

## 时域 Wiener 状态滤波新方法

邓自立

(黑龙江大学 应用数学研究所, 黑龙江大学 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 基于稳态 Kalman 滤波器和射影理论, 提出了统一和通用的时域 Wiener 状态滤波新方法, 用它得到带非零均值相关噪声线性随机系统的渐近稳定的 Wiener 状态估值器和解耦 Wiener 状态估值器. 它可统一处理状态滤波、预报和平滑问题. 发现了 Kalman 滤波器和 Wiener 滤波器之间的变换关系, Wiener 状态估值器可由 Kalman 估值器通过自回归滑动平均 (ARMA) 新息模型得到. 一个仿真例子说明了其有效性.

**关键词:** 随机系统; 状态估计; Wiener 滤波; Kalman 滤波; 时域方法

**中图分类号:** O211 **文献标识码:** A

## New approach to Wiener state filtering in time-domain

DENG Zi-li

(Institute of Applied Mathematics and Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China)

**Abstract:** Based on the steady-state Kalman filter and projection theory, a new unified and general approach to the time-domain Wiener state filtering is presented, by which the asymptotically stable Wiener state estimator and decoupled Wiener state estimators are presented for linear stochastic systems with correlated noises having non-zero means. It can handle the state filtering, prediction and smoothing problems in a unified framework. The transformation relationship between the Kalman filters and Wiener filters is discovered, the Wiener state estimators can be obtained from the Kalman estimators by means of the autoregressive moving average (ARMA) innovation model. A simulation example shows its effectiveness.

**Key words:** stochastic system; state estimation; Wiener filtering; Kalman filtering; time-domain approach

### 1 引言 (Introduction)

状态估计问题出现在许多领域, 包括信号处理, 通讯和控制<sup>[1]</sup>. 虽然 Kalman 滤波方法有广泛的应用, 但其缺点是不能统一处理滤波、预报和平滑问题. 尤其 Kalman 平滑算法较为复杂, 要求计算最优平滑初值和误差方差阵的逆矩阵<sup>[2]</sup>, 增加了计算负担. 新近文献[3, 4]用现代时间序列分析方法<sup>[5]</sup>提出了一种时域 Wiener 状态滤波方法, 可统一处理滤波、预报和平滑问题. 但要求多项式矩阵的左素和右素分解. 多项式方法<sup>[6]</sup>是一种频域 Wiener 滤波方法, 适合解决信号估计问题. 用多项式方法仅提出了一步 Wiener 状态预报器<sup>[7]</sup>和 Wiener 状态滤波器<sup>[8]</sup>, 没有解决状态平滑问题, 且该方法不仅要求多项式的左素和右素分解, 而且还要求解两个耦合的 Diophantine 方程.

本文用 Kalman 滤波方法和射影理论<sup>[9]</sup>, 提出了一种统一的和通用的时域 Wiener 状态滤波方法. 作

者发现了 Kalman 滤波器与 Wiener 滤波器之间的重要的变换关系. 新方法本质上是一种变换或转化方法, 即 Wiener 状态估值器可由 Kalman 估值器通过 ARMA 新息模型被得到. 文中提出了 ARMA 新息模型的新的构造方法. 它可用迭代法<sup>[10]</sup>求解稳态 Riccati 方程得到. 同上述其他滤波方法相比, 新方法避免了计算最优初值和误差方差阵的逆矩阵, 避免了多项式矩阵的左素和右素分解, 且避免了求解 Diophantine 方程, 可减少计算负担.

### 2 问题阐述和引理 (Problem formulation and lemmas)

考虑带非零均值相关噪声的线性离散随机系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (2)$$

其中  $t$  是离散时间,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  是状态,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  是观测,  $\Phi, \Gamma$  和  $H$  为常阵.

**假设 1**  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  和  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  是带非零均

值的相关白噪声

$$\begin{cases} Ew(t) = q_w, Ev(t) = q_v, \\ \text{cov}\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_{ij}. \end{cases} \quad (3)$$

其中  $E$  为均值号,  $\text{cov}$  为协方差号,  $T$  为转置,  $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j), Q_v > 0$ .

注意, 对定常的非零机动加速度输入的雷达跟踪系统<sup>[11]</sup>将引出带非零均值输入白噪声  $w(t)$ ; 对于传感器带常的系统偏差的系统将引出带非零均值观测噪声  $v(t)$ .

