoffs in linear time-varying systems: an analogue of Bode's sensitivity integral [J]. *Automatica*, 2001, 37(10): 1541 - 1550.
- [4] SERON M M, BRASLAVSKY J H, GOODWIN G C. *Fundamental Limitations in Filtering and Control* [M]. London: Springer-Verlag, 1997.
- [5] ASHBY W R. *An Introduction to Cybernetics* [M]. London: Chapman & Hall Ltd., 1957.
- [6] ENGELL S. Variety, information and feedback [J]. *Kybernetes*, 1984, 13(2): 73 - 77.
- [7] 章辉, 孙优贤. 线性时不变控制系统中的熵率和 H_∞ 熵 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(4): 533 - 536. (ZHANG Hui, SUN Youxian. Entropy rate and H_∞ entropy in LTI control systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(4): 533 - 536.)
- [8] STOORVOGEL A A, SCHUPPEN J H V. System identification with information theoretic criteria [C]// BITTANTI S, PICCI G. *Identification, Adaptation, Learning*. Berlin: Springer, 1996: 289 - 338.
- [9] WANG H. Minimum entropy control of non-Gaussian dynamic stochastic systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 398 - 403.
- [10] MUSTAFA D, GLOVER K. Minimum entropy H_∞ control [M]// THOMA A, WYNER A. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 146. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.
- [11] IGLESIAS P A, MUSAFA D, GLOVER K. Discrete time H_∞ controllers satisfying a minimum entropy criterion [J]. *Systems & Con-*

trol Letters, 1990, 14(4): 275 - 286.

- [12] QIU L, CHEN T. Multirate sampled-data systems: all H_∞ suboptimal controllers and the minimum entropy controller [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(3): 537 - 550.
- [13] IHARA S. *Information Theory for Continuous Systems* [M]. Singapore: World Scientific, 1993.
- [14] PINSKER M S. *Information and Information Stability of Random Variables and Processes* [M]. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1964.
- [15] LJUNG L. 系统辨识: 使用者的理论 [M]. 第二版. 北京: 清华大学出版社, 2000.
(LJUNG L. *System Identification: Theory for the User* [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2000.)
- [16] PAPOULIS A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* [M]. 3rd ed. Singapore: McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [17] ROSENBLATT M. Asymptotic distribution of eigenvalues of block Toeplitz matrices [J]. *Bulletin of American Mathematical Society*, 1960, 66(2): 320 - 321.

附录 (Appendix):

引理 1 的证明.

该引理的单变量形式在文献 [16] 中已给出, 但就作者所知还没有针对多变量系统的结果. 这里给出证明.

首先考虑 x 是离散高斯过程的情况, 这时 y 也是高斯过程. 设 x 的序列 $x^n = \{x_1, \dots, x_n\}$, 定义 Toeplitz 阵 $T_x^n = [Q(j-k)]_{j,k=-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n}$, 其中 $Q(j-k) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为 x 的协方差阵. x^n 的熵为 $H(x^n) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e)^{n+m} + \frac{1}{2} \ln \det T_x^n$. 根据 Toeplitz 矩阵的 Szegö 极限定理 [17],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\det T_x^n]^{1/n} = \exp \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \Phi_x(\omega) d\omega,$$

则 x 的熵率为

$$\begin{aligned} \bar{H}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(x^n) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi e)^m + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \Phi_x(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

同理, y 的熵率为

$$\begin{aligned} \bar{H}(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(y^n) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi e)^m + \frac{m}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \Phi_y(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

由于 $\Phi_y(\omega) = G(e^{i\omega})\Phi_x(\omega)G^*(e^{i\omega})$, 所以

$$\bar{H}(y) = \bar{H}(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\det G(e^{i\omega})| d\omega.$$

再看 x 是任意分布的情况. 假定输出序列 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 为有限输入序列 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的线性变换. 设该变换的 Jacobian 阵为 $J(x_1, \dots, x_n)$, $\Delta = \det J(x_1, \dots, x_n)$. 由于 $G(z)$ 为线性系统, 可知 $J(x_1, \dots, x_n)$ 存在单值逆, 且 Δ 与 $x_i (i = 1, \dots, n)$ 无关. 据熵的性质有

$$H(y_1, \dots, y_n) = H(x_1, \dots, x_n) + K_0, \quad (A1)$$

式中 $K_0 = \ln |\Delta|$. 即 $H(y_1, \dots, y_n)$ 和 $H(x_1, \dots, x_n)$ 之间只相差一个常数, 它由系统 $G(z)$ 的参数唯一确定, 而与 x_i 无关. 考虑线性变换阵为无穷阶次的情形, 即

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} l_k x_{i-k}, \quad i = -\infty, \dots, \infty.$$

将式 (A1) 扩展到无穷多变量的情形, 由熵率的定义可得 $\bar{H}(y) = \bar{H}(x) + K$, 可知 K 也是一个只由系统 $G(z)$ 的参数唯一确定的常数. 由前面的过程可知, 当 x 是高斯过程时,

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\det G(e^{i\omega})| d\omega.$$

由于 K 是与 x 无关的常数, 因而上式对于任意分布的 x 都是成立的.

作者简介:

章辉 (1967—), 男, 浙江大学控制系教师, 分别于 1990 年、1995 年和 2003 年获浙江大学学士、硕士和博士学位, 研究方向为随机系统, 鲁棒控制, 控制系统的信息论方法等, Email: zhanghui_iip@zju.edu.cn;

孙优贤 (1940—), 男, 浙江大学教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 浙江大学工业自动化国家工程研究中心主任, 毕业于浙江大学化工系, 研究领域有鲁棒控制, 容错控制, 非线性系统, 软测量技术, 制浆造纸工业过程优化与控制等, Email: yxsun@iipc.zju.edu.cn.