文章编号：1000-8152(2004)04-0546-03

具有异常波动市场的消费与投资策略

郭子君[1,2]，吴让泉[1]
(1.东华大学 理学院，上海 200051；2.华南农业大学 理学院，广东 广州 510642)

摘要：讨论了异常波动市场中容许借贷的消费与投资策略问题，阐述了随机最优控制理论应用于现代金融理论研究中的一种方法.首先给出了金融市场中不确定性的随机模型，利用Itô公式，得到了与消费及投资策略有关的财富过程的随机微分方程，并建立了最优消费与投资问题的随机控制模型.根据随机最优控制理论，导出了目标函数满足的Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程.通过对HJB方程的讨论，得到了最优消费与投资策略的分段表示函数，并就Hara效用函数进行讨论，得到了具体的消费与投资策略.

关键词：异常波动市场；消费投资策略；效用函数；随机微分方程；Itô公式；随机最优控制
中图分类号：O231，O211　　**文献标识码**：A

Optimal consumption and investment policies in the market with abnormal fluctuating source

GUO Zi-jun[1,2], WU Rang-quan[1]
(1.Science College, Donghua University, Shanghai 200051, China;
2.Science School, South China Agriculture University, Guangzhou Guangdong 510642, China)

Abstract: For the market with abnormal fluctuating source, the decision of consumption and investment is studied and a method that uses stochastic optimal control in financial theory is proposed. First of all, the stochastic model about uncertainty in financial market was introduced. By using Ito formula, the stochastic differential equation for fortune that was concerned with the decision of consumption and investment was given, the stochastic control model for consumption and investment was established. By using stochastic optimal control theory, the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation for target function was gotten. By discussing the HJB equation, some pathwise function based optimal decision was acquired. Finally, the decision for Hara function was given.

Key words: market with abnormal fluctuating source; decision of consumption and investment; utility function; stochastic differential equations; Itô formula; stochastic optimal control

1 引言(Introduction)

自1971年Merton R.C关于连续时间的最优消费和投资策略发表以来，消费与投资策略一直是人们关心并研究的问题[1].在Merton问题中，假设投资者可选择的金融资产是两种典型资产，即储蓄、国库券等无风险资产以及股票等风险资产.投资者在金融市场投资的目的是获取收益，使自身的财富增加，并通过财富的消费使自身效用最大化.

随着此类问题研究的不断深入，非完全金融市场的研究已经成为近几年来的研究热点，并取得了不少成果[2].非完全市场是由很多因素的影响造成的.如政治与政策、制度与法规、突发事件以及不对称信息等.在经典的完全市场中，股票价格模型多用几何布朗运动刻划.进一步的研究发现，几何布朗运动模型导致的偏差是不容忽视的.实践上，没有一个股票市场符合几何布朗运动.人们从几何布朗运动出发，提出了更加符合股价变化的数学模型.在股价随机波动的基础上，考虑主力交易者等引起股价异常波动的情形，吴文锋等提出了具异常波动的股价模型[3]

$$\mathrm{d}s = \alpha(t)s\mathrm{d}t + \mu s\mathrm{d}t + \sigma s\mathrm{d}w.$$

本研究基于以上股价模型的投资与消费策略，并对市场作如下假设：

1) 市场中包含一种利率为常数的无风险债券和一只风险股票；

2) 市场中没有税收和交易费用，股票有红利支

收稿日期：2002-05-15；收修改稿日期：2004-01-05.

付;

3) 容许投资者以固定利率借款.

2 数学模型(Mathematical model)

假设投资者选择一种无风险债券,其价格服从微分方程

$$\mathrm{d}p_0(t) = rp_0(t)\mathrm{d}t,\ p_0(0) = p_{00}, \tag{1}$$

而选择的风险股票价格服从随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_1(t) = \mu p_1(t)\mathrm{d}t + \alpha(t)p_1(t)\mathrm{d}t + \sigma p_1(t)\mathrm{d}w(t),\\ p_1(0) = p_{10}.\end{cases} \tag{2}$$

其中 $w(t)$ 是标准 Brown 运动, μ 为股票的升值率, $\sigma > 0$ 为股票价格波动率, $\alpha(t)$ 为短期股价异常波动率.

