

一种灵敏度和一致性相结合的决策区域分析

朱建军, 刘士新, 王梦光

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 研究了层次分析法中判断矩阵元素取值对权重排序稳定性和一致性的影响. 通过判断矩阵主特征值与特征多项式含三次幂系数之间的负相关关系, 导出了使判断矩阵一致性比例最小时元素的最优取值, 得到了在该值左侧时判断矩阵一致性单调递减, 而在右侧时单调递增的结论, 由此设计了迭代算法求出使判断矩阵具有满意一致性时元素的取值范围. 并结合保持方案排序不变时的灵敏度分析结果, 给出了一个既能保持方案排序不变, 又能使判断矩阵符合满意一致性的决策区域. 最后给出了进行决策区域分析的一个例子.

关键词: 层次分析法; 灵敏度分析; 一致性分析; 综合决策区域

中图分类号: C943

文献标识码: A

Integration of the sensitivity analysis and consistency analysis on the decision making region

ZHU Jian-jun, LIU Shi-xin, WANG Meng-guang

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The effect of the value of one entry of the comparison matrix on the priority stabilization and consistency ratio in the Analytical Hierarchy Process (AHP) is studied. First, based on the conclusion of the negative correlation between the principal eigenvalue and the coefficient of degree $n-3$ of the characteristic polynomial of the comparison matrix, the optimization value of the entry that keeps the matrix having the minimum consistency ratio was obtained. The consistency ratio monotonously decreased to the left side of the optimization value, while it monotonously increased to the right side. Second, an iteration algorithm was suggested to find the changeable range of the entry that keeps the matrix having the satisfactory consistency. Third, a decision making region that guaranteed the ranking of the alternative and keeps the matrix having the satisfactory consistency was obtained. Finally, an example was given to illustrate the approach.

Key words: analytical hierarchy process; sensitivity analysis; consistency analysis; integration decision making region

1 引言 (Introduction)

层次分析法^[1] (analytical hierarchy process, 简称 AHP) 是美国数学家 Saaty 教授于 20 世纪 70 年代提出的一种系统分析方法, 适宜解决难以完全用定量方法分析的多准则决策问题. 灵敏度分析^[2~5] 和一致性分析^[6~11] 是层次分析法中两个重要研究内容. 灵敏度分析研究保持方案排序条件下判断元素的可变范围, 常用来分析方案排序的稳定性. 若灵敏度分析后得到的新判断矩阵不满足满意一致性条件, 则灵敏度分析失去意义, 故需将灵敏度分析与一致性分析相结合进行研究. 本文针对这一需求, 首先研究了灵敏度决策区域和满意一致性决策区域的计算方法, 进而给出了既能保持决策者的原始偏好, 又满足

一致性要求的综合决策区域. 据作者掌握的资料, 国内外尚无将两者结合研究的报道. 本文基于现有研究成果做了一些工作, 得出了一些有益的结论.

2 灵敏度分析 (Sensitivity analysis)

记, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $J = \{1, \dots, n\}$ 为下标集合, n 为 A 的阶数, $w_i (i = 1, \dots, n)$ 为 A 导出的权重, CR 为一致性比例, 其中, $CR(A) = \frac{\lambda_{\max}(A) - n}{(n-1)RI}$, $\lambda_{\max}(A)$ 为 A 的主特征值, RI 为随机一致性指标 (取值见文献[1]).

作灵敏度分析时, 有两种情况能保持方案排序不变, 即最优方案不被取代, 及任意方案之间排序保持不变. 两种情况处理方法类似, 本文中以任何方案

之间排序不变进行说明.

