

大系统的分散能控子空间与分散不能观测子空间

钟红恩, 周凤岐, 周 军

(西北工业大学 航天工程学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 提出了大系统的分散能控子空间和分散不能观测子空间的概念. 研究了它们分别与集中控制中的能控子空间和不能观测子空间之间的关系. 研究中借用了几何控制理论中的方法. 结果表明, 分散能控子空间和分散不能观测子空间是集中控制中能控子空间和不能观测子空间在分散控制下的自然推广. 利用这两个概念, 可以从几个角度研究大系统分散控制的几个问题, 比如时变分散控制下的系统镇定问题.

关键词: 分散能控子空间; 分散不能观测子空间; 分段定常分散控制

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Decentralized controllable subspace and unobservable subspace of large-scale systems

ZHONG Hong-en, ZHOU Feng-qi, ZHOU Jun

(College of Astronautics Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: The concepts of decentralized controllable subspace and unobservable subspace are presented. The relations between them and their counterparts in centralized control were explored respectively. An approach similar to the geometric control theory in centralized control was adopted. The result shows that the decentralized controllable subspace and unobservable subspace are the natural generalization of the controllable subspace and unobservable subspace to decentralized control respectively. Based on these concepts, some problem, such as stabilizing of large-scale systems by time-varying decentralized control, can be dealt with easily by a geometric approach.

Key words: decentralized controllable subspace; decentralized unobservable subspace; piecewise constant decentralized control

1 引言 (Introduction)

在分散控制的几何理论方面, 文献[1]利用 $k-(A, B_i, \mathcal{S}_i)$ 和 $k-(C_i, A, B_i)$ 不变子空间的概念研究了一般的结构下的干扰解耦问题. 文献[2]对分散干扰解耦问题做了系统的总结.

综合来说, 到目前为止, 分散控制的几何理论只是在干扰解耦问题上有比较完整的理论. 文献[1]中提出的结构 $-(A, B)$ 不变子空间和 $k-(A, B_i, \mathcal{S}_i)$ 不变子空间是集中几何控制理论中的 (A, B) 不变子空间在分散控制中的推广. 但是, 集中控制理论中最基本的概念——能控子空间和不能观测子空间——还没有推广至分散控制中去. 本文在文献[3]中利用时变分散反馈消除分散固定模研究的基础上, 提出分散能控子空间和分散不能观测子空间的概念. 研究了它们与集中控制中对应概念之间的关系,

及其与分散能控性、分散能观测性之间的关系. 下文所有符号均与文献[4]中一致.

2 分散能控子空间和分散不能观测子空间 (Decentralized controllable subspace and unobservable subspace)

考虑 v 通道系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^v B_i u_i(t), \quad (2.1)$$

$$y_i(t) = C_i x(t), \quad i \in \underline{v} \equiv \{1, 2, \dots, v\}.$$

其中: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$, $C_i \in \mathbb{R}^{r_i \times n}$. 令 $B \triangleq [B_1, \dots, B_v]$, $C \triangleq [C_1^T, \dots, C_v^T]^T$, 若 $m = \sum_{i=1, \dots, v} m_i$, $r = \sum_{i=1, \dots, v} r_i$, 则 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$. 设 $\mathcal{S}_i = \text{image}(B_i)$, $\mathcal{S}_i = \text{Ker}(C_i)$. $\dim(\cdot)$ 表示空间 (\cdot) 的维数, \underline{k} 表示自然数集 $\{1, 2, \dots, k\}$. 称

$$K = \{K \mid K = \text{blockdiag}(K_1, \dots, K_r), \\ K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times r_i}, i \in \underline{v}\}$$

为系统的容许分散控制集. 令

$$\sum_{j=1}^r \langle A + BK^j C \mid \mathcal{B}_j \rangle = \\ \langle A + BK^1 C \mid \mathcal{B}_1 \rangle + \dots + \langle A + BK^r C \mid \mathcal{B}_r \rangle. \quad (2.2)$$

记号

$$\sum_{K \in \mathbf{K}} \langle A + BKC \mid \mathcal{B} \rangle \quad (2.3)$$

的含义与式(2.2)相似, 此时 K 将取遍 \mathbf{K} 中所有值. 用 $\langle \mathcal{E} \mid A \rangle$ 表示系统 (C, A) 的不能观测子空间, 规定

$$\bigcap_{j=1}^r \langle \mathcal{E}_i \mid A + BK^j C \rangle = \\ \langle \mathcal{E}_i \mid A + BK^1 C \rangle \cap \dots \cap \langle \mathcal{E}_i \mid A + BK^r C \rangle. \quad (2.4)$$

记号

$$\bigcap_{K \in \mathbf{K}} \langle \mathcal{E}_i \mid A + BKC \rangle \quad (2.5)$$

的含义与式(2.4)的含义相似, 此时 K 将取遍 \mathbf{K} 中所有值. 在作上述定义后, 可以给出如下定义:

定义 1 对于子系统 i , 称式(2.3) 所表示子空间为子系统 i 的分散能控子空间.

