

具线性脉冲的微分系统的稳定性

刘少平

(华中科技大学 数学系, 湖北 武汉 430074)

摘要: 研究了具有线性脉冲作用的常微分系统平衡态的稳定性问题. 应用常数变易法和 Lyapunov 方法, 证明了在文中假设的条件下, 总存在线性脉冲控制使一般非自治常微分系统的平衡态是一致渐近稳定. 将自治微分系统作为特殊情形, 在更一般的条件下得到了相同结论. 最后给出了自治微分系统和非自治微分系统的两个例子以说明所得结论.

关键词: 脉冲微分系统; 平衡态; 渐近稳定

中图分类号: O715 **文献标识码:** A

Stability of differential systems with linear impulse

LIU Shao-ping

(Department of Mathematics, Huazhong University of Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: The stability of equilibria of ordinary differential systems with linear impulse is discussed. Using the method of the variation of parameters and the Lyapunov method, it was shown that there always existed a linear impulse such that differential systems were stable under some conditions. Especially, for autonomous ordinary differential systems, the same conclusion was drawn under more general conditions. Finally, two examples of autonomous system and non-autonomous system were given.

Key words: differential systems with impulse; equilibria; asymptotic stability

1 引言 (Introduction)

近些年来, 脉冲微分方程的研究与应用引起许多数学工作者的关注和兴趣^[1~5]. 文献[6]对常微分脉冲系统的零平衡态的稳定性进行了讨论, 给出了判别零平衡态是一致渐近稳定的充分条件(下述命题 1.1). 作为对这个结果的应用, 本文讨论了具有线性脉冲影响的常微分系统的平衡态的稳定性, 利用常数变易法和 Lyapunov 函数证明了在一定条件下, 总存在线性脉冲控制使常微分系统的平衡态是一致渐近稳定的. 自治系统作为特殊情形, 在更一般的条件下具有相同结论.

一般常微分脉冲系统可描述为

$$\begin{cases} dx/dt = f(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k, k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x \in X = \mathbb{R}^n$; $f \in C[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ 是关于 x 满足 Lipschitz 条件的, 以保证系统(1)关于初始条件的解存在且唯一; 脉冲时刻 $E = \{\tau_k\} \subset \mathbb{R}_+$, 满足 $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \cdots$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$; 脉冲函数 $I_k: \mathbb{R}^n \rightarrow$

$\mathbb{R}^n$. 若定义在 $[t_0, +\infty)$ 上的函数 $x(t)$ 满足:

a) 在 $[t_0, +\infty)$ 上左连续 $t_0 \geq 0$; b) 在 $(t_0, +\infty) \setminus E$ 上可导; c) $\forall \tau_k \in E, x(\tau_k^+) = \lim_{t \rightarrow \tau_k^+} x(t) = x(\tau_k) + I_k(x(\tau_k))$, 则称 $x(t)$ 是(1)的解.

对于系统(1), 若 $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, 0) = 0$; $\forall k \in \mathbb{N}, I_k(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是一个平衡点. 关于这个平衡点的稳定性(脉冲微分方程平衡点的稳定性定义见文献[6]中定义 2.4)文献[6]中建立了下述结论:

命题 1 假设对 $t \in \mathbb{R}_+$, 有 $f(t, 0) = 0$, 对 $k \in \mathbb{N}$, 有 $I_k(0) = 0$, 且存在 $h \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$ 使 $h(0) = 0$; 令 $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 和 $\phi_1, \phi_2 \in K$, 满足 $\phi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \phi_2(\|x\|)$, 那么,

i) 若对系统(1)的任一解 $x(t)$ ($t \in [t_0, +\infty)$), $V(t, x(t))$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上左连续, 在 $(t_0, +\infty) \setminus E$ 处处可微, 且 $V(\tau_n^+, x(\tau_n^+))$ 非增 ($n = 0, 1, 2, \cdots$), 其中 $\tau_0 \triangleq t_0, I_0 \triangleq 0$, 并进一步假设 $V(t, x(t)) \leq h(V(\tau_n^+), x(\tau_n^+))$ 对 $\forall t \in (\tau_n, \tau_{n+1})$ 和 n