**假设 2**<sup>[9]</sup>  $(\Phi - \Gamma SQ_v^{-1}H, \Gamma \bar{Q}_w)$  为完全可稳对, 对任意  $\bar{Q}_w, \bar{Q}_w \bar{Q}_w^T = Q_w - SQ_v^{-1}S^T, (\Phi, H)$  为完全可检测对.

**假设 3** 初始观测时刻  $t_0 = -\infty$ .

Wiener 状态估计问题是基于观测  $(y(j), y(j-1), \dots)$  求状态  $x(t)$  的最优(线性最小方差)估值器  $\hat{x}(t|j)$ , 它们具有一种统一的带  $y(j)$  作为输入的传递矩阵表达式或 ARMA 递推滤波器形式. 对  $j = t, j < t$  或  $j > t$ , 各称  $\hat{x}(t|j)$  为 Wiener 状态滤波器、预报器或平滑器. 通常, 统称  $\hat{x}(t|j)$  为 Wiener 状态估值器.

### 3 ARMA 新息模型(ARMA innovation model)

假设 1~3 引出<sup>[9]</sup>存在稳态 Kalman 预报器

$$\hat{x}(t+1|t) = \Phi \hat{x}(t|t-1) + \Gamma q_w + K_p \varepsilon(t), \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - q_v - H \hat{x}(t|t-1), \quad (5)$$

$$K_p = (\Phi \Sigma H^T + \Gamma S) \hat{Q}_\varepsilon^{-1}, \quad (6)$$

$$\hat{Q}_\varepsilon = H \Sigma H^T + Q_v. \quad (7)$$

其中新息  $\varepsilon(t)$  是零均值, 方差阵为  $\hat{Q}_\varepsilon$  的白噪声, 预报误差方差阵  $\Sigma$  是如下稳态 Riccati 方程的唯一正定解:

$$\Sigma = \Phi \Sigma \Phi^T - (\Phi \Sigma H^T + \Gamma S)(H \Sigma H^T + Q_v)^{-1} \times (\Phi \Sigma H^T + \Gamma S)^T + \Gamma Q_w \Gamma^T. \quad (8)$$

它可用迭代法求解<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} \Sigma(t+1) = & \Phi \Sigma(t) \Phi^T - (\Phi \Sigma(t) H^T + \Gamma S) \times \\ & (H \Sigma(t) H^T + Q_v)^{-1} (\Phi \Sigma(t) H^T + \\ & \Gamma S)^T + \Gamma Q_w \Gamma^T, \end{aligned} \quad (9)$$

带任意初值  $\Sigma(0) = \alpha I_n, \alpha > 0, I_n$  为  $n \times n$  单位阵. 有<sup>[9]</sup>  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = \Sigma$ , 因而  $t$  充分大时有  $\Sigma(t) \approx \Sigma$ . 大量仿真结果表明上述迭代算法具有快速收敛性. 通

常当  $30 \leq t \leq 60$  时,  $\Sigma$  的误差小于  $10^{-3}$  的满意估值  $\Sigma(t)$  可被得到. 可证明<sup>[9]</sup>:  $(\Sigma(t) - \Sigma)$  按指数收敛到零.

将式(5)代入式(4)有稳态 Kalman 预报器

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) = \\ \Psi_p \hat{x}(t|t-1) + \Gamma q_w + K_p y(t) - K_p q_v. \end{aligned} \quad (10)$$

它可写为 Wiener 滤波器形式

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) = \\ (I_n - q^{-1} \Psi_p)^{-1} [\Gamma q_w - K_p q_v + K_p y(t)]. \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $q^{-1}$  为单位滞后算子,  $q^{-1} \theta(t) = \theta(t-1)$ , 且

$$\Psi_p = \Phi - K_p H \quad (12)$$

是一个稳定矩阵<sup>[9]</sup>, 即  $\Psi_p$  的所有特征值位于单位圆内.

将式(11)代入式(5)并应用矩阵求逆 Leverrier-Fadeeva 公式<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} (I_n - q^{-1} \Psi_p)^{-1} &= F(q^{-1}) / \Psi(q^{-1}), \\ \begin{cases} \Psi(q^{-1}) = 1 + \Psi_1 q^{-1} + \dots + \Psi_n q^{-n}, \\ F(q^{-1}) = I_n + F_1 q^{-1} + \dots + F_{n-1} q^{-(n-1)}, \\ \Psi_i = -(1/i) \text{tr}(\Psi_p F_{i-1}), i = 1, \dots, n, \\ F_i = \Psi_p F_{i-1} + \Psi_i I_n, F_0 = I_n, i = 1, \dots, n-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\Psi(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1} \Psi_p), F(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1} \Psi_p)$ , 容易得到如下定理 1:

**定理 1** 系统(1),(2)在假设 1~3 下有 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = \Psi(q^{-1})\varepsilon(t) + \rho. \quad (15)$$

其中定义多项式矩阵  $A(q^{-1})$  和常向量  $\rho$  为

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= \Psi(q^{-1})I_m - HF(q^{-1})K_p q^{-1}, \\ \rho &= HF(1)\Gamma q_w + \Psi(1)q_v - HF(1)K_p q_v, \end{aligned} \quad (16)$$

### 4 稳态最优 Kalman 预报器和平滑器 (Steady-state optimal Kalman predictor and smoother)

本节提出新的稳态最优 Kalman 预报器和平滑器如下:

**定理 2** 系统(1),(2)在假设 1~3 下, 有稳态最优 Kalman 预报器  $\hat{x}(t|t+N) (N \leq -2)$  为

$$\hat{x}(t|t+N) = \Phi^{-N-1} \hat{x}(t+N+1|t+N) + b_N, \quad (17)$$

$$b_N = \sum_{j=0}^{-N-2} \Phi^j \Gamma q_w. \quad (18)$$

证 由式(1)和射影性质有<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} \hat{x}(t|t-2) = \Phi\hat{x}(t-1|t-2) + \Gamma q_w, \\ \hat{x}(t|t-3) = \\ \Phi\hat{x}(t-1|t-3) + \Gamma q_w = \\ \Phi[\Phi\hat{x}(t-2|t-3) + \Gamma q_w] + \Gamma q_w = \\ \Phi^2\hat{x}(t-2|t-3) + \Phi\Gamma q_w + \Gamma q_w. \end{cases} \quad (19)$$

用归纳法得式(17)和(18). 证毕.

**定理 3** 系统(1),(2)在假设 1~3 下,有稳态最优 Kalman 滤波器和平滑器  $\hat{x}(t|t+N)$  ( $N \geq 0$ ) 为  $\hat{x}(t|t+N) = \hat{x}(t|t+N-1) + M_N \epsilon(t+N)$ ,  $(20)$

$$M_N = \Sigma[(\Phi - K_p H)^T]^N H^T Q_\epsilon^{-1}, \quad (21)$$

带初值  $\hat{x}(t|t-1)$ .

**证** 当  $N = 0$  时,文献[9]已证明了稳态 Kalman 滤波器增益  $M_0 = \Sigma H^T Q_\epsilon^{-1}$ ,故定理 3 对  $N = 0$  成立.对  $N > 0$ ,应用射影公式<sup>[9]</sup>有式(20),其中

$$M_N = E[x(t+1)\epsilon^T(t+N)]Q_\epsilon^{-1}. \quad (22)$$

由式(2)和(5)有

$$\epsilon(t) = H\tilde{x}(t|t-1) + v_c(t). \quad (23)$$

其中定义  $\tilde{x}(t|t-1) = x(t) - \hat{x}(t|t-1)$ ,  $v_c(t) = v(t) - q_v$ .由式(1)减式(4)引出

$$\tilde{x}(t+1|t) = \Phi\tilde{x}(t|t-1) + \Gamma w_c(t) - K_p \epsilon(t). \quad (24)$$

其中定义  $w_c(t) = w(t) - q_w$ .将式(23)代入式(24)有

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1|t) = \\ (\Phi - K_p H)\tilde{x}(t|t-1) + \Gamma w_c(t) - K_p v_c(t). \end{aligned} \quad (25)$$

由式(25)迭代引出

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+N|t+N-1) = \\ (\Phi - K_p H)^N \tilde{x}(t|t-1) + \\ \sum_{i=t+1}^{t+N} (\Phi - K_p H)^{t+N-i} [\Gamma w_c(i-1) - K_p v_c(i-1)]. \end{aligned} \quad (26)$$

注意  $x(t)$  不相关于  $v_c(t+N)$  ( $N \geq 1$ ),应用式(23)可将式(22)化为

$$M_N = E[x(t)\tilde{x}^T(t+N|t+N-1)]H^T Q_\epsilon^{-1}. \quad (27)$$

将式(26)代入式(27)中,注意由式(1)和(2)知  $x(t)$  不相关于  $w_c(t), w_c(t+1), \dots, v_c(t), v_c(t+1), \dots$ ,  $x(t) = \hat{x}(t|t-1) + \tilde{x}(t|t-1)$ ,且由射影正交性有  $\hat{x}(t|t-1)$  不相关(正交)于  $\tilde{x}(t|t-1)$ ,则立刻得到式(21),其中定义  $\Sigma = E[\tilde{x}(t|t-1)\tilde{x}^T(t|$

$t-1)]$ . 证毕.