设由 A 得出的权重排序为 $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$, 考虑元素 a_{st} 和 a_{ts} 的变化范围(其他元素取值保持不变), 为使所得的新判断矩阵的导出权重排序与原判断矩阵相同, 记 a_{st} 的可变化范围为 $[a_{st}^L, a_{st}^U]$, $s, t \in J$. 由判断矩阵的互反性($a_{ts} = \frac{1}{a_{st}}$), 计算 A 的上三角部分的元素即可, 结果如下^[4]:

当 $|s - t| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{st}^L &= a_{st} \max \left(\left(\frac{w_{s+1}}{w_s} \right)^n, \left(\frac{w_t}{w_{t-1}} \right)^n \right), \\ a_{st}^U &= a_{st} \min \left(\left(\frac{w_{s-1}}{w_s} \right)^n, \left(\frac{w_t}{w_{t+1}} \right)^n \right); \end{aligned} \quad (1)$$

当 $t = s + 1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{st}^L &= a_{st} \left(\frac{w_{s+1}}{w_s} \right)^{n/2}, \\ a_{st}^U &= a_{st} \min \left(\left(\frac{w_{s-1}}{w_s} \right)^n, \left(\frac{w_t}{w_{t+1}} \right)^n \right). \end{aligned} \quad (2)$$

其中, a_{st}^L 是 a_{st} 的取值下限, a_{st}^U 是其取值上限.

记 $D_1 = \{x \mid a_{st}^L \leq x \leq a_{st}^U, s, t \in J\}$, 称 D_1 为灵敏度决策区域. 当决策者认可原判断矩阵导出的权重排序, 而对某个判断不能准确把握时, 只要在 D_1 内作适当调整, 就能保持排序不变.

3 一致性分析(Consistency analysis)

决策者在 D_1 内分析元素 a_{st} 的变化对权重排序的影响时, 需满足判断矩阵的一致性条件, 否则灵敏度分析没有意义. 由于判断矩阵的一致性和元素的数学关系复杂, 本节首先研究元素与一致性的关系, 然后给出满意一致性决策区域的计算方法.

3.1 元素与一致性的关系(Relationship between one entry and the consistency ratio)

文献[6]在研究不完全判断矩阵的权重求解时, 分析了 n 阶($n \geq 3$) 判断矩阵 A 的特征多项式 $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$ 中 λ^{n-3} 项系数 c_3 和主特征值 $\lambda_{\max}(A)$ 的关系, 得到了如下性质.

性质 1 对判断矩阵 A , 主特征值 $\lambda_{\max}(A)$ 和 c_3 的关系为: c_3 越大, $\lambda_{\max}(A)$ 越小; 反之, c_3 越小, 则 $\lambda_{\max}(A)$ 越大. 其中, c_3 按下式计算:

$$c_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(2 - \left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} \right) \right). \quad (3)$$

本文基于性质 1, 得出定理 1 和定理 2, 为判断矩阵的灵敏度和一致性分析奠定了理论基础.

定理 1 由判断矩阵 A , 令 $a_{st}, a_{ts} = 1/a_{st}$, $s, t \in J$, 其他元素值不变, 求问题 P_1 最优解得 x_{st}^*

$$= x_{st}^*.$$

$$\begin{aligned} P_1: \quad & \max c_3(x_{st}), \\ & \text{s.t. } x_{st} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

令 $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 当 $i \neq s, j \neq t$ 时, $b_{ij} = a_{ij}$; 当 $i = s, j = t$ 时, $b_{ij} = x_{st}^*$, $b_{ji} = 1/x_{st}^*$. 有关系 $CR(B) \leq CR(A)$, 并且对于 $x_{st} > 0$, $CR(B)$ 最小.

证 按性质 1, 当 $c_3(x_{st})$ 取最大值时, $\lambda_{\max}(B)$ 取最小值, 由 $CR(A)$ 和 $\lambda_{\max}$ 的关系, 可得 $CR(B) \leq CR(A)$, 且 $CR(B)$ 最小. 证毕.

性质 1 给出了判断矩阵主特征值与特征多项式第 3 项系数的关系, 定理 1 说明在分析判断矩阵元素和一致性的关系时, 可以避开复杂的特征值计算.

需要说明的是, P_1 的约束条件没有写成 $\frac{1}{9} \leq x_{st} \leq 9$, 而是根据文献[12] 将 1 ~ 9 标度扩展为 1 ~ ∞ 标度, 因此有 $x_{st} > 0$, 这样能更为准确地反映决策者的偏好.