定义 2 对于子系统 i , 称式(2.5) 所表示子空间为子系统 i 的分散不能观测子空间.

另外, 还需要可达性概念^[5]. 对于系统(2.1) 中的两个子系统 $i, j \in \underline{v}, i \neq j$, 当 $C_j(sI - A)^{-1}B_i \neq 0$ 时, 将其记为 $i \rightarrow j$. 若存在子系统 i_1, \dots, i_p 使得 $i \rightarrow i_1, i_1 \rightarrow i_2, \dots, i_p \rightarrow j$, 则称为子系统 i 可达子系统 j , 简记为 iRj . 若大系统中的任意两个子系统都互相可达, 则称大系统强关联.

3 分散能控子空间与能控子空间的关系 (Relation between decentralized controllable subspace and centralized controllable subspace)

令 $\mathcal{B} = \text{image}(B), \mathcal{E} = \text{Ker}(C)$, 则有下面的结果, 证明受篇幅所限故省略.

定理 1 大系统由式(2.1)给出, 其中 $v = 2$. 则当 $C_2(sI - A)^{-1}B_1 \neq 0$ 时有

$$\sum_{K \in \mathbf{K}} \langle A + BKC \mid \mathcal{B}_1 \rangle = \langle A \mid \mathcal{B} \rangle. \quad (3.1)$$

下面的结论说明在定理 1 中的条件成立时, 取 \mathbf{K} 中有限个值就能使式(3.1) 成立:

推论 1 在定理 1 的条件下, 存在有限个不同的 $K^1, \dots, K^{t_1} \in \mathbf{K}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{t_1} \langle A + BK^j C \mid \mathcal{B}_1 \rangle = \langle A \mid \mathcal{B} \rangle. \quad (3.2)$$

证 首先, 由定理 1 可知式(3.1) 成立. 任取 $K^1 \in \mathbf{K}$, 则

$$0 < p = \dim \langle A + BK^1 C \mid \mathcal{B}_1 \rangle < \dim \langle A \mid \mathcal{B} \rangle,$$

由于式(3.1) 成立, 则必存在 $K^2 \in \mathbf{K}$ 使得

$$p + 1 \leq \dim \left\langle \sum_{j=1}^2 \langle A + BK^j C \mid \mathcal{B}_1 \rangle \right\rangle < \dim \langle A \mid \mathcal{B} \rangle.$$

类似进行推理, 再考虑到 $\dim \langle A \mid \mathcal{B} \rangle$ 为有限值, 可知有限步后必有式(3.2) 成立.

利用推论 1 和通有性的概念可得:

定理 2 在定理 1 的条件下, 满足式(3.2) 的 t_1 个元素 K^1, \dots, K^{t_1} 在其取值空间 $\underbrace{\mathbf{K} \times \dots \times \mathbf{K}}_{t_1 \uparrow}$ 中是通

有的(“通有”的概念是用来描述一种性质在其取值空间中的稠密性, 具体可见文献[4]中的 0.16 节);

证 首先由推论 1, 存在 t_1 个不同的 $K_0^1, \dots, K_0^{t_1} \in \mathbf{K}$ 使得式(3.2) 成立. 令

$$M = [B_1 (A + BK^1 C) B_1 \dots (A + BK^1 C)^{n-1} B_1 \quad B_1 \\ (A + BK^2 C) B_1 \dots (A + BK^2 C)^{n-1} B_1 \quad \dots \quad B_1 \\ (A + BK^{t_1} C) B_1 \dots (A + BK^{t_1} C)^{n-1} B_1],$$

则当 M 中的 K^1, \dots, K^{t_1} 分别取为 $K_0^1, \dots, K_0^{t_1}$ 时, 就有 $\text{rank} M_0 = \text{rank} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B] = m_0$.

然后, 利用矩阵的秩对矩阵元素的通有性就可以得到要证明的结论.