这里提出的 Kalman 平滑增益新算法(21)的优点是避免了计算误差方差阵的逆矩阵<sup>[2]</sup>.

## 5 Wiener 状态估值器 (Wiener state estimators)

**定理 4** 系统(1),(2)在假设 1~3 下,有渐近稳定的统一的 Wiener 状态估值器  $\hat{x}(t|t+N)$  为  $\Psi_N(q^{-1})\hat{x}(t|t+N) = K_N(q^{-1})y(t+N) + \rho_N$ .  $(28)$

其中,对  $N \geq 0$  有

$$\begin{cases} \Psi_N(q^{-1}) = \Psi(q^{-1}), \\ K_N(q^{-1}) = M_N(q^{-1})A(q^{-1}) + F(q^{-1})K_p q^{-1-N}, \\ \rho_N = F(1)\Gamma q_w - F(1)K_p q_v - M_N(1)\rho, \\ M_N(q^{-1}) = \sum_{i=0}^N M_i q^{i-N}; \end{cases} \quad (29)$$

对  $N = -1$  有

$$\begin{cases} \Psi_{-1}(q^{-1}) = I_n - q^{-1}\Psi_p, \\ K_{-1}(q^{-1}) = K_p, \\ \rho_{-1} = \Gamma q_w - K_p q_v; \end{cases} \quad (30)$$

对  $N < -1$  有

$$\begin{cases} \Psi_N(q^{-1}) = \Psi(q^{-1}), \\ K_N(q^{-1}) = \Phi^{-N-1}F(q^{-1})K_p, \\ \rho_N = \Phi^{-N-1}F(1)[\Gamma q_w - K_p q_v] + \Psi(1)b_N. \end{cases} \quad (31)$$

**证** 对  $N \geq 0$ ,由式(20)迭代有非递推稳态最优滤波器和平滑器

$$\hat{x}(t|t+N) = \hat{x}(t|t-1) + \sum_{i=0}^N M_i \epsilon(t+i). \quad (32)$$

由在式(29)中  $M_N(q^{-1})$  的定义可将式(32)写为

$$\hat{x}(t|t+N) = \hat{x}(t|t-1) + M_N(q^{-1})\epsilon(t+N). \quad (33)$$

由式(15)有

$$\epsilon(t+N) = \Psi^{-1}(q^{-1})[A(q^{-1})y(t+N) - \rho]. \quad (34)$$

将式(11),(13)和(34)代入式(33)引出式(28)和(29)成立.对  $N = -1$ ,由式(11)引出式(28)和(30)成立.对  $N < -1$ ,应用式(11)和(13)有

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+N+1|t+N) = \\ \Psi^{-1}(q^{-1})F(q^{-1})[\Gamma q_w - K_p q_v + K_p y(t+N)]. \end{aligned} \quad (35)$$

将它代入式(17)引出式(28)和(31)成立.因  $\Psi_p$  为稳

定矩阵<sup>[9]</sup>, 则  $\Psi(q^{-1})$  为稳定的多项式(即  $\Psi(x)$  的所有零点位于单位圆外), 因而  $\Psi_N(q^{-1})$  为稳定的多项式矩阵(即  $\det \Psi_N(x)$  的所有零点位于单位圆外). 故 Wiener 状态估值器式(28)是渐近稳定的.

证毕.

**注 1** 由 Wiener 状态估值器(28)的渐近稳定性, 估值器(28)的初值可任意选取, 当  $t$  增大时, 其影响渐渐消失<sup>[10]</sup>. 式(28)也可写成传递矩阵形式

$$\hat{x}(t | t+N) = \Psi_N^{-1}(q^{-1})K_N(q^{-1})y(t+N) + c_N, \quad (36)$$

带输入  $y(t+N)$  和  $c_N = \Psi_N^{-1}(1)\rho_N$ .