$\in \mathbb{N}$ 成立, 则系统(1)的平衡点 $x = 0$ 是一致稳定的;

ii) 在 i) 的条件下再假设存在 $\phi_3 \in K$, 使 $DV(\tau_n^+, x(\tau_n^+)) \leq -\phi_3(\|x(\tau_n^+)\|)$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 成立, 其中 $DV(\tau_n^+, x(\tau_n^+)) \triangleq \frac{1}{\tau_{n+1} - \tau_n} [V(\tau_{n+1}^+, x(\tau_{n+1}^+)) - V(\tau_n^+, x(\tau_n^+))]$, 则系统(1)的平衡点 $x = 0$ 是一致渐近稳定的(证明见文献[6]).

2 主要结论(Main conclusions)

将系统(1)中的脉冲函数视为线性脉冲函数

$$\begin{cases} dx/dt = f(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = B_k x, & t = \tau_k, k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2)$$

这里 $B_k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f \in C^1[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, 且 $f(t, 0) = 0$ (对于非零平衡点, 可作平移变换后讨论, 故此假设不失一般性), 脉冲时刻 $E = \{\tau_k\} \subset \mathbb{R}_+$ 满足 $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$, 且 $0 < l < \inf\{\tau_{k+1} - \tau_k\} \leq \sup\{\tau_{k+1} - \tau_k\} = \lambda < +\infty$ 可改写系统(2)为等价形式

$$\begin{cases} dx/dt = A(t)x + G(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = B_k x, & t = \tau_k, k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$, $G(t, x)$ 含 x 的高阶项.

假设 H I) 存在 $M > 0$, 使 $\|A(t)\| \leq M, \forall t \in [t_0, +\infty)$,

II) $\lim_{x \rightarrow 0} \|G(t, x)\| / \|x\| = 0, \forall t \in [t_0, +\infty)$. 则有

定理 1 如果假设 H 成立, 则存在线性脉冲控制使常微分脉冲系统(2)的平衡态是一致渐近稳定的.

证 (不失一般性, 仅对零平衡态证明) 为叙述方便不妨取 $B_k = D_k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 为对角矩阵. 首先证明总存在适当线性脉冲控制使(3)的线性系统

$$\begin{cases} dx/dt = A(t)x, & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = D_k x, & t = \tau_k, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4)$$

在平衡点 $x = 0$ 是渐近稳定的, 然后说明这种局部的稳定性能保证其相应的非线性系统在该平衡点也具有渐近稳定性.

由系统(4)可得

$$x = e^{\int_{\tau_k}^t A(s)ds} x(\tau_k^+), t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \quad (5)$$

于是

$$x(\tau_{k+1}) = e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s)ds} x(\tau_k^+), \forall k \in \mathbb{N}.$$

取 $V(x) = \|x\|$, 则对任何解 $x(t)$ 和

$V(x(t))$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上左连续, 在 $(t_0, +\infty) \setminus E$ 上处处可微, 且

$$\begin{aligned} V(x(\tau_{k+1}^+)) &= \\ \|(I + D_{k+1})x(\tau_{k+1})\| &= \\ \|(I + D_{k+1})e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s)ds} x(\tau_k^+)\| &\leq \\ \|(I + D_{k+1})e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s)ds}\| \|x(\tau_k^+)\| &= \\ \|(I + D_{k+1})e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s)ds}\| V(x(\tau_k^+)). \end{aligned} \quad (6)$$

可见, 要使

$$V(x(\tau_{k+1}^+)) \leq V(x(\tau_k^+)), \forall k \in \mathbb{N},$$

只要

$$\|(I + D_{k+1})e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s)ds}\| \leq q < 1.$$

记 $U_k = (I + D_k)e^{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} A(s)ds}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, 给定 $q < 1$, 必存在 D_k 使 $\|U_k\| \leq q < 1$. 因为由假设 H 知

$$\begin{aligned} \|U_k\| &= \|(I + D_k)e^{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} A(s)ds}\| \leq \\ \|I + D_k\| e^{M(\tau_k - \tau_{k-1})} &\leq \|I + D_k\| e^{Ml}. \end{aligned}$$

要使 $\|U_k\| \leq q$, 只要 $\|I + D_k\| \leq qe^{-Ml}$.

