文章编号：1000-8152(2004)03-0379-07

平方可积函数解析分解的构造性证明

徐跃良[1]，李　治[2]
（1. 西南交通大学 应用数学系，四川 成都 610031；2. 西南交通大学 电气工程学院，四川 成都 610031）

摘要：在 H_∞ 控制理论及应用其理论进行设计中，经常用到结论：在虚轴上定义的平方可积函数分别与在开左、右半平面解析且一致平方可积函数的相互对应关系．但由于此结果的证明较多地用到不同学科的数学结论，故很难找到其详尽的证明．应用构造性方法，找出了它们间相互对应的数学表达式，并详细证明了这个表达式的准确性，证明了这种关系是一一对应的．

关键词：解析；调和函数；Lebesgue 可积函数
中图分类号：O231　　**文献标识码**：A

Constructive proof about quadratic integrable function decomposition into analytic function

XU Yue-liang[1], LI Zhi[2]
(1. Department of Applied mathematic, Southwest Jiao Tong University, Chengdu Sichuan 610031, China;
2. School of Electrical Engineering, Southwest Jiao Tong University, Chengdu Sichuan 610031, China)

Abstract: In H-infinity control theory and control system design with the theory, the quadratic integration function defined on imaginary axis is often decomposed into analytic functions on right half-plane and left half-plane respectively. However, there is no strict proof because of the conclusion using many mathematic theories in different subject. A one-to-one connection among these functions is established and proved in detail.

Key words: analytic; harmonic function; Lebesgue integrable

1　符号说明及问题简述(Statement of the problem and note of sign)

1.1　符号说明(Note of sign)

L_2：在所有频率上有定义，取值于 $\mathbb{C}^n$，且对 ω (Lebesgue)平方可积的复函数向量 $x(\mathrm{i}\omega)$ 的全体所构成的空间，即满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}^{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\omega)x(\mathrm{i}\omega)\mathrm{d}\omega < +\infty.$$

H_2：是在开右半平面 $\mathrm{Re}\ s > 0$ 上解析，在 $\mathbb{C}^n$ 上取值，且满足如下一致平方可积(Lebesgue 平方可积)函数向量 $x(s)$ 的全体所构成的空间，所谓一致平方可积是指

$$\left\{\sup_{\zeta>0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|x(\zeta+\mathrm{i}\omega)\|^2\mathrm{d}\omega\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$H_2^{\perp}$：是在开左半平面 $\mathrm{Re}\ s < 0$ 上解析，在 $\mathbb{C}^n$ 上取值，且满足如下一致平方可积(Lebesgue 平方可积)函数向量 $x(s)$ 的全体所构成的空间，即满足条件

$$\left\{\sup_{\zeta<0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|x(\zeta+\mathrm{i}\omega)\|^2\mathrm{d}\omega\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

L^p：在 $\mathbb{R}$ 上有定义，取值于 $\mathbb{R}$ 上的满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x < +\infty$ 的函数的全体．

$\|f\|_p$：

$$\|f\|_p = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}},\ f(x)\in L^p.$$

$P_x(y-t)$：Poisson 积分核．

$$P_x(y-t) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}.$$

$\|u(x,y)\|_{L^p}(\mathrm{d}y)$：对于任意给定的 $x>0$，二元实函数 $u(x,y)\in L^p$，

$$\|u(x,y)\|_{L^p}(\mathrm{d}y) = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,y)|^p\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

1.2　问题的简述(Statement of the problem)

在有关 H_∞ 控制理论的许多专著中，所用结论

收稿日期：2002-02-06；收修改稿日期：2003-09-11．

$L_2 = H_2 \oplus H_2^{\perp}$ 或给予默认,如文献[1,2];或只给出简单说明,如文献[3,4];所引用专著如文献[5,6]也不能直接得此结果,只能得出 L_2 与 H_2 之间的相互转换关系,即 H_2 是 L_2 的一个闭子空间及 L_2 中的函数与一调和函数之间的对应关系,没有真正建立 L_2 与 H_2 及 $H_2^{\perp}$ 之间的相互关系.本文将详细建立它们之间的相互关系. $L_2, H_2, H_2^{\perp}$ 都是 n 维的向量函数空间且满足如下性质:

性质 1 $\boldsymbol{x}(\mathrm{i}\omega) \in L_2$,当且仅当 $\boldsymbol{x}(\mathrm{i}\omega)$ 的 n 个分量函数中的每一个 $x_k(\mathrm{i}\omega)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| x_k(\mathrm{i}\omega) \|^2 \mathrm{d}\omega =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}_k(\mathrm{i}\omega) x_k(\mathrm{i}\omega) \mathrm{d}\omega < +\infty,\ k = 1,2,\cdots,n.$$

性质 2 $\boldsymbol{x}(\zeta + \mathrm{i}\omega) \in H_2$,当且仅当它的每一个分量函数 $x_k(\zeta + \mathrm{i}\omega)$ 满足:$x_k(\zeta + \mathrm{i}\omega)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 上解析,且

$$\left\{\sup_{\zeta>0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \| x_k(\zeta + \mathrm{i}\omega) \|^2 \mathrm{d}\omega\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

$k = 1,2,\cdots,n.$

性质 3 $\boldsymbol{x}(\zeta + \mathrm{i}\omega) \in H_2^{\perp}$,当且仅当它的每一个分量函数 $x_k(\zeta + \mathrm{i}\omega)$ 满足:在开左半平面 $\mathrm{Re}\, s < 0$ 上解析,且

$$\left\{\sup_{\zeta<0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \| x_k(\zeta + \mathrm{i}\omega) \|^2 \mathrm{d}\omega\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

$k = 1,2,\cdots,n.$

性质 4 如果设 $x_k(\mathrm{i}\omega) = x_{1k}(\mathrm{i}\omega) + \mathrm{i}x_{2k}(\mathrm{i}\omega)$,其中 $x_{1k}(\mathrm{i}\omega), x_{2k}(\mathrm{i}\omega)$ 是定义在所有频率上取值于 $\mathbb{R}$ 中的 Lebesgue 可测函数,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| x_k(\mathrm{i}\omega) \|^2 \mathrm{d}\omega < +\infty \text{ 当且仅当}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{lk}^2(\mathrm{i}w) \mathrm{d}\omega < +\infty,\ l = 1,2.$$

由于以上性质的成立,故只要对 $n = 1$ 的情况给出 $L_2 = H_2 \oplus H_2^{\perp}$ 的证明,即可推出一般情况下也成立.

2 问题的证明(Proof of the problem)

问题的证明分两步:

第1步 设 $f(t) \in L_2 \Rightarrow$ 存在 $F_1(z) \in H_2$ 及 $F_2(z) \in H_2^{\perp}$(注:本文中 $z = x + \mathrm{i}y$),使 $f(y) = \lim\limits_{x\to 0^+}(F_1(x + \mathrm{i}y) + F_2(-x + \mathrm{i}y))$(a.e.).本文用构造性方法给出了 $F_1(z), F_2(z)$ 的具体形式,即下面的定理3.实际上,由本文的定理5可知

$$\lim_{x\to 0^+}[F_1(x + \mathrm{i}y) + F_2(-x + \mathrm{i}y)] =$$

$$\lim_{x\to 0^+} F_1(x + \mathrm{i}y) + \lim_{x\to 0^-} F_2(x + \mathrm{i}y)).$$

为了证明定理3,建立了下面的引理1~4及定理1、定理2.引理1~4及定理1证明了对于任一实值函数 $f(t) \in L^2$,由引理1中建立的函数 $F(z) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \mathrm{i}t} f(t)\mathrm{d}t$ 必属于 H_2.定理2证明了本文构造性方法给出的 $F_1(z)$ 及 $F_2(z)$ 分别在开右半平面及开左半平面上解析.

第2步 对 $F_1(z) \in H_2$ 及 $F_2(z) \in H_2^{\perp}$,有

$$\lim_{x\to 0^+} F_1(x + \mathrm{i}y) \in L_2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} F_2(x + \mathrm{i}y) \in L_2,$$

从而, $\lim\limits_{x\to 0^+}[F_1(x + \mathrm{i}y) + F_2(-x + \mathrm{i}y)] \in L_2$,即下面的定理5.为了证明定理5,本文通过引理5~引理8及定理4给出证明,引理5~引理8是为定理4的证明作准备.定理4的证明中也给出了怎样得到 L^2 中的函数 $f_1(t), f_2(t)$ 使与已给 H_2 中的 $F(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 满足

$$u(x,y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y - t) f_1(t)\mathrm{d}t,$$

$$v(x,y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y - t) f_2(t)\mathrm{d}t.$$

引理 1 设 $f(t) \in L^p(p > 1)$,则 $F(z) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \mathrm{i}t} f(t)\mathrm{d}t$ 在开右半平面上($\mathrm{Re}z > 0, z = x + \mathrm{i}y$)是解析的.