**推论** 在定理 3 条件下, 若  $q_w = 0, q_r = 0$ , 则渐近稳定的 Wiener 状态估值器为

$$\Psi_N(q^{-1})\hat{x}(t | N) = K_N(q^{-1})y(t+N). \quad (37)$$

**定理 5** 系统(1), (2)在假设 1~3 下, 有渐近稳定的固定区间 Wiener 状态平滑器  $\hat{x}(t | N)$  为

$$\Psi(q^{-1})\hat{x}(t | N) = K_{N,t}(q^{-1})y(N) + \rho_N. \quad (38)$$

其中  $t = 0, 1, \dots, N$ , 并且  $N$  为大的正整数, 称固定区间长度,  $\Psi(q^{-1})$  仅对  $\hat{x}(t | N)$  的时标  $t$  运算,  $K_{N,t}(q^{-1})$  仅对  $y(N)$  的时标  $N$  运算. 定义多项式矩阵  $K_{N,t}(q^{-1}), M_{N,t}(q^{-1})$  和向量  $\rho_N$  为

$$\begin{cases} K_{N,t}(q^{-1}) = M_{N,t}(q^{-1})A(q^{-1}) + F(q^{-1})K_p q^{t-1-N}, \\ M_{N,t}(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{N-t} M_i q^{i-(N-t)}, \\ \rho_N = F(1)(\Gamma q_w - K_p q_r) - M_{N,t}(1)\rho. \end{cases} \quad (39)$$

**证** 由式(20)迭代有非递推最优固定区间平滑器

$$\hat{x}(t | N) = \hat{x}(t | t-1) + \sum_{i=0}^{N-t} M_i \varepsilon(t+i). \quad (40)$$

由式(39)中多项式矩阵  $M_{N,t}(q^{-1})$  的定义, 式(40)可改写为

$$\hat{x}(t | N) = \hat{x}(t | t-1) + M_{N,t}(q^{-1})\varepsilon(N). \quad (41)$$

由式(15)有  $\varepsilon(N) = \Psi^{-1}(q^{-1})[A(q^{-1})y(N) - \rho]$ , 将它和式(11)及(13)代入式(41)整理后可得式(38)和(39). 因  $\Psi(q^{-1})$  为稳定的多项式, 故式(38)是渐近稳定的. 证毕.

**注 2** 固定区间 Wiener 状态平滑器(38)的特点是多项式矩阵  $M_{N,t}(q^{-1})$  和  $K_{N,t}(q^{-1})$  的阶次是时变的. 当固定区间长度  $N$  较大时, 例如  $N > 100$ , 则当  $t = 0, 1, 2, \dots$  较小时  $K_{N,t}(q^{-1})$  将是一个阶次非常高的多项式矩阵, 带来了计算的复杂性, 但由式(12)和(21)有系数阵  $M_i$  为

$$M_i = \Sigma(\Psi_p^T)^i H^T Q_\varepsilon^{-1}. \quad (42)$$

因  $\Psi_p$  为稳定矩阵<sup>[9]</sup>, 则有  $\Psi_p^T$  亦为稳定矩阵, 且与  $\Psi_p$  有相

同的特征值, 故当  $i \rightarrow \infty$  时有  $(\Psi_p^T)^i \rightarrow 0$ , 进而  $M_i \rightarrow 0$ . 当  $i$  充分大, 例如  $i > m_0$ , 可近似认为  $M_i \approx 0$ . 现对多项式矩阵  $K_{N,t}(q^{-1})$  的阶次在  $m_0$  处截断, 由定理 5 引出如此次优固定区间 Wiener 状态平滑器.

**定理 6** 系统(1), (2)在假设 1~3 下有渐近稳定的次优固定区间 Wiener 状态平滑器  $\hat{x}_s(t | N)$  为

$$\Psi(q^{-1})\hat{x}_s(t | N) = K_{N,t}^s(q^{-1})y(t+N) + \rho_N^s. \quad (43)$$

其中  $t = 0, 1, \dots, N$ , 定义次优多项式矩阵  $K_{N,t}^s(q^{-1}), M_{N,t}^s(q^{-1})$  和向量  $\rho_N^s$  为

$$\begin{cases} K_{N,t}^s(q^{-1}) = M_{N,t}^s(q^{-1})A(q^{-1}) + F(q^{-1})K_p q^{t-1-N}, \\ M_{N,t}^s(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{\min(N-t, m_0)} M_i q^{i-(N-t)}, \\ \rho_N^s = F(1)(\Gamma q_w - K_p q_r) - M_{N,t}^s(1)\rho. \end{cases} \quad (44)$$

**注 3** 截首阶次  $m_0$  的选取与  $\Psi_p$  的特征值的位置有关, 若  $\Psi_p$  的所有特征值靠近原点, 则当  $i$  增大时,  $M_i$  将快速趋于零, 因而  $m_0$  可取较小的正整数即可, 例如  $m_0$  取为 6~10 左右. 当  $\Psi_p$  有靠近单位圆周的 eigenvalue 时, 当  $i$  增大时,  $M_i$  将缓慢趋于零. 因此应当适当增大  $m_0$  方能达到所要求的精度.