设初始资本为 x, $c(t)$ 表示投资者的 F_t 可料消费过程, $x(t)$ 表示投资者的财富过程, $u(t)$ 表示 t 时刻投资在股票中的资产比例,则 t 时投资于风险股票的金额为 $u(t)x(t)$,投资于无风险债券的金额为 $x(t) - u(t)x(t)$. 考虑到以上动态投资组合,有

$$\mathrm{d}x(t) = \frac{x(t) - u(t)x(t)}{p_0(t)}\mathrm{d}p_0(t) + \frac{u(t)x(t)}{p_1(t)}\mathrm{d}p_1(t) - c(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

以式(1)与(2)代入式(3),则有投资者的财富过程满足如下随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t) = [rx(t) + \alpha(t)x(t)u(t) + (b+\mu-r)x(t)u(t) - (R-r)\Phi(t) - c(t)]\mathrm{d}t + \sigma u(t)x(t)\mathrm{d}w(t),\\ x(0) = x > 0,\end{cases}$$

其中 $\Phi(t)$ 是借款数额, R 为借款利率,满足 $\mu \geqslant R \geqslant r > 0$, b 为股票红利率.

控制变量 $u(t)$, $c(t)$, $\Phi(t)$ 都非负时,称 $(u(t), c(t), \Phi(t))$ 为容许控制. 容许控制集记为 D. 投资者的值函数定义为

$$V(x) = \sup_D \mathrm{E}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\beta t}U(c(t))\mathrm{d}t.$$

其中 U 是上凸的效用函数,且满足 $U' > 0$, $U'' < 0$. β 为贴现因子.

3 最优消费与投资策略(Decision of optimal consumption and investment)

根据随机最优控制理论,值函数满足如下 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman)偏微分方程:

$$\beta V = \max_D\{\frac{1}{2}\sigma^2u^2(t)x^2(t)V_{xx} + [rx(t) + b(+\mu - r)u(t)x(t) + \alpha(t)u(t)x(t)]V_x + (R - r)\Phi(t)V_x - c(t)V_x + U(c,t))\},$$

并且,在上凸效用函数假设下, V 在 $(0, +\infty)$ 关于 x 是单调增加且上凸的二次可微连续函数[4].

为求解上述 HJB 方程,得到最优投资与消费策略. 定义算子

$$R^V = \max_{u\geqslant 0, \Phi\geqslant 0}\{\frac{1}{2}\sigma^2u^2(t)x^2(t)V_{xx} + [(b + \mu - r)u(t)x(t) + \alpha(t)u(t)x(t) - (R - r)\Phi(t)]V_x\}, \tag{4}$$

$$L^V = \max_{c\geqslant 0}\{-c(t)V_x + U(c(t))\}. \tag{5}$$

对以上 HJB 方程关于 $u(t)$, $c(t)$ 分别进行优化,可以得到最优消费策略和投资策略. 为此,得到如下两个定理.

定理 1　投资者的最优投资策略为

1) 若

$$x(t) > \frac{-(b + \mu + \alpha(t) - r)V_x}{\sigma^2V_{xx}},$$

则投资于股票的比例为

$$u^*(t) = \frac{-(b + \mu + \alpha(t) - r)V_x}{x(t)\sigma^2V_{xx}} < 1,$$

投资债券比例为 $1 - u^*(t)$, 无需借款.

2) 若

$$\frac{-(b + \mu + \alpha(t) - R)V_x}{\sigma^2V_{xx}} \leqslant x(t) \leqslant \frac{-(b + \mu + \alpha(t) - r)V_x}{\sigma^2V_{xx}},$$

则投资于股票的比例 $u^*(t) = 1$, 投资债券的比例为 0,无需借款.

3) 若

$$x(t) < \frac{-(b + \mu + \alpha(t) - R)V_x}{\sigma^2V_{xx}},$$

则投资于股票的比例为

$$u^*(t) = \frac{-(b + \mu + \alpha(t) - R)V_x}{\sigma^2V_{xx}} > 1,$$

投资债券的比例为 0,需借款

$$\Phi^*(t) = \frac{-(b + \mu + \alpha(t) - R)V_x}{\sigma^2V_{xx}} - x(t).$$

证　$V(x)$ 当 $u(t) \leqslant 1$, $\Phi(t) = 0$ 或 $u(t) > 1$, $\Phi(t) = u(t)x(t) - x(t) > 0$ 时取最大值.