证 因

$$\left|\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - \mathrm{i}t)^2} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{(z+\Delta z - \mathrm{i}t)(z-\mathrm{i}t)} - \frac{1}{(z-\mathrm{i}t)^2}\right| |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{(z + \Delta z - \mathrm{i}t)(z - \mathrm{i}t)} - \frac{1}{(z - \mathrm{i}t)^2}\right|^q \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{q}} \cdot$$

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\Delta z}{(z + \Delta z - \mathrm{i}t)(z - \mathrm{i}t)^2}\right|^q \mathrm{d}t =$$

$$|\Delta z|^q \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2 + (y - t)^2}\right)^q \cdot$$

$$\left(\frac{1}{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y - t)^2}\right)^{\frac{q}{2}} \mathrm{d}t \leqslant$$

$$|\Delta z|^q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + (y-t)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{1-q} \cdot \left(\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^q \mathrm{d}t$$

$$\left(\text{当}\ |\Delta x| < \frac{x}{2}\ \text{时}\right).$$

对给定的开右半平面上点 $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+(y-t)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{1-q} \cdot \left(\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^q \mathrm{d}t$$

是有界的,从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\Delta z}{(z+\Delta z-\mathrm{i}t)(z-\mathrm{i}t)^2}\right|^q \mathrm{d}t \to 0\ (\Delta z \to 0),$$

即

$$F'(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\mathrm{i}t)^2} f(t)\mathrm{d}t(\text{这里}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

推论 1 设 $f(t) \in L^p$,则 $u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y - t)f(t)\mathrm{d}t$ 在开右半平面上是调和函数.

证 由于 $u(x,y) = \mathrm{Re}F(z)$,但 $F(z)$ 在开右半平面上是解析的,从而其实部在开右半平面上是调和函数.

引理 2 设 $f(x) \in L^p$ 的实值函数,

$$u(x,y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t,$$

则对任意的 $x > 0$,

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|^p \mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p.$$

证 由

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|^p \mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t\right|^p \mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} P_x^p(t)\,|f^p(y-t)|\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f^p(y-t)|\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}t,$$

而

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f^p(y-t)|\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f^p(y)|\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p,$$

所以

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|^p \mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_p \cdot P_x(t)\mathrm{d}t = \|f\|_p.$$

引理 3 设 $f(x) \in L^p$,则在 $f(x)$ 的 Lebegue 点 y 处有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t \to f(y)\ (x \to 0^+).\quad (1)$$

证 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}\mathrm{d}t = 1(x > 0),$$

又因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t - f(y) =$$

$$\int_{|t|<\delta} P_x(t)[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}t +$$

$$\int_{|t|\geqslant\delta} P_x(t)[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}t,$$

下证

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{|t|\geqslant\delta} P_x(t)[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}y = 0.\quad (2)$$

由于

$$\int_{|t|\geqslant\delta} P_x(t)f(y)\mathrm{d}t =$$

$$f(y)\int_{|t|\geqslant\delta} \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t \to 0\ (x \to 0^+),$$

$$\left|\int_{|t|\geqslant\delta} \frac{x}{x^2+t^2} f(y-t)\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\left[\int_{|t|\geqslant\delta} \left|\frac{x}{x^2+t^2}\right|^q \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_{|t|\geqslant\delta} |f(y-t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}},$$

因 $\left[\int_{|t|\geqslant\delta} |f(y-t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f(t)\|_p$,

$$\int_{|t|\geqslant\delta} \left|\frac{x}{x^2+t^2}\right|^q \mathrm{d}t =$$

$$\int_{|t|\geqslant\delta} \frac{x}{x^2+t^2} \cdot \left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)^{q-1} \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\left(\frac{x}{x^2+\delta^2}\right)^{q-1}\int_{|t|\geqslant\delta} \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t \to 0,\ x \to 0^+,$$

从而式(2)成立.