不妨取 $\|I + D_k\| = \max_{1 \leq j \leq n} |1 + d_{jj}^{(k)}|$, 则当

$$-qe^{-Ml} - 1 \leq d_{jj}^{(k)} \leq qe^{-Ml} - 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

时, 有 $\|U_k\| \leq q < 1 (\forall k \in \mathbb{N})$. 再令 $h(r) = re^{Ml}$, 由式(5)推得 $V(x(t)) \leq h(V(x(\tau_k^+)))$, $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. 所以由命题 1-i) 知, 系统(4)的平衡点 $x = 0$ 是一致稳定的. 进一步由式(6)可推得

$$\begin{aligned} DV(x(\tau_k^+)) &= \\ \frac{1}{\tau_{k+1} - \tau_k} [V(x(\tau_{k+1}^+)) - V(x(\tau_k^+))] &\leq \\ \frac{1}{l} (q - 1) V(x(\tau_k^+)) &= -\frac{1-q}{l} \|x(\tau_k^+)\|, \end{aligned}$$

由命题 1-ii) 知, 系统(4)的平衡点 $x = 0$ 是一致渐近稳定的.

下面证明系统(3)在平衡点 $x = 0$ 也是一致渐近稳定的. 由假设 H-II) 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \|G(t, x)\| / \|x\| = 0$, 故存在 $\delta_1 > 0$, 当 $\|x\| \leq \delta_1$ 时, 有 $\|G(t, x)\| \leq \|x\|$. 又因为 $x(t)$ 在 $(t_0, +\infty) \setminus E$ 上连续, 可知 $x(t) = x(\tau_k^+) + \int_{\tau_k}^t [A(s)x(s) + G(s, x(s))] ds$, $\forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, 于是

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \|x(\tau_k^+)\| + \int_{\tau_k}^t [\|A(s)\| \|x(s)\| + \|G(s, x(s))\|] ds &\leq \end{aligned}$$

$$\|x(\tau_k^+)\| + \int_{\tau_k}^t (M+1) \|x(s)\| ds.$$

由脉冲积分不等式 (Gronwall 不等式, 见文献[1]) 有

$$\|x(t)\| \leq \|x(\tau_k^+)\| e^{(M+1)(t-\tau_k)} \leq$$

$$\|x(\tau_k^+)\| e^{(M+1)\lambda}, \forall t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \quad (8)$$

则对上述 δ_1 , 必存在 $\delta_2 > 0$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 当 $\|x(\tau_k^+)\| \leq \delta_2$ 时, 有 $\|x(t)\| \leq \delta_1, t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ (这里 δ_2 满足: $\delta_2 e^{(M+1)\lambda} < \delta_1$). 故当 $\|x(\tau_k^+)\| \leq \delta_2$ 时, 有 $\|x(t)\| \leq \delta_1$ 和 $\|G(t, x(t))\| \leq \|x(t)\|$ 均成立.

用常数变易法求解系统(3)可得

$$x(\tau_{k+1}) = e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s) ds} x(\tau_k^+) + \Delta_k,$$

其中

$$\Delta_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{\int_{\tau_k}^s A(s) ds} G(s, x(s)) ds.$$

又由 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G(t, x)\| / \|x\| = 0$ 知, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_3 > 0$, 当 $\|x\| \leq \delta_3$ 时, $\|G(t, x)\| < \epsilon \|x\|$. 由式(8)知, 存在 $\delta_4 > 0$, 当 $\|x(\tau_k^+)\| \leq \delta_4$ 时, 有 $\|x(t)\| \leq \delta_3, t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$. 所以当 $\|x(\tau_k^+)\| \leq \delta_4$ 时, 有

$$\|\Delta_k\| \leq \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{M\lambda} \epsilon \|x\| ds \leq$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{M\lambda} \epsilon \|x(\tau_k^+)\| e^{(M+1)\lambda} ds \leq \|x(\tau_k^+)\| e^{(2M+1)\lambda} \lambda \epsilon.$$