3.2 满意一致性决策区域(Satisfactory consistency decision making region)

定理 2 对判断矩阵 A , 设 $X = (x_{ij})_{n \times n}$, 当 $i \neq s, j \neq t$ 时, $x_{ij} = a_{ij}$; 当 $i = s, j = t$ 时, $x_{ij} = x_{st}$, $x_{ji} = 1/x_{st}$. 令 $CR(X) = f(x_{st})$, 由定理 1 求解问题 P_1 得 x_{st}^* , 则有如下结论: 在 x_{st}^* 左侧, $f(x_{st})$ 单调递减; 在 x_{st}^* 右侧, $f(x_{st})$ 单调递增.

证 将判断矩阵 X 的元素代入式(3)可得如下等价表达式:

$$c_3(x_{st}) = d - \left(\frac{p}{x_{st}} + qx_{st} \right), \quad x_{st} > 0. \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} p &= \sum_{t < k \leq n} \frac{a_{sk}}{a_{tk}} + \sum_{1 \leq i < s} \frac{a_{it}}{a_{is}} + \sum_{s < j < t} a_{sj}a_{jt}, \\ q &= \sum_{t < k \leq n} \frac{a_{tk}}{a_{sk}} + \sum_{1 \leq i < s} \frac{a_{is}}{a_{it}} + \sum_{s < j < t} \frac{1}{a_{sj}a_{jt}}, \end{aligned}$$

d 为常数项(不含 x_{st}), 于是, 问题 P_1 化为

$$\begin{aligned} P_2: \quad & \max d - \left(\frac{p}{x_{st}} + qx_{st} \right), \\ & \text{s.t. } x_{st} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$f(x_{st})$ 与 x_{st} 的数学关系比较复杂, 但由式(5)和性质 1 的 c_3 和 $\lambda_{\max}$ 的关系, 极小化 $f(x_{st})$ 等价于极小化函数 $g(x_{st})$, 于是得

$$\begin{aligned} P_3: \quad & \min g(x_{st}) = \frac{p}{x_{st}} + qx_{st}, \\ & \text{s.t. } x_{st} > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)的函数曲线可知, 在 x_{st}^* 左侧, $g(x_{st})$ 单调递

减;在 x_{st}^* 右侧, $g(x_{st})$ 单调递增. 由 $f(x_{st})$ 和 $g(x_{st})$ 的等价性, 即可证明. 证毕.

在判断矩阵的构造过程中, 难以具有完全一致性, 一般在 $CR \leq 0.1$ 时认为判断具有满意一致性. 根据定理 2, 当 $a_{st} = x_{st}^*$, 其他位置上元素数值不变时, 判断矩阵有最好的一致性. 由此, 以 x_{st}^* 为中心构建区域 $[a_{st}^L, a_{st}^U]$,

$$a_{st}^L = x_{st}^* - \zeta_{st}^L, \quad a_{st}^U = x_{st}^* + \zeta_{st}^U, \quad (8)$$

式中, ζ_{st}^L 为具有满意一致性时元素 a_{st} 的左临界值, ζ_{st}^U 为右临界值, $\zeta_{st}^L \geq 0, \zeta_{st}^U \geq 0$. 令 $D_2 = \{x \mid a_{st}^L \leq x \leq a_{st}^U, s, t \in J\}$, 称 D_2 为满意一致性决策区域.

由于 $CR(X)$ 与元素 a_{st} 之间关系复杂, $\zeta_{st}^L, \zeta_{st}^U$ 难以计算, 故以 ζ_{st}^U 为例设计迭代算法求解, ζ_{st}^L 的求解方法类似, 步骤如下:

步骤 1 当 $a_{st} > x_{st}^*$ 时, 若 $CR(A^k) < 0.1$, 令 $a_{st}^{k+1} = a_{st}^k + \tau^k$; 若 $CR(A^k) > 0.1$, 令 $a_{st}^{k+1} = a_{st}^k - \tau^k$. 当 $a_{st} < x_{st}^*$ 时, 令 $a_{st}^{k+1} = x_{st}^*, a_{st}^{k+1} = a_{st}^k + \tau^k$.