在继续之前, 给出下面的引理(见文献[3]的定理 3.1):

引理 1 考虑通道系统, 若 $v - 1$ 个通道系统由第 v 个子系统中引入输出反馈 $u_v = -K_v y_v$ 而得到, 其中 K_v 为常数矩阵, 则当 $\forall i \in \underline{v}$ 且 $i \neq 1$ 都有 $1Ri$ 时, 使得 $\forall i \in \underline{v-1} = \{1, 2, \dots, v-1\}$ 且 $i \neq 1$ 都有 $1Ri$ 的 K_v 在其取值域 $\mathbb{R}^{m_v \times r_v}$ 中是通有的.

利用引理 1, 就能将定理 1 推广到多于两通道系统的情形, 即:

定理 3 大系统由式(2.1)给出, 其中 $v \geq 2$. 若 $\forall i \in \underline{v}$ 且 $i \neq 1$ 都有 $1Ri$, 则

$$\sum_{K \in \mathbf{K}} \langle A + BKC \mid \mathcal{B}_1 \rangle = \langle A \mid \mathcal{B} \rangle. \quad (3.3)$$

证 定理 1 说明结论对于 $v = 2$ 是成立的, 假定对于 $v = k > 2$ 时该结论成立. 当 $v = k + 1$ 时, 将前 k 个子系统当作一个子系统, 第 $k + 1$ 个子系统为另一个子系统. 由于 $1R(k + 1)$, 故 $k - 1R(k + 1)$. 由定理 2 知存在自然数 t_v 和不同的 $K_{k+1}^1, \dots, K_{k+1}^{t_v}$

$\in K_{k+1} = \mathbb{R}^{m_{k+1} \times r_{k+1}}$, 使得

$$\langle A | \mathcal{B} \rangle = \sum_{j=1}^t \langle A + B_{k+1} K_{k+1}^j C_{k+1} | \mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_k \rangle, \quad (3.4)$$

且满足上式的 $K_{k+1}^1, \dots, K_{k+1}^t$ 在其取值空间 $\underbrace{K_{k+1} \times \dots \times K_{k+1}}_{t \uparrow}$ 中是通有的. 根据引理1, 存在 K_{k+1}^j

使得在 $v - 1$ 通道系统 $((C_1^T \dots C_k^T)^T, A + B_{k+1} K_{k+1}^j C_{k+1}, (B_1 \dots B_k))$ 中有: $\forall i \in \underline{v-1}$ 且 $i \neq 1$ 都有 $1Ri$, 且这样的 K_{k+1}^j 在 K_{k+1} 是通有的. 利用归纳假设得到

$$\begin{aligned} \langle A | B \rangle &= \sum_{j=1}^t \langle A + B_{k+1} K_{k+1}^j C_{k+1} | \mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_k \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^t \sum_{K_1, \dots, K_k} \langle A + B_{k+1} K_{k+1}^j C_{k+1} + B_k K_k C_k + \dots + \\ &B_1 K_1 C_1 | \mathcal{B}_1 \rangle = \sum_{K \in \mathcal{K}} \langle A + BKC | \mathcal{B}_1 \rangle, \end{aligned}$$

因此结论成立.

类似于推论1和定理2的证明, 有如下结论:

推论2 在定理2的条件下, 存在有限个 $K^1, \dots, K^t \in \mathcal{K}$ 使得

$$\sum_{j=1}^t \langle A + BK^j C | \mathcal{B}_1 \rangle = \langle A | \mathcal{B} \rangle, \quad (3.5)$$

并且满足式(3.5)的 t_1 个元素 K^1, \dots, K^{t_1} 在其取值空间 $\underbrace{K \times \dots \times K}_{t_1 \uparrow}$ 中是通有的.

由分散不能观测子空间和分散能控子空间之间的对偶性, 可以得到类似于推论2的结论, 限于篇幅省略证明.

定理4 大系统由式(2.1)给出, 其中 $v \geq 2$. 若 $\forall i \in \underline{v}$ 且 $i \neq 1$ 都有 $iR1$, 则存在有限个 $K^1, \dots, K^2 \in \mathcal{K}$ 使得下式成立:

$$\bigcap_{j=1}^2 \langle \mathcal{E}_1 | A + BK^j C \rangle = \langle \mathcal{E} | A \rangle, \quad (3.6)$$

并且 t_2 个元素 K^1, \dots, K^{t_2} 在其取值空间 $\underbrace{K \times \dots \times K}_{t_2 \uparrow}$ 中是通有的.