又由 $\|U_k\| \leq q < 1$ 知, $\|I + D_k\| =$

$$\|U_k e^{-\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s) ds}\| \leq q e^{M\lambda}, \forall k \in \mathbb{N}. \text{ 仍取}$$

$$V(x) = \|x\|,$$

$$V(x(\tau_{k+1}^+)) = \|I + D_{k+1}\| x(\tau_{k+1}) =$$

$$\|(I + D_{k+1})[e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s) ds} x(\tau_k^+) + \Delta_k]\| \leq$$

$$\|(I + D_{k+1})e^{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} A(s) ds}\| \|x(\tau_k^+)\| +$$

$$\|I + D_{k+1}\| \|\Delta_k\| \leq \|x(\tau_k^+)\| [q + q e^{M\lambda} e^{(2M+1)\lambda} \lambda \epsilon] = q[1 + e^{(3M+1)\lambda} \lambda \epsilon] V(x(\tau_k^+)).$$

因为 $q < 1$, 总可选取充分小的 $\epsilon > 0$, 使 $q[1 + e^{(3M+1)\lambda} \lambda \epsilon] < 1$. 于是 $V(x(\tau_{k+1}^+)) \leq V(x(\tau_k^+)), \forall k \in \mathbb{N}$. 取 $h(r) = r e^{(M+1)\lambda}$, 则由式(8)知

$$V(x(t)) \leq h(V(x(\tau_k^+))), \forall t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

于是由命题 1-i) 知, 系统(3)的平衡点 $x = 0$ 是一致稳定的, 进一步可推得

$$DV(x(\tau_k^+)) =$$

$$\frac{1}{\tau_{k+1} - \tau_k} [V(x(\tau_{k+1}^+)) - V(x(\tau_k^+))] \leq$$

$$\frac{1}{l} [q(1 + e^{(3M+1)\lambda} \lambda \epsilon) - 1] \|x(\tau_k^+)\| =$$

$$- \frac{1}{l} [1 - q(1 + \lambda \epsilon e^{(3M+1)\lambda})] \|x(\tau_k^+)\|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是由命题 1-ii) 知, 系统(3)的平衡点 $x = 0$ 是一致渐近稳定的.

注 上述证明中的式(7)实际上给出了稳定线性脉冲控制的一个范围.

考虑系统(2)的一种特殊情形——具线性脉冲的自治常微分系统

$$\begin{cases} dx/dt = f(x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = B_k x, & t = \tau_k, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (9)$$

其中 $f \in C^1[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, 且 $f(0) = 0$, (注: 对非零平衡点, 可作平移变换后讨论, 故此假设不失一般性), $B_k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. 脉冲时刻

$$E = \{\tau_k\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ 满足 } \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k < \cdots,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty,$$

且

$$0 < l = \inf \{\tau_{k+1} - \tau_k\} \leq \sup \{\tau_{k+1} - \tau_k\} = \lambda < +\infty.$$

有以下推论

推论 1 总存在线性脉冲控制使自治常微分脉冲系统(9)的平衡态是一致渐近稳定的.

3 例子(Example)

例 1 对熟知的 Logistic 模型施以线性脉冲

$$\begin{cases} dx/dt = x(t)(1 - x(t)), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = b_k x, & t = \tau_k, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (10)$$

显然 $x = 0$ 和 $x = 1$ 是系统(10)的两个平衡点. 已知在没有脉冲影响时, $x = 0$ 不具有局部(线性)稳定性, $x = 1$ 是全局渐近稳定的. 由定理 1 可知, 在线性脉冲影响下, 只要 b_k 满足

$$-1 - qe^{-\lambda} \leq b_k \leq qe^{-\lambda} - 1, k \in \mathbb{N},$$

则系统(10)的平衡点 $x = 0$ 是渐近稳定的; 而当 b_k 满足

$$-1 - qe^{\lambda} \leq b_k \leq qe^{\lambda} - 1, k \in \mathbb{N},$$

系统(10)的平衡点 $x = 1$ 仍保持渐近稳定性. 这里常数 $q < 1, \lambda$ 定义如前所述. 可见, 对原本不稳定的平衡点, 稳定线性脉冲控制的范围小; 对原本稳定的平衡点, 稳定线性脉冲控制的范围大.