1) 假设 $\Phi(t) > 0$,则 $\Phi(t) = u(t)x(t) - x(t)$ 代入式(4) 并在式(4) 中对 $u(t)$ 最大化可得

$$u^*(t) = \frac{-(b + \mu + \alpha(t) - R)V_x}{x(t)\sigma^2V_{xx}} \leqslant$$

$$\frac{-(b+\mu+\alpha(t)-r)V_x}{x(t)\sigma^2 V_{xx}}.$$

因 $x(t) > \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-r)V_x}{\sigma^2 V_{xx}}$, $u^*(t) < 1$ 与假设矛盾.

因此 $\Phi(t) = 0$. 在式(4)中对 $u(t)$ 最大化得

$$u^*(t) = \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-r)V_x}{x(t)\sigma^2 V_{xx}} < 1,$$

相应投资债券的比例为 $1 - u^*(t)$.

2) 假设 $\Phi(t) > 0$, 同1) 对 $u(t)$ 最大化得

$$u^*(t) = \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-R)V_x}{x(t)\sigma^2 V_{xx}},$$

此时因 $x(t) \geqslant \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-R)V_x}{\sigma^2 V_{xx}}$, $u^*(t) \leqslant 1$ 与假设矛盾.

因此 $\Phi(t) = 0$. 在式(4)中对 $u(t)$ 最大化得

$$u^*(t) = \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-r)V_x}{x(t)\sigma^2 V_{xx}} > 1 \text{ 或 } u^*(t) = 1.$$

而 $u^*(t) > 1$ 与 $\Phi^*(t) = 0$ 矛盾, 从而投资于股票的比例为 $u^*(t) = 1$.

3) 假设 $\Phi(t) = 0$, 同2) 对 $u(t)$ 最大化得

$$u^*(t) = \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-r)V_x}{x(t)\sigma^2 V_{xx}} > 1.$$

而 $u^*(t) > 1$ 与 $\Phi^*(t) = 0$ 矛盾.

因此 $\Phi(t) > 0$. 同1) 对 $u(t)$ 最大化得

$$u^*(t) = \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-R)V_x}{x(t)\sigma^2 V_{xx}},$$

此时因

$$x(t) < \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-R)V_x}{\sigma^2 V_{xx}},$$

从而

$$u^*(t) = \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-R)V_x}{x(t)\sigma^2 V_{xx}} > 1,$$

需借款

$$\Phi^*(t) = \frac{-(b+\mu+\alpha(t)-R)V_x}{\sigma^2 V_{xx}} - x(t),$$

投资债券的比例为0.

定理 2 投资者的最优消费策略为

$$c^*(x) = (U')^{-1}(V_x).$$

只需从 L^V 出发即可证明此定理.

4 Hara 效用函数的消费与投资策略(Decision of optimal consumption and investment about Hara utility function)

设效用函数为 $U(c(t)) = \gamma^{-1}c^{\gamma}(t)$, $0 < \gamma < 1$, 代入值函数可得 $V(Kx) = K^{\gamma}V(x)$. 因此 $V(X) = Kx^{\gamma}$. 此时

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = \frac{x}{\gamma - 1},\ (U')^{-1}(V_x) = (V_x)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

于是可得到关于 Hara 效用函数的最优消费与投资策略.

定理 3 投资者的最优投资策略为

1) 若

$$1 > \frac{b+\mu+\alpha(t)-r}{\sigma^2(1-\gamma)},$$

则投资于股票的比例为

$$u^*(t) = \frac{b+\mu+\alpha(t)-r}{\sigma^2(1-\gamma)} < 1,$$

投资于债券的比例为 $1 - u^*(t)$, 无需借款.

2) 若

$$\frac{b+\mu+\alpha(t)-R}{\sigma^2(1-\gamma)} \leqslant 1 \leqslant \frac{b+\mu+\alpha(t)-r}{\sigma^2(1-\gamma)},$$

则投资于股票的比例 $u^*(t) = 1$, 投资债券的比例为0, 无需借款.