步骤 2 计算 $CR(A^{k+1})$. 若 $CR(A^{k+1}) \approx 0.1$, 停止, $\zeta_{st}^U = a_{st}^{k+1}$. 否则 $k = k + 1$, 转步骤 1.

其中, A^k 为第 k 步迭代的判断矩阵, k 为迭代步数, 初始值为 1; “ $\approx$ ” 符号的意义为近似等于; τ^k 为第 k 次迭代步长, $0.1 \leq \tau^k \leq 1$. 当 $CR(A^k)$ 与 0.1 相差较大时, τ^k 适当取大, 反之则取小. 上述迭代算法有如下收敛性定理.

定理 3 若按上述步骤进行迭代, 必经有限步迭代后终止, 最终一致性数值接近 0.1.

证 由定理 2, 在 x_{st}^* 左侧, $f(x_{st})$ 单调递减; 在 x_{st}^* 右侧, $f(x_{st})$ 单调递增. 当 $a_{st} > x_{st}^*$ 时, 若 $CR(A^k) < 0.1$, 令 $a_{st}^{k+1} = a_{st}^k + \tau^k$, 则 $CR(A^{k+1}) > CR(A^k)$; 若 $CR(A^k) > 0.1$, 令 $a_{st}^{k+1} = a_{st}^k - \tau^k$, 则 $CR(A^{k+1}) < CR(A^k)$. 因此经过有限步迭代后, 一致性定能接近 0.1. 同理可证 $a_{st} < x_{st}^*$ 的情况.

证毕.

4 灵敏度和一致性综合分析 (Integration of the sensitivity analysis and consistency analysis)

由第 2 节和第 3 节, 分别得到基于灵敏度分析的决策区域 D_1 和基于满意一致性的区域 D_2 . 将两者相结合, 则有

$$D = D_1 \cap D_2, \quad (9)$$

称 D 为综合决策区域.

在 D 内适当调整判断元素, 既能保持方案的排

序, 又能保证判断矩阵的一致性, 由此得到的权重可靠性增加.

若原判断矩阵满足一致性条件, 则 D 必为非空集. 若不满足一致性条件, 则 D 可能为空集. 若为空集时, 应先按文献[6]等方法进行判断矩阵的一致性改进. D 为非空集时, 可在 D 内进行一致性改进. 从这个角度, 本文结果还可作为一种判断矩阵一致性改进的方法.

5 算例 (Example)

$$\text{对判断矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 2 & 1/5 \\ 9 & 1 & 5 & 2 \\ 1/2 & 1/5 & 1 & 1/2 \\ 5 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 采用特}$$

征根方法得到权重排序为 $w_2 > w_4 > w_1 > w_3$, 假设决策者认可基于 A 的排序, 但对 a_{13} 取值不能把握.

由式(1)得到保持排序结果不变条件下 a_{13} 的可变化范围为 $D_1 = [1/50, 212]$; 由式(8)迭代计算得到 a_{13} 的满意一致性区域为 $D_2 = [1/9, 2]$. 由式(9), 若决策者在 $D = D_1 \cap D_2 = [1/9, 2]$ 内调整 a_{13} , 则既能保持原方案排序, 又能满足判断矩阵的一致性要求, 将得到的权重作为决策依据的可靠性增大; 而在 $[1/50, 1/9]$ 范围内, 则不能满足判断矩阵的一致性要求, 此范围内的灵敏度分析结果没有意义.

6 结语 (Conclusion)

判断矩阵的灵敏度分析必须和一致性分析相结合, 作者从两者相结合的角度出发, 提供给决策者合理的决策区域, 既保持决策者的偏好, 又满足判断的逻辑一致性要求, 具有较大的实用价值. 需要强调的是, 对判断矩阵进行灵敏度分析和一致性分析得出的决策区域, 仍要与决策者交互, 数学分析仅提供一种参考.