对于强关联系统还有如下结论:

推论3 若 $v (v \geq 2)$ 通道系统(2.1)强关联^[6], 则存在有限个 $K^1, \dots, K^v \in \mathcal{K}$ 使得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, \dots, v} \langle A + BK^j C | \mathcal{B}_i \rangle &= \\ \langle A | \mathcal{B} \rangle \bigcap_{j=1, \dots, v} \langle \mathcal{E}_i | A + BK^j C \rangle &= \langle \mathcal{E} | A \rangle, \\ \forall i \in \{1, \dots, v\} \end{aligned}$$

成立, 并且满足上式的 t 个 K^1, \dots, K^t 在取值空间 $\underbrace{K \times \dots \times K}_{t \uparrow}$ 中是通有的.

证 不失一般性, 令 $i = 1$. 由于系统强关联, 则

1) $\forall i \in \underline{v}$ 且 $i \neq 1$ 都有 $1Ri$, 故由推论2可知: 存在有限个 $K^1, \dots, K^{t_1} \in \mathcal{K}$ 使得式(3.5)成立.

2) $\forall i \in \underline{v}$ 且 $i \neq 1$ 都有 $1Ri$, 故由定理4可知: 存在有限个 $K^1, \dots, K^{t_2} \in \mathcal{K}$ 使得式(3.6)成立.

取 $t = \max\{t_1, t_2\}$, 则存在有限个 $K^1, \dots, K^t \in \mathcal{K}$ 使得式(3.5)和式(3.6)同时成立. 由通有性的定义可知这样的 $K^1, \dots, K^{t_2} \in \mathcal{K}$ 在 $\underbrace{K \times \dots \times K}_{t \uparrow}$ 中是通有的.

例1(见文献[6]的例3) 考虑如下两通道系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \\ y_i(t) = C_i x(t), \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [0 \ 0 \ -12]$. 由于 $C_2(sI - A)^{-1} B_1 \neq 0, C_1(sI - A)^{-1} B_2 \neq 0$, 故两通道系统强关联. 注意到 $\langle A + BKC | \mathcal{B}_1 \rangle = \langle A + B_2 K_2 C_2 | \mathcal{B}_1 \rangle$, 则在输出反馈 $K_2 = K_2^1 = [1 \ 0]^T$ 下有

$\langle A + B_2 K_2^1 C_2 | \mathcal{B}_1 \rangle_1 = \text{span}\{[0 \ 0 \ 1]^T, [1 \ 0 \ 0]^T\}$. 当 $K_2 = K_2^2 = [0 \ 1]^T$ 时, 有 $\langle A + B_2 K_2^2 C_2 | \mathcal{B}_1 \rangle_1 = \text{span}\{[0 \ 0 \ 1]^T, [1 \ 0 \ 0]^T\}$. 因此 $\sum_{j=1,2} \langle A + BK_2^j C | \mathcal{B}_1 \rangle = \mathbb{R}^3$. 又因 $\langle A | \mathcal{B} \rangle = \mathbb{R}^3$, 故 $\sum_{j=1,2} \langle A + BK_2^j C | \mathcal{B}_1 \rangle = \langle A | \mathcal{B} \rangle$.

4 分散能控子空间与单通道能控性的关系 (Relation between decentralized subspace and single channel controllability)

下面的引理2容易由文献[4]中定理1.1得到, 因此省略其证明.

引理2 给定线性定常系统 (A, B) 和任意初始状态 $x(t_0)$, 则对任意给定时刻 $t_1 > t_0$ 都有分段连续控制 $u(t) (t_0 \leq t \leq t_1)$ 使得

$$x(t_1) = e^{A \cdot t_1} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} B u(\tau) d\tau \in \langle A | \mathcal{B} \rangle^\perp.$$

其中 $\langle A | \mathcal{B} \rangle^\perp$ 表示 \mathbb{R}^n 空间中所有与 $\langle A | \mathcal{B} \rangle$ 正交的矢量的集合.

利用定理3和引理2可得如下结论:

定理5 在定理3的条件下,存在分段定常周期分散输出反馈使得闭环系统状态对子系统1是一致完全可控的.

证 由推论2可知,存在有限个 $K^1, \dots, K^s \in K$ 使得

$$\sum_{j=1, \dots, s} \langle A + BK^j C \mid \mathcal{B}_1 \rangle = \langle A \mid \mathcal{B} \rangle. \quad (4.1)$$

由引理2,存在分段连续控制 $u_{11}(t) (t_0 \leq t \leq t_1)$ 使得

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{(A+BK^1 C) \cdot (t_1-t_0)} x(t_0) + \\ &\int_{t_0}^{t_1} e^{(A+BK^1 C)(t_1-\tau)} B_1 u_{11}(\tau) d\tau \in \\ &\langle A + BK^1 C \mid \mathcal{B}_1 \rangle^\perp. \end{aligned}$$