**定理 7** 系统(1), (2)在假设 1~3 下, Wiener 状态滤波器和平滑器的误差  $\tilde{x}(t | t+N) = x(t) - \hat{x}(t | t+N)$  的方差阵  $P_N = E[\tilde{x}(t | t+N)\tilde{x}^T(t | t+N)]$  为

$$P_N = \Sigma - \sum_{i=0}^N M_i Q_\varepsilon M_i^T, \quad N \geq 0. \quad (45)$$

Wiener 状态预报器的方差阵  $P_N$  为

$$P_N = \Phi^{-N-1} \Sigma (\Phi^T)^{-N-1} + \sum_{j=0}^{-N-2} \Phi^j \Gamma Q_w \Gamma^T (\Phi^j)^T, \quad N < -1. \quad (46)$$

且规定  $P_{-1} = \Sigma$ .

**证** 当  $N \geq 0$  时, 由式(32)有

$$\tilde{x}(t | t-1) = \tilde{x}(t | t+N) + \sum_{i=0}^N M_i \varepsilon(t+i). \quad (47)$$

由射影性质有  $\tilde{x}(t | t+N)$  不相关(正交)于  $\varepsilon(t+N), \varepsilon(t+N-1), \dots, \varepsilon(t)$ , 因而有

$$\Sigma = P_N + \sum_{i=0}^N M_i Q_\varepsilon M_i^T. \quad (48)$$

这引出式(45). 当  $N < -1$  时, 由式(1)迭代有关系

$$x(t) = \Phi^{-N-1} x(t+N+1) + \sum_{j=0}^{-N-2} \Phi^j \Gamma w(t-j-1). \quad (49)$$

由式(49)减式(18)引出

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t | t + N) = \\ \Phi^{-N-1} \tilde{x}(t + N + 1 | t + N) + \sum_{j=0}^{-N-2} \Phi^j \Gamma w_c(t - j - 1). \end{aligned} \quad (50)$$

其中  $w_c(i) = w(i) - q_w$ , 注意当  $N < -1$  时,  $\tilde{x}(t + N | t + N + 1)$  不相关于  $w_c(t + N + 1), \dots, w_c(t - 1)$ , 这引出式(46). 证毕.

记状态  $x(t)$  的分量表示为  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ , 则有如下解耦 Wiener 状态估值器.

**定理 8** 系统(1), (2)在假设 1~3 下, 有状态分量的解耦 Wiener 状态估值器  $\hat{x}_i(t | t + N)$  为

$$\Psi(q^{-1}) \hat{x}_i(t | t + N) = K_{Ni}(q^{-1}) y(t + N) + \rho_{Ni}. \quad (51)$$

其中  $i = 1, \dots, n$ , 当  $N \geq 0$  和  $N < -1$  时,  $K_N(q^{-1})$  和  $\rho_N$  由式(29)和(31)定义; 当  $N = -1$  时, 定义

$$\begin{aligned} K_{-1}(q^{-1}) &= F(q^{-1}) K_p, \\ \rho_{-1} &= F(1)(\Gamma q_w - K_p q_v), \end{aligned} \quad (52)$$

且将  $K_N(q^{-1})$  和  $\rho_N$  分块表示为

$$K_N(q^{-1}) = \begin{bmatrix} K_{N1}(q^{-1}) \\ \vdots \\ K_{Nn}(q^{-1}) \end{bmatrix}, \quad \rho_N = \begin{bmatrix} \rho_{N1} \\ \vdots \\ \rho_{Nn} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

其中  $K_{Ni}(q^{-1})$  为  $1 \times m$  多项式矩阵,  $\rho_{Ni}$  为标量.

**证** 由定理 4 的分量形式得定理 8.

**注 4** 在某些实际应用问题中, 人们仅对状态的某个分量或某几个分量的估计感兴趣, 应用此解耦定理可避免对不感兴趣的状态分量的估计, 从而减小了计算负担.

## 6 仿真例子(Simulation example)

考虑带相关噪声系统

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (54)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t) + v(t), \quad (55)$$

$$v(t) = 0.5w(t) + \xi(t). \quad (56)$$

其中  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ ,  $w(t)$  和  $\xi(t)$  是零均值, 方差各为  $Q_w = 5$  和  $Q_\xi = 1$  的独立 Gaussian 白噪声. 这引出  $Q_v = 2.25$ ,  $S = 2.5$ . 问题求 Wiener 状态预报器  $\hat{x}(t | t - 2)$  和平滑器  $\hat{x}(t | t + 2)$ .