例 2 考虑脉冲系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (\sin t - 1)x + y + xy^2, & t \neq \tau_k, \\ \dot{y} = (\sin t - 1)y - x + x^2 y, \\ \Delta x = d_{11}^{(k)} x, \Delta y = d_{22}^{(k)} y, & t = \tau_k, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (11)$$

由定理1知

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t - 1 & 1 \\ -1 & \sin t - 1 \end{pmatrix},$$

$$\|A(t)\| =$$

$$1 + |\sin t - 1| = 2 - \sin t \leq 2, \forall t \in [t_0, +\infty).$$

则当 $b_{jj}^{(k)} (j = 1, 2)$ 满足

$$-1 - qe^{-2\lambda} \leq b_{jj}^{(k)} \leq qe^{-2\lambda} - 1, k \in \mathbb{N}$$

时,系统(11)的平衡点(0,0)是渐近稳定的.这里常数 $q < 1$, 定义如前所述.

参考文献(References):

- [1] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. *Theory of Impulsive Differential Equations* [M]. Singapore: World Scientific, 1989.
- [2] BAINOV D D, SIMEONOV P S. *Systems with Impulse Effects: Sta-*

bility Theory and Applications [M]. New York: Halsted, 1989.

- [3] BAINOV D D, SIMEONOV P S. *Impulsive Differential Equations Asymptotic Properties of the Solutions and Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 1995.
- [4] LIU X. Stability theory for impulsive differential equations in terms of two different measures [M] // *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dekker, 1991, 127: 375 - 384.
- [5] KAUL S K, LIU X. Generalized variation of parameters and stability of impulsive systems [J]. *Nonlinear Analysis*, 2000, 40(1/8): 295 - 307.
- [6] YE H, MICHE A N, HOU L. Stability analysis of systems with impulse effects [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(12): 1719 - 1723.

作者简介:

刘少平 (1958 —), 女, 华中科技大学数学系副教授, 华中科技大学控制科学与工程系在职博士生, 目前研究方向为脉冲控制系统的理论与应用, E-mail: liu_shaoping@sohu.com.

(上接第548页)

for optimal consumption and investment(I) [J]. *Chinese J of Applied Probability and Statistics*, 1999, 15(1): 35 - 42.)

- [3] 吴文锋, 吴冲锋. 股票价格波动模型探讨[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 63 - 69.
(WU Wenfeng, WU Chongfeng. Study on models of stock price fluctuation [J]. *Systems Engineering-Theory and Practice*, 2000, 20(4): 63 - 69.)
- [4] ZARIPHOUPOULOU T. Consumption investment models with constraints [J]. *SIMA J of Optimization*, 1994, 32(1): 59 - 85.
- [5] DUFFIE D. *Dynamic Assets Pricing Theory* [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1992.

- [6] MERTON R. *Continuous-Time Finance* [M]. Basil Blackwell: Oxford University Press, 1992.

作者简介:

郭子君 (1965 —), 男, 东华大学高级访问学者, 华南农业大学副教授, 1990年获东华大学应用数学专业硕士学位, 研究方向为随机分析与随机控制、金融数学与金融工程, 已发表学术论文10余篇, E-mail: zijunguo@126.com;

吴让泉 (1938 —), 男, 东华大学教授, 博士生导师, 1958年毕业于南开大学, 研究方向为随机微分方程及其应用、随机控制与金融数学, 已出版专著3部, 译著3部, 在国内外发表学术论文90余篇.