再证

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{|t|<\delta} P_x(t)[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}t = 0.\quad (3)$$

由于 $f(t) \in L^p$,故 $f(t)$ 在任一有限区间上是一次可积的,现考虑

$$\int_0^\delta P_x(t)[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^x \frac{x}{x^2+t^2}[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}t +$$

$$\int_x^\delta \frac{x}{x^2+t^2}[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}t,$$

而

$$\left|\int_0^x \frac{x}{x^2+t^2}[f(y-t) - f(y)]\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\int_0^x \frac{1}{x}\,|f(y-t) - f(y)|\,\mathrm{d}t.$$

因 y 是 $f(t)$ 的 Lebesgue 点,则

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x |f(y-t)-f(y)|\,\mathrm{d}t=0.$$

由于

$$\left|\int_x^\delta \frac{x}{x^2+t^2}[f(y-t)-f(y)]\mathrm{d}t\right|\leqslant \int_x^\delta \frac{x}{x^2+t^2}|f(y-t)-f(y)|\,\mathrm{d}t,$$

令 $$\Phi(t)=\int_0^t |f(y-t)-f(y)|\,\mathrm{d}t,$$

则

$$\int_x^\delta \frac{x}{x^2+t^2}|f(y-t)-f(y)|\,\mathrm{d}t\leqslant \int_x^\delta \frac{x}{t^2}\mathrm{d}\Phi(t)=\frac{x}{t^2}\Phi(t)\Big|_x^\delta+2x\int_x^\delta \frac{\Phi(t)}{t^3}\mathrm{d}t.$$

由于 y 是 Lebesgue 点,当 $t>0$ 足够小时,$0<\dfrac{\Phi(t)}{t}<\varepsilon$,从而

$$0<2x\int_x^\delta \frac{\Phi(t)}{t^3}\mathrm{d}t<2x\cdot\varepsilon\int_x^\delta \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=2x\varepsilon\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\delta}\right)<2\varepsilon.$$

故式(3)成立.综合式(2)及式(3)得式(1)成立.

进一步:由于 $f\in L^p$,故几乎所有的 $y\in(-\infty,+\infty)$ 都是 Lebesgue 点,从而此结论几乎处处成立.

引理 4 设 $f(x)\in L^2$,则 $\tilde f(x)=\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{|y|\leqslant|t|}\dfrac{f(x-t)}{t}\mathrm{d}t$ 存在,且

i) $\tilde f\in L^2$, $\|\tilde f\|_2=\|f\|_2$.

ii)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y-t}{x^2+(y-t)^2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}\tilde f(t)\mathrm{d}t.$$

证 参见文献[6].

定理 1 设 $f(t)\in L^2$,则 $u(x,y)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t$ 必是某一属于 H_2 的函数 $F(z)$ 的实部.

证 由推论 1 知 $u(x,y)=\mathrm{Re}F(z)$,其中 $F(z)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{z-\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t$. 由引理 2 知

$$\|u(x,y)\|_{L^2(\mathrm{d}y)}\leqslant\|f\|_2,$$

对 $$v(x,y)\triangleq I_mF(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y-t}{x^2+(y-t)^2}f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}\tilde f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\|v(x,y)\|_{L_2(\mathrm{d}y)}\leqslant\|\tilde f(t)\|_2=\|f(t)\|_2(\forall x>0).$$

由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|F\|^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[u^2(x,y)+v^2(x,y)]\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{\pi}\|f(t)\|_2^2,$$

所以 $$F(z)\in\mathrm{H}_2.$$

定理 2 如果 $G_1(z)$ 及 $G_2(z)$ 在开右半平面上解析,则

i) $F_1(z)=(G_1(z)+\mathrm{i}G_2(z))/2$ 在开右半平面上解析;

ii) 令 $G(z)=(\bar G_1(z)+\mathrm{i}\bar G_2(z))/2$,则 $F_2(z)=G(-\bar z)=G(-x+\mathrm{i}y)$ 在开左半平面上解析.

证 $F_1(z)$ 在开右半平面上解析是显然的,下证 $F_2(z)$ 在开左半平面上解析.

设 $G_1(z)=u_1(x,y)+\mathrm{i}v_1(x,y)$,由于其在开右半平面上解析,从而

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial y},\ \frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{\partial v_1}{\partial x},$$

且它们都是连续函数.