3) 若

$$1 < \frac{b+\mu+\alpha(t)-R}{\sigma^2(1-\gamma)},$$

则投资于股票的比例为

$$u^*(t) = \frac{b+\mu+\alpha(t)-R}{\sigma^2(1-\gamma)} > 1,$$

投资债券的比例为0, 需借款

$$\Phi^*(t) = \frac{b+\mu+\alpha(t)-R}{\sigma^2(1-\gamma)}x(t) - x(t).$$

定理 4 投资者的最优消费策略为

$$c^*(x(t)) = (U')^{-1}(V_x) = (K\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}}x(t).$$

在经典金融市场中, Merton[1,6]研究了无红利支付、借款利率与存款利率相等、Hara 效用函数情形下, 投资者的最优投资与消费策略. 若 $\alpha(t) = 0$, $R = r$, $b = 0$ (无红利), 由定理3, 可推得 Merton 问题的投资策略为 $u^*(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)}$, 最优消费策略由定理4给出.

参考文献(References):

[1] MERTON R C. Optmum consumption and portfolio rules in a continuous time model [J]. *J of Economic Theory*, 1971, 3(4): 373 - 413.

[2] 费为银, 吴让泉. 最优消费投资的动态经济模型研究(I)[J]. 应用概率统计, 1999, 15(1): 35 - 42.

(FEI Weiyin, WU Rangquan. A study on dynamical economic model

(下转第552页)

由定理1知

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t-1 & 1\\ -1 & \sin t-1\end{pmatrix},$$

$$\|A(t)\|=$$

$$1+|\sin t-1|=2-\sin t\leqslant 2,\ \forall t\in[t_0,+\infty).$$

则当 $b_{jj}^{(k)}(j=1,2)$ 满足

$$-1-qe^{-2\lambda}\leqslant b_{jj}^{(k)}\leqslant qe^{-2\lambda}-1,\ k\in\mathbb{I}$$

时,系统(11)的平衡点(0,0)是渐近稳定的.这里常数 $q<1$,定义如前所述.

参考文献(References):

[1] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. *Theory of Impulsive Differential Equations* [M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[2] BAINOV D D, SIMEONOV P S. *Systems with Impulse Effects: Stability Theory and Applications* [M]. New York: Halsted, 1989.

[3] BAINOV D D, SIMEONOV P S. *Impulsive Differential Equations Asymptotic Properties of the Solutions and Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 1995.

[4] LIU X. Stability theory for impulsive differential equations in terms of two different measures [M] // *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dakker, 1991, 127: 375 - 384.

[5] KAUL S K, LIU X. Generalized variation of parameters and stability of impulsive systems [J]. *Nonlinear Analysis*, 2000, 40(1/8): 295 - 307.

[6] YE H, MICHE A N, HOU L. Stability analysis of systems with impulse effects [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(12): 1719 - 1723.

作者简介:

刘少平 (1958 —),女,华中科技大学数学系副教授,华中科技大学控制科学与工程系在职博士生,目前研究方向为脉冲控制系统的理论与应用,E-mail: liu_shaoping@sohu.com.

(上接第548页)

for optimal consumption and investment(I) [J]. *Chinese J of Applied Probability and Statistics*, 1999, 15(1): 35 - 42.)

[3] 吴文锋,吴冲锋.股票价格波动模型探讨[J].系统工程理论与实践,2000,20(4):63 - 69.
(WU Wenfeng, WU Chongfeng. Study on models of stock price fluctuation [J]. *Systems Engineering-Theory and Practice*, 2000, 20(4): 63 - 69.)

[4] ZARIPHOPOULOU T. Consumption investment models with constraints [J]. *SIMA J of Optimization*, 1994, 32(1): 59 - 85.

[5] DUFFIE D. *Dynamic Assets Pricing Theory* [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1992.

[6] MERTON R. *Continuous-Time Finance* [M]. Basil Blackwell: Oxford University Press, 1992.

作者简介:

郭子君 (1965 —),男,东华大学高级访问学者,华南农业大学副教授,1990年获东华大学应用数学专业硕士学位,研究方向为随机分析与随机控制、金融数学与金融工程,已发表学术论文10余篇,E-mail: zijunguo@126.com;

吴让泉 (1938 —),男,东华大学教授,博士生导师,1958年毕业于南开大学,研究方向为随机微分方程及其应用、随机控制与金融数学,已出版专著3部,译著3部,在国内外发表学术论文90余篇.