又因为 $x(t_0) \in \langle A \mid \mathcal{B} \rangle$, 故而 $x(t_1) \in \langle A \mid \mathcal{B} \rangle$. 结合式(4.1)就有

$$x(t_1) \in \sum_{j=2}^s \langle A + BK^j C \mid \mathcal{B}_1 \rangle.$$

再次利用引理2并且根据相同的理由可知,存在分段连续控制 $u_{12}(t) (t_1 \leq t \leq t_2)$ 使得

$$\begin{aligned} x(t_2) &= e^{(A+BK^2 C) \cdot (t_2-t_1)} x(t_1) + \\ &\int_{t_1}^{t_2} e^{(A+BK^2 C)(t_2-\tau)} B_1 u_{12}(\tau) d\tau \in \\ &\sum_{j=1}^2 \langle A + BK^j C \mid \mathcal{B}_1 \rangle^\perp. \end{aligned}$$

依次类推,最后存在控制 $u_{1s}(t) (t_{s-1} \leq t \leq t_s)$ 使得

$$\begin{aligned} x(t_s) &= e^{(A+BK^s C) \cdot (t_s-t_{s-1})} x(t_{s-1}) + \\ &\int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{(A+BK^s C)(t_s-\tau)} B_1 u_{1s}(\tau) d\tau \in \\ &\sum_{j=1}^s \langle A + BK^j C \mid \mathcal{B}_1 \rangle^\perp = \{0\}. \end{aligned}$$

由一致能控的定义可知结论成立.

利用分散能控子空间与分散不能观测子空间之间的对偶关系,可得到与定理5对偶的结论,这里就不再列出.当大系统强关联时有下述结论:

推论4 大系统(2.1)完全能控完全能观,其中 $v \geq 2$. 若大系统强关联,则存在分段定常周期分散输出反馈使得闭环系统状态对任意子系统 $i, i \in \{1, \dots, v\}$ 是一致完全能控且一致完全可观的.

证 由于大系统完全能控完全能观测,则有 $\langle A$

$\mid \mathcal{B} \rangle = \mathbb{R}^n, \langle \mathcal{C} \mid A \rangle^\perp = \mathbb{R}^n$. 再注意推论3、定理5和本结论前面的叙述,容易知道结论成立.

5 总结(Conclusions)

在本文研究的基础上,可以研究用线性时变分散控制器实现闭环系统稳定问题.与文献[7]中通过改变系统结构而消除广义大系统分散固定模的方法不同,将本文的结果推广至包含直馈的系统后,可以得到广义大系统的时变分散镇定一个充分条件.

参考文献(References):

- [1] LEITE V M P. Disturbance decoupling in decentralized linear systems by nondynamic feedback of state or measurement [J]. *Int J Control*, 1985, 42(4): 913 - 937.
- [2] 韩正之. 线性系统的 (A, B) 特征子空间与大系统分散控制 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.
(HAN Zhengzhi. *The (A, B) Characteristic Subspace and Decentralized Control of Large-Scale Systems* [M]. Beijing: Science Press, 1993.)
- [3] ANDERSON B D O, MOORE J B. Time-varying feedback laws for decentralized control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(5): 1133 - 1139.
- [4] WONHAM W M. *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach* [M]. New York: Springer-Verlag, 1979.
- [5] CORFMAT J P, MORSE A S. Decentralized control of linear multivariable systems [J]. *Automatica*, 1976, 12(5): 479 - 495.
- [6] WANG S H. Stabilization of decentralized control systems via time-varying controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1982, 27(3): 741 - 743.
- [7] 张庆灵, 戴冠中, M. de la San. 有穷固定模的确定与消除 [J]. 控制理论与应用, 1997, 14(3): 407 - 410.
(ZHANG Qingling, DAI Guanzhong, M. de la San. Determination and elimination of finite fixed modes [J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(3): 407 - 410.)

作者简介:

钟红恩 (1975 —), 男, 西北工业大学博士研究生, 研究兴趣是大系统、广义大系统的分散控制、鲁棒控制, E-mail: hongenzhong@yahoo.com.cn;

周凤岐 (1935 —), 男, 西北工业大学航天工程学院教授, 博士生导师, 主要兴趣是大系统控制理论与应用, 变结构控制理论及其在导弹控制中的应用, E-mail: zhoufengqi@nwpu.edu.cn;

周军 (1968 —), 男, 西北工业大学航天工程学院教授, 博士生导师, 主要兴趣是不确定复杂系统的鲁棒控制, 变结构控制理论及其在航天器控制中的应用, E-mail: zhoujun@nwpu.edu.cn.