$\bar G_1(z)=u_1(x,y)-\mathrm{i}v_1(x,y)$,

$u_*(x,y)\triangleq u_1(-x,y)$,

$v_*(x,y)\triangleq -v_1(-x,y)\ (x<0)$,

$F_*(z)\triangleq u_*(x,y)+\mathrm{i}v_*(x,y)\ (x<0)$,

因为

$$\frac{\partial u_*}{\partial x}=-\frac{\partial u_1}{\partial(-x)},\ \frac{\partial v_*}{\partial y}=-\frac{\partial v_1}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial y}=\frac{\partial u_1}{\partial y},\ \frac{\partial v_*}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial(-x)},$$

从而知 $\dfrac{\partial u_*}{\partial x}=\dfrac{\partial v_*}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u_*}{\partial y}=-\dfrac{\partial v_*}{\partial x}$,且在开左半平面连续.故 $F_*(z)=\bar G_1(-\bar z)$ 在开左半平面解析,从而 $F_2(z)$ 在开左半平面解析.

定理 3 设 $f(t)=f_1(t)+\mathrm{i}f_2(t)\in L_2$ 复函数,$u(x,y),v(x,y),G_1(z),G_2(z),G(z)$ 定义如下:

$$u(x,y)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)f_1(t)\mathrm{d}t,$$

$$v(x,y)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)f_2(t)\mathrm{d}t,$$

$$G_1(z)\triangleq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-\mathrm{i}t}f_1(t)\mathrm{d}t,$$

$$G_2(z)\triangleq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-\mathrm{i}t}f_2(t)\mathrm{d}t,$$

$$F_1(z) = (G_1(z) + \mathrm{i}G_2(z))/2,$$
$$G(z) = (\bar{G}_1(z) + \mathrm{i}\bar{G}_2(z))/2,$$
$$F_2(z) = G(-\bar{z}) = G(-x+\mathrm{i}y),$$

则: i)

$$u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = F_1(z) + F_2(-\bar{z})(x > 0).$$

其中 $F_1(z) \in \mathrm{H}_2$, $F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$.

ii)

$$f(y) = \lim_{x\to 0^+}(F_1(x+\mathrm{i}y)+F_2(-x+\mathrm{i}y))\ (\mathrm{a.e.}).$$

证　i) 由定理 2 知: $F_1(z)$ 在开右半平面解析, $F_2(z)$ 在开左半平面解析, 由定理 1 的证明知: $G_1(z), G_2(z) \in \mathrm{H}_2$, 从而 $F_1(z) \in \mathrm{H}_2$. 类似由于 $\bar{G}_1(-\bar{z}), \bar{G}_2(-\bar{z}) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$, 从而 $F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$.

ii) 由引理 3 知

$$\lim_{x\to 0^+}(F_1(x+\mathrm{i}y) + F_2(-x+\mathrm{i}y)) =$$
$$\lim_{x\to 0^+}[u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)] = f_1(y) + \mathrm{i}f_2(y)(\mathrm{a.e.}).$$

下证第二部分. 对 $F_1(z) \in \mathrm{H}_2$ 及 $F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$, $\lim_{x\to 0^+} F_1(x+\mathrm{i}y) \in L_2$, $\lim_{x\to 0^-} F_2(x+\mathrm{i}y) \in L_2$, 从而

$$\lim_{x\to 0^+}[F_1(x+\mathrm{i}y) + F_2(-x+\mathrm{i}y)] \in L_2.$$

引理 5　如果 $u(x,y)$ 在开右半平面上调和, 且

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|^p \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant M\ (\forall x > 0),$$

则当 $x \geqslant \delta$ 时($\delta > 0$), $u(x,y)$ 有界且连续($p \geqslant 1$).

证　分 3 步来证明.

第 1 步　对任意属于开右半平面的点 (x_0, y_0) 有

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_L u(x_0+rx, y_0+ry)\mathrm{d}s. \quad (4)$$

其中 L 是以原点为中心的单位圆, r 是一个使点 $(x_0 + rx, y_0 + ry)$ 在开右半平面的参变量, 令

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\oint_L u(x_0+rx, y_0+ry)\mathrm{d}s,$$

则

$$F'(r) = \frac{1}{2\pi}\oint_L\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot y\right)\mathrm{d}s =$$
$$\frac{1}{2\pi}\oint_L\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial \eta}\cos\alpha\right)\mathrm{d}s =$$
$$\frac{1}{2\pi}\oint_L\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi - \frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta\right) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = 0.$$

这里 $\{\sin\alpha, -\cos\alpha\}$ 是单位圆在点 (x,y) 的外法方向, L^1 为以 (x_0,y_0) 为圆心, 半径为圆周的正向, D 为 L^1 围成的区域, 从而 $F(r) \equiv c$. 由于

$$\lim_{r\to 0^+} F(r) =$$
$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\oint_L u(x_0+rx, y_0+ry)\mathrm{d}s = u(x_0,y_0)$$

故 $F(r) \equiv u(x_0,y_0)$, 即式(4)成立.