参考文献 (References):

- [1] 许树柏. 层次分析法原理[M]. 天津: 天津大学出版社, 1986: 1-13.
(XU Shubo. Theory of the Analytical Hierarchy Process [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1986: 1-13.)
- [2] HURLEY W J. The analytic hierarchy process: a note on an approach to sensitivity which preserves rank order [J]. Computers & Operations Research, 2001, 28(2): 185-188.
- [3] FARKAS A. Data perturbations of matrices of pair wise comparisons [J]. Annals of Operations Research, 2001, 101(1): 401-425.
- [4] AGUARON J, MORENO J M. Local stability intervals in the analytic hierarchy process [J]. European J of Operational Research, 2000,

- 125(1):113-132.
- [5] LIPOVESTSKY S. Interval estimation of priorities in the AHP [J]. *European J of Operational Research*, 1999, 114(1):153-164.
- [6] OBATA T, SHIRAIISHI S. Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: computational experiments [C]// *Proc of the Fifth Int Symposium on the Analytic Hierarchy Process*. [s.l.]: [s.n.], 1999. <http://www3.toyama-u.ac.jp/~shira/isahp.pdf>, 1999.
- [7] 李梅霞. AHP中判断矩阵一致性改进的一种新方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(2):122-125.
(LI Meixia. A new method for improving the consistency of the comparison matrix in AHP [J]. *System Engineer Theory and Practice*, 2000, 20(2):122-125.)
- [8] SAATY T L. Decision making with the AHP: why is the principal eigenvector necessary [J]. *European J of Operational Research*, 2003, 145(1):85-91.
- [9] XU Z. On consistency of the weighted geometric mean complex judgment matrix in AHP [J]. *European J of Operational Research*, 2000, 126(3):683-687.
- [10] LIPOVESTSKY S, CONKLIN W M. Robust estimation of priorities in the AHP [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 137(1):110-122.
- [11] XU Z, WEI C P. A consistency improving method in the analytic hierarchy process [J]. *European J of Operational Research*, 1999, 116(2):443-449.
- [12] Saaty T L. The seven pillars of the analytic hierarchy process [C]// *Proc of the Fifth Int Symposium on the Analytic Hierarchy Process*. [s.l.]: [s.n.], 1999. http://www.isahp2003.net/menus/about_ahp/Japan_ta.pdf, 1999.

作者简介:

朱建军 (1976—), 男, 东北大学博士研究生, 主要研究方向为供应链管理、多目标决策理论与方法、决策支持系统, E-mail: mgwang@mail.neu.edu.cn;

刘士新 (1968—), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为制造执行系统、项目计划与调度、决策支持系统、智能优化方法;

王梦光 (1936—), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为生产计划与调度、智能优化方法、钢铁企业物流优化决策。

《机器人智能控制工程》书评

湖南大学王耀南教授等编著的《机器人智能控制工程》一书, 已由科学出版社于2004年6月出版. 该书系统、深入地介绍了机器人系统的智能控制理论方法、算法及应用. 全书共分九章, 内容包括机器人的基本控制方法、机器人的姿态与运动控制、机器人模糊神经网络控制、机器人小脑模型CMAC的智能控制、机器人模糊自适应控制、机器人力/位置跟踪智能控制、机器人智能鲁棒控制、移动机器人智能控制以及智能控制在水下机器人、视觉伺服机器人控制、智能移动机器人系统、多传感器融合智能检测机器人中的应用. 本书内容新颖、注重理论与实际结合, 理论阐述简明清楚、深入浅出, 算法推导严谨、力求使读者较快掌握和应用这门高新技术.

该书可作为高等院校自动化、计算机应用、机械工程、系统工程、控制科学与工程、信息工程、电子信息工程等专业研究生和本科高年级学生使用, 也可供工程技术人员和科学研究工作者参考使用.

(书评人: 余洪山, 段峰, 刘焕军, 彭金柱, 况菲)

湖南大学电气与信息工程学院