用迭代方程(9)解 Riccati 方程(8)可求得

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 11.3541 & 5.7475 \\ 5.7475 & 2.9157 \end{bmatrix}, \quad K_p = \begin{bmatrix} 1.2660 \\ 0.6062 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

由定理 4 的推论, 取  $N = -2$  和  $N = 2$ , 有 Wiener 状态预报器和平滑器分别为

$$(1 - 0.6840q^{-1} - 0.1645q^{-2}) \hat{x}(t | t - 2) =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1.3542 \\ 0.6062 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.2027 \\ 0.5759 \end{bmatrix} q^{-1} \right\} y(t - 2) \quad (58)$$

和

$$\begin{aligned} (1 - 0.6840q^{-1} - 0.1645q^{-2}) \hat{x}(t | t + 2) = \\ \left\{ \begin{bmatrix} 0.0291 \\ 0.0148 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2149 \\ 0.1088 \end{bmatrix} q^{-1} + \begin{bmatrix} 1.1706 \\ 0.5924 \end{bmatrix} q^{-2} - \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0.5117 \\ 0.2935 \end{bmatrix} q^{-3} - \begin{bmatrix} 0.3216 \\ 0.1746 \end{bmatrix} q^{-4} \right\} y(t + 2). \end{aligned} \quad (59)$$

仿真结果如图 1~图 4 所示, 其中实线表示  $x(t)$  的真值, 虚线表示估值  $\hat{x}(t | t - 2)$  或  $\hat{x}(t | t + 2)$ . 可看到估值器有较高的精度, 且  $\hat{x}(t | t + 2)$  的精度比  $\hat{x}(t | t - 2)$  高.

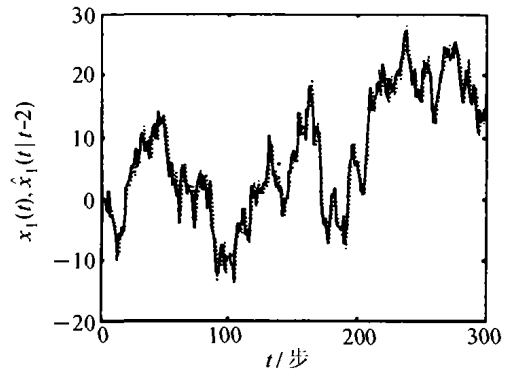


图 1 状态  $x_1(t)$  和 Wiener 预报器  $\hat{x}_1(t | t - 2)$   
Fig. 1 State  $x_1(t)$  and Wiener predictor  $\hat{x}_1(t | t - 2)$

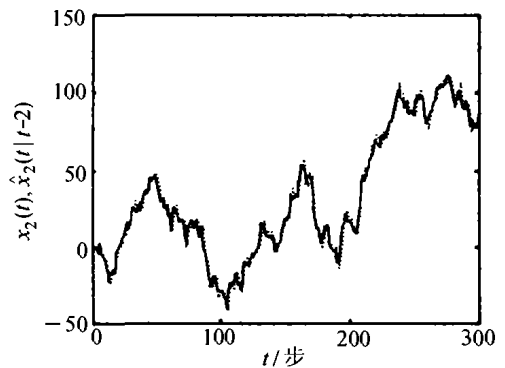


图 2  $x_2(t)$  和 Wiener 预报器  $\hat{x}_2(t | t - 2)$   
Fig. 2 State  $x_2(t)$  and Wiener predictor  $\hat{x}_2(t | t - 2)$

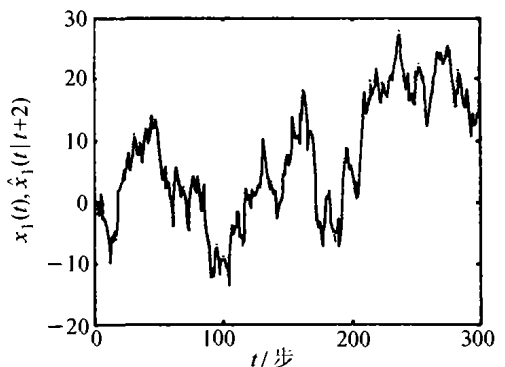


图 3 状态  $x_1(t)$  和 Wiener 平滑器  $\hat{x}_1(t | t + 2)$   
Fig. 3 State  $x_1(t)$  and Wiener smoother  $\hat{x}_1(t | t + 2)$

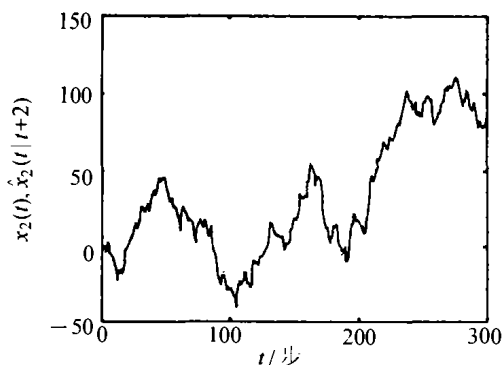


图4 状态  $x_2(t)$  和 Wiener 平滑器  $\hat{x}_2(t | t+2)$

Fig. 4 State  $x_2(t)$  and Wiener smoother  $\hat{x}_2(t | t+2)$

## 7 结论(Conclusion)

基于 Kalman 滤波器,本文提出了解决状态估计问题的统一和通用的时域 Wiener 滤波新方法.关键问题是如何变换稳态 Kalman 估值器到相应的 Wiener 状态估值器.关键技术是基于稳态 Kalman 预报器构造 ARMA 新息模型.渐近稳定的 Wiener 状态估值器可由稳态 Kalman 估值器通过 ARMA 新息模型得到.文中提出了基于 Riccati 方程迭代解构造 ARMA 新息模型的新算法. ARMA 新息模型是实现 Kalman 估值器到 Wiener 状态估值器转化的桥梁.因此本文提出的新方法本质上是一种转化或变换方法,同经典 Kalman 滤波方法相比<sup>[9]</sup>,避免了求最优初值和误差方差阵的逆矩阵;同现代时间序列分析方法提出的时域 Wiener 方法相比<sup>[3,4]</sup>,避免了多项式矩阵左素和右素分解,避免了用 Gevers-Wouters 算法构造 ARMA 新息模型;同多变量频域多项式算法相比,避免了求解 Diophantine 方程和多项式矩阵的左素和右素分解,且可统一处理状态滤波、平滑和预报问题.特别,所提出的解耦 Wiener 状态估值器在某些应用中可减小计算负担.当信号模型用状态空间模型描写时<sup>[12]</sup>,本文结果也可用于解决信号估计问题.因此,新方法为解决状态和信号的最优估计问题提供了一种统一的和通用的工具.

## 参考文献(References):

[1] MENDEL J M. *Lessons in Estimation Theory for Signal Processing*,

*Communications and Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.

[2] MEDITCH J S. *Optimal Linear Estimation and Control* [M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.

[3] DENG Zili, XU Yan. Descriptor Wiener state estimators [J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1761 – 1766.

[4] 邓自立, 张明波. 统一的和通用的 Wiener 状态滤波器[J]. *自动化学报*, 2002, 28(3): 427 – 430.

(DENG Zili, ZHANG Mingbo. Unified and universal Wiener state filters [J]. *Acta Automatic Sinica*, 2002, 28(3): 427 – 430.)

[5] DENG Zili, ZHANG H S, LIU S J, et al. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems [J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 199 – 216.

[6] AHLEN A, STERNAD M. Wiener filter design using polynomial equations [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1991, 39(11): 2387 – 2398.

[7] CHISCI L, MOSCA E. Polynomial equations for the linear MMSE state estimation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(5): 623 – 626.

[8] GRIMBLE M J.  $H_2$  inferential filtering, prediction and smoothing with application to rolling mill gage estimation [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1994, 42(8): 2079 – 2093.

[9] ANDERSON B D O, MOORE J B. *Optimal Filtering* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979.

[10] 邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

(DENG Zili. *Kalman Filtering and Wiener Filtering-Modern Time Series Analysis Method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001.)

[11] 邓自立, 秦滨. 带机动输入诊断和估计的自校正  $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$  跟踪滤波器[J]. *信息与控制*, 1992, 21(4): 201 – 205.

(DENG Zili, QIN Bin. A self-tuning  $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$  tracking filter with a maneuvering input decision and estimation [J]. *Information & Control*, 1992, 21(4): 201 – 205.)

[12] DENG Zili. Time-domain approaches to multichannel optimal deconvolution [J]. *Int J of Systems Science*, 2000, 31(6): 787 – 796.

## 作者简介:

邓自立 (1938 —), 男, 黑龙江大学应用数学研究所和自动化系教授, 主要研究方向为状态估计, 最优滤波, 信号处理等, E-mail: dzl@hlju.edu.cn.