第 2 步

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant R^2} u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (5)$$

这里 R 足够小, 使圆盘 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant R^2$ 在开右半平面上.

由于

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_L u(x_0+rx, y_0+ry)\mathrm{d}s =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

从而

$$\int_0^R ru(x_0,y_0)\mathrm{d}r =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

即

$$\frac{1}{2}R^2\cdot u(x_0,y_0) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant R^2} u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而式(5)成立.

第 3 步　当 $x \geqslant \delta$ 时($\delta > 0$), $u(x,y)$ 有界且连续. 对于 $u(x,y)$ 连续性是显然的, 下证 $u(x,y)$ 是有界的. 由于

$$u(x,y) =$$
$$\frac{1}{\pi R^2}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant R^2} u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\ (R < \delta),$$

从而

$$|u(x,y)| \leqslant$$
$$\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant R^2}\left|\frac{1}{\pi R^2}u(\xi,\eta)\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \leqslant$$
$$\left[\frac{1}{\pi R^2}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant R^2}|u(\xi,\eta)|^p\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]^{\frac{1}{p}}\cdot$$
$$\left[\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant R^2}\frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$
$$\left[\frac{1}{\pi R^2}\int_{x-R}^{x+R}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}|u(\xi,\eta)|^p\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\left(\frac{2}{\pi R}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{\xi>0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|u(\xi,\eta)|^p\mathrm{d}\eta\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\left(\frac{2}{\pi R}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot M.$$

引理 6(Liouvile) 如果 $u(x,y)$ 在整个复平面上调和且有界,则在整个复平面上 $u(x,y)\equiv c$ (常数).

证 由引理5的证明可知

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

故

$$u(x_1,y_1)-u(x_2,y_2)=$$
$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta-$$
$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=$$
$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D}u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

这里

$$D=(D_1\setminus D_2)\cup(D_2\setminus D_1),$$
$$D_1=\{(\xi,\eta)\mid(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2\leqslant r^2\},$$
$$D_2=\{(\xi,\eta)\mid(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2\leqslant r^2\}.$$

记 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$,令 r 足够大,则

$$|u(x_1,y_1)-u(x_2,y_2)|\leqslant\frac{2\|u\|_\infty}{\pi r^2}\iint_{D_1\setminus D_2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

$$\iint_{D_1\setminus D_2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqslant\pi[r^2-(r-d)^2],$$

$$|u(x_1,y_1)-u(x_2,y_2)|\leqslant$$
$$(2[r^2-(r-d)^2]\|u\|_\infty)/r^2=$$
$$(2(2rd-d^2))/r^2\|u\|_\infty\to 0,$$

因此

$$u(x_1,y_1)=u(x_2,y_2),\text{即 } u(x_1,y_1)\equiv c.$$

引理 7 如果 $u(x,y)$ 在开右半平面上调和且有界,在闭右半平面上连续,则

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)u(0,t)\mathrm{d}t. \quad (6)$$

证 令

$$U(x,y)=u(x,y)-\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)u(0,t)\mathrm{d}t,$$

则易知:$U(x,y)$ 在开右半平面上调和且有界,在闭右半平面上连续,且 $U(0,y)=0(\forall y)$,令

$$V(x,y)=\begin{cases}U(x,y), & x\geqslant 0,\\ -U(-x,y), & x<0,\end{cases}$$

则 $V(x,y)$ 在整个复平面上有界且调和,从而由引理6知 $V(x,y)\equiv c=V(0,0)=0$,即式(6)成立.

引理 8 设 $f(x)\in L^p$ 的实函数,令

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$u(x+x_n,y)=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)u(x_n,t)\mathrm{d}t\ (\text{对 }\forall x_n>0). \quad (7)$$

证 由于 $u(x,y)$ 在开右半平面上调和,且

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,y)|^p\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|_p,$$

由引理5知,对任意给定的 $\delta>0$,当 $x\geqslant\delta$ 时,$u(x,y)$ 是有界且连续,令 $v(x,y)=u(x+x_n,y)$,则 $v(x,y)$ 在右半平面调和且有界,从而由引理7得

$v(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)v(0,t)\mathrm{d}t$,即式(7)成立.

定理 4 如果 $u(x,y)$ 是在开右半平面上的调和函数,则 $u(x,y)$ 是 L^p 中某实函数 $f(t)$ 的 Poisson 积分(即 $u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t$) 的充要条件是:$\sup\limits_{x>0}\|u(x,y)\|_{L^p(\mathrm{d}y)}<+\infty$.

证 必要性已证,下证充分性.设

$$\sup_{x>0}\|u(x,y)\|_{L^p(\mathrm{d}y)}<+\infty,$$

由引理8知

$$u(x+x_n,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)u(x_n,t)\mathrm{d}t.$$

现取 $x_n>x_{n+1}>\cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$(这里 $x_n>0$),则 $\|u(x_n,t)\|_p$ 一致有界,从而必弱 * 收敛某函数,记为 $f(t)$,且 $f(t)\in L^P$,故

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_x(y-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

定理 5 如果 $F_1(z)=u_1(x,y)+\mathrm{i}v_1(x,y)\in \mathrm{H}_2$,则必有 $f_{11}(y),f_{12}(y)\in L^2$ 存在,使

$$\lim_{x\to 0^+}[u_1(x,y)+\mathrm{i}v_1(x,y)]=$$
$$f_{11}(y)+\mathrm{i}f_{12}(y)(\text{a.e.}),$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}F_1(x+\mathrm{i}y)\in L_2$.

如果 $F_2(z)=u_2(x,y)+\mathrm{i}v_2(x,y)\in \mathrm{H}_2^{\perp}$,则必有 $f_{21}(y),f_{22}(y)\in L^2$ 存在,使

$$\lim_{x\to 0^-}[u_2(x,y)+\mathrm{i}v_2(x,y)]=$$
$$f_{21}(y)+\mathrm{i}f_{22}(y)(\text{a.e.}),$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0^-}F_2(x+\mathrm{i}y)\in L_2$.

证 只对 $F_1(z)\in \mathrm{H}_2$ 的情形给出证明,$F_2(z)\in H_2^{\perp}$ 类证. 因 $F_1(z)\in \mathrm{H}_2$, 从而 $\sup\limits_{x>0}\|u_1(x,$

$y)\|_{L^p(\mathrm{d}y)} < +\infty, \sup\limits_{x>0} \| v_1(x,y) \|_{L^p(\mathrm{d}y)} < +\infty$.

由定理 4 知,必存在 $f_{11}(t), f_{12}(t) \in L^2$ 使

$$u_1(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t) f_{11}(t)\mathrm{d}t,$$

$$v_1(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t) f_{12}(t)\mathrm{d}t.$$

又由引理 3 即可得

$$\lim_{x\to 0^+} u_1(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t) f_{11}(t)\mathrm{d}t = f_{11}(y)(\mathrm{a.e.}),$$

$$\lim_{x\to 0^+} v_1(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(y-t) f_{12}(t)\mathrm{d}t = f_{12}(y)(\mathrm{a.e.}),$$

故

$$\lim_{x\to 0^+}[u_1(x,y) + \mathrm{i}v_1(x,y)] = f_{11}(y) + \mathrm{i}f_{12}(y)(\mathrm{a.e.}).$$

由于 $f_{11}(y), f_{12}(y) \in L^2$,故 $f_{11}(y) + \mathrm{i}f_{12}(y) \in L_2$.

综合上面定理 3 及定理 5 可得:对于任意 $f(y) = f_1(y) + \mathrm{i}f_2(y) \in L_2$ 的复函数,必有 $F_1(z) \in \mathrm{H}_2$, $F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$,使 $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x+\mathrm{i}y) + \lim\limits_{x\to 0^-} F_2(x+\mathrm{i}y) = f(y)(\mathrm{a.e.})$.反之,对任意 $F(z) = F_1(z) + F_2(z) \in \mathrm{H}_2 \oplus \mathrm{H}_2^{\perp}$(其中:$F_1(z) \in \mathrm{H}_2, F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$)必有 $f(y) \in L_2$,使 $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x+\mathrm{i}y) + \lim\limits_{x\to 0^-} F_2(x+\mathrm{i}y) = f(y)(\mathrm{a.e.})$.从而 $L_2 = \mathrm{H}_2 \oplus \mathrm{H}_2^{\perp}$ 成立.实际上这种对应从某种意义上讲是一一对应的.为说明此结论,给出下面的定义及定理 6.

定义　称 $F_1(z), F_2(z)$ 为 H_2 中的同类函数是指 $F_1(z), F_2(z) \in \mathrm{H}_2$ 且满足 $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(z) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_2(z)$ (a.e.),记 H_2 中不同类的标号集合为 $m(\mathrm{H}_2)$.称 $F_1(z), F_2(z)$ 为 $\mathrm{H}_2^{\perp}$ 中的同类函数是指 $F_1(z), F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$,且满足 $\lim\limits_{x\to 0^-} F_1(z) = \lim\limits_{x\to 0^-} F_2(z)(\mathrm{a.e.})$,记 $\mathrm{H}_2^{\perp}$ 中不同类的标号集合为 $m(\mathrm{H}_2^{\perp})$.

定理 6　$f(t) \in L_2$ 的函数必与 $m(\mathrm{H}_2)$ 及 $m(\mathrm{H}_2^{\perp})$ 的元素成一一对应.

证　首先由定理 3 及定理 5 后面的说明知:对 $f(t) \in L_2$ 必有 $F_1(z) \in \mathrm{H}_2, F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$ 使

$$\lim_{x\to 0^+} F_1(z) + \lim_{x\to 0^-} F_2(z) = f(y)\ (\mathrm{a.e.}).$$

而 $F_1(z), F_2(z)$ 分别属于 H_2 及 $\mathrm{H}_2^{\perp}$ 的某一类函数,即 $f(t)$ 能与 $m(\mathrm{H}_2)$ 及 $m(\mathrm{H}_2^{\perp})$ 的某元素对应.其次这种对应是唯一的.如果另有 $G_1(z) \in \mathrm{H}_2$, $G_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$ 使

$$\lim_{x\to 0^+} G_1(z) + \lim_{x\to 0^-} G_2(z) = f(y)\ (\mathrm{a.e.}).$$

由

$$F_1(z) - G_1(z) = \mathrm{H}_2,\ F_2(z) - G_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp},$$

记

$$\lim_{x\to 0^+}[F_1(z) - G_1(z)] = h_1(y),$$

$$\lim_{x\to 0^-}[F_2(z) - G_2(z)] = h_2(y).$$

由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}_1(y) h_2(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}_2(y) h_1(y)\mathrm{d}y = 0$$

(见文献[1]pp.25),得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | h_1(y) + h_2(y) |^2 \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} [| h_1(y) |^2 + | h_2(y) |^2]\mathrm{d}y = 0,$$

所以 $h_1(y) = 0$ (a.e.), $h_2(y) = 0$ (a.e.),从而 $F_1(z)$ 与 $G_1(z)$、$F_2(z)$ 与 $G_2(z)$ 是同类的.而由定理 5 知:对于与 $m(\mathrm{H}_2)$ 及 $m(\mathrm{H}_2^{\perp})$ 中任一元素的函数 $F_1(z) \in \mathrm{H}_2, F_2(z) \in \mathrm{H}_2^{\perp}$,必有 $f(t) \in L_2$ 与其对应.

参考文献(References):

[1] 解学书,钟宜生.H_∞ 控制理论[M].北京:清华大学出版社,1994:14-27.
(XIE Xueshu, ZHONG Yisheng. *H_∞ Control Theory* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994:14-27.)

[2] FRANCIS B A. *A Course in H_∞ Control Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1987:8-13.

[3] 申铁龙.H_∞ 控制理论及应用[M].北京:清华大学出版社,1996:25-28.
(SHEN Tielong. *H_∞ Control Theory and Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996:25-28.)

[4] 潘文杰.傅立叶分析及其应用[M].北京:北京大学出版社,2000.
(PAN Wenjie. *Fourier Analysis and Application* [M]. Beijing: Peking University Press, 2000.)

[5] GARNETT J B. *Bounded Analytic Functions* [M]. New York: Academic Press, 1981:1-50.

[6] DUREN P L. *Theory of HP Space* [M]. New York: Academic Press, 1970.

[7] ZHOU K, DOYLE J C, GLOVER K. *Robust and Optimal Control* [M]. New Jersey: Pretice Hall, 1996.

作者简介:

徐跃良 (1963 —),男,副教授,西南交通大学在职博士生,1990 年获中国科学院系统所硕士学位,目前研究领域为 H_∞ 控制理论, E-mail: xyll0626.student@sina.com;

李　治 (1937 —),男,教授,博士生导师,目前主要研究方向:系统仿真,故障检测与诊断,电力控制系统的理